数学奥林匹克竞赛题解精编

Edustar
中教育星软件股份有限公司

序

中学学科（数、理、化）竞赛题典，1992 年问世后，颇受欢迎，很快销售一空．为了适应各方面的需要，我们编成这套最新的竞赛题典，既搜集了近五年来的赛题，又从原来的题典中精选出一部分内容．这样，主要的竞赛（如国际竞赛）均保持完整，篇幅又不过于庞大，可以称为最新最精的题典．

信息科学（计算机）竞赛，五年前刚刚起步，现在材料已经很多．这次也编为一册．随着计算机的广泛使用，信息科学竞赛将会越来越引起人们的关注．

对于学科竞赛，有各种各样的看法，总的说来，与体育竞赛类似，正面效应远远超过负面影响．所以近年来，各学科的竞赛，不仅没有停滞的趋势，反而蓬勃发展，日益扩大．

“天下大事，必作于细。”我们希望，这套新题典的出版，对于中学学科竞赛的发展，对于科学知识的普及，对于国民素质的提高，能够起着一点积极有益的作用．

单 墫

编写说明

本书是在原《数学奥林匹克题典》基础上新编的增订、精选本．删除了原书中 1950 年以前的陈题，精简了重复、次要和过于繁杂的题型，增补了 1992 年～1997 年间国内外重要竞赛的新题.时间跨度约为 50 年，收题 1451 个．与原书相比，篇幅减小一半，新题占五分之二，是一本内容更新，更切于实用，尤其是适合中学生阅读的数学竞赛辅导书．

在编写体例上，与原书保持一致．每题由题目、题说、解答三部分组成．在题说中说明该题的来源和出处．所给解答，尽可能选择最好的一种，有时还给出其他优秀的“别解”．对某些题解，还适当给以评注，指出其可注意之处．

在题目编排上，按数学内容分为五部分：

A——整数；B——代数；C——几何；D——三角；E——组合数学．

每部分下分若干子类，子类目录在原书基础上有所调整，使其更符合题解实际内容，方便读者查用．

参加本书新题编写工作的有单墫、胡炳生、张振环、胡礼祥、吴俊．单墫对题解作了全面审订、修改，有的还另给新解．胡炳生对原书题解进行了精选和校订，整理、编制了全部图稿，并对全书进行分类和总纂．

由于数学竞赛题遍及世界各国，题解精微奥妙，囿于作者能力和水平，有的好题可能有遗漏，有的题解也未必精到，敬请广大读者批评指正．

编者

1999 年 10 月

A 整数

A1 特殊的自然数

A1－001 求一个四位数，它的前两位数字及后两位数字分别相同，而该数本身等于一个整数的平方．

【题说】 1956 年～1957 年波兰数学奥林匹克一试题 1．

【解】设所求的四位数为$x=\overline{aabb}$ 则

$$x=1000a+100a+10b+b$$
$$=11(100a+b)$$

其中 $0<a\leq 9$，$0\leq b\leq 9$．可见平方数 x 被 11 整除，从而 x 被 11^2 整除．因此，数 $100a+b=99a+(a+b)$ 能被 11 整除，于是 $a+b$ 能被 11 整除．但 $0<a+b\leq 18$，以 $a+b=11$．于是 $x=11^2(9a+1)$，由此可知 $9a+1$ 是某个自然数的平方．对 a＝1，2，…，9 逐一检验，易知仅 a＝7 时，$9a+1$ 为平方数，故所求的四位数是 $7744=88^2$．

A1－002 假设 n 是自然数，d 是 $2n^2$ 的正约数．证明：n^2+d 不是完全平方．

【题说】 1953 年匈牙利数学奥林匹克题 2．

【证】 设 $2n^2=kd$，k 是正整数，如果 n^2+d 是整数 x 的平方，那么

$$k^2x^2=k^2(n^2+d)=n^2(k^2+2k)$$

但这是不可能的，因为 k^2x^2 与 n^2 都是完全平方，而由 $k^2<k^2+2k<(k+1)^2$ 得出 k^2+2k 不是平方数．

A1－003 试证四个连续自然数的乘积加上 1 的算术平方根仍为自然数．

【题说】 1962 年上海市赛高三决赛题 1．

【证】 四个连续自然数的乘积可以表示成

$$n(n+1)(n+2)(n+3)=(n^2+3n)(n^2+8n+2)$$
$$=(n^2+3n+1)^2-1$$

因此，四个连续自然数乘积加上 1，是一完全平方数，故知本题结论成立．

A1－004 已知各项均为正整数的算术级数，其中一项是完全平方数，证明：此级数一定含有无穷多个完全平方数．

【题说】 1963 年全俄数学奥林匹克十年级题 2．算术级数有无穷多项．

【证】 设此算术级数公差是 d，且其中一项 $a=m^2$（$m\in N$）．于是

$$a+(2km+dk^2)d=(m+kd)^2$$

对于任何 $k\in N$，都是该算术级数中的项，且又是完全平方数．

A1－005 求一个最大的完全平方数，在划掉它的最后两位数后，仍得到一个完全平方数（假定划掉的两个数字中的一个非零）．

【题说】 1964 年全俄数学奥林匹克十一年级题 1．

【解】 设 n^2 满足条件，令 $n^2=100a^2+b$，其中 $0<b<100$．于是 $n>10a$，即 $n\geq 10a+1$．因此

$$b=n^2100a^2\geq 20a+1$$

由此得　　$20a+1<100$，所以 $a\leq 4$．

经验算，仅当 a＝4 时，n＝41 满足条件．若 n＞41 则 $n^2-40^2\geq 42^2-40^2>100$．因此，满足本题条件的最大的完全平方数为 $41^2=1681$．

A1－006 求所有的素数 p，使 $4p^2+1$ 和 $6p^2+1$ 也是素数．

【题说】 1964 年～1965 年波兰数学奥林匹克二试题 1．

【解】 当 $p\equiv\pm1\pmod 5$ 时，$5|4p^2+1$．当 $p\equiv\pm2\pmod 5$ 时，$5|6p^2+1$．所以本题只有一个解 p＝5．

A1－007 证明存在无限多个自然数 a 有下列性质：对任何自然数 n，$z=n^4+a$ 都不是素数．

【题说】 第十一届（1969 年）国际数学奥林匹克题 1，本题由原民主德国提供．

【证】 对任意整数 m＞1 及自然数 n，有

$$n^4+4m^4=(n^2+2m^2)^2-4m^2n^2$$
$$=(n^2+2mn+2m^2)(n^2-2mn+2m^2)$$

而
$$n^2+2mn+2m^2>n^2-2mn+2m^2$$
$$=(n-m)^2+m^2\geq m^2>1$$

故 n^4+4m^4 不是素数．取 $a=4\cdot2^4,4\cdot3^4,\cdots$就得到无限多个符合要求的 a．

A1－008 将某个 17 位数的数字的顺序颠倒，再将得到的数与原来的数相加．证明：得到的和中至少有一个数字是偶数．

【题说】 第四届（1970 年）全苏数学奥林匹克八年级题 4．

【证】 假设和的数字都是奇数．在加法算式

$$\begin{array}{r} ab\cdots cd \\ +)\quad dc\cdots ba \\ \hline \end{array}$$

中，末一列数字的和 d＋a 为奇数，从而第一列也是如此，因此第二列数字的和 b＋c≤9．于是将已知数的前两位数字 a、b 与末两位数字 c、d 去掉，所得的 13 位数仍具有性质：将它的数字颠倒，得到的数与它相加，和的数字都是奇数．照此进行，每次去掉首末各两位数字．最后得到一位数，它与自身相加显然是偶数．矛盾！

因此，和的数字中必有偶数．

A1－009 证明：如果 p 和 p＋2 都是大于 3 的素数，那么 6 是 p＋1 的因数．

【题说】 第五届（1973 年）加拿大数学奥林匹克题 3．

【证】 因为 p 是奇数，所以 2 是 p＋1 的因数．

因为 p、p＋1、p＋2 除以 3 余数不同，p、p＋2 都不被 3 整除，所以 p＋1 被 3 整除．

于是 6 是 p＋1 的因数．

A1－010 证明：三个不同素数的立方根不可能是一个等差数列中的三项（不一定是连续的）．

【题说】 美国第二届（1973 年）数学奥林匹克题 5．

【证】 设 p、q、r 是不同素数．假如有自然数 l、m、n 和实数 a、d，使

$$\sqrt[3]{p}=a+ld,\ \sqrt[3]{q}=a+md,\ \sqrt[3]{r}=a+nd$$

消去 a，d，得

$$(m-n)\sqrt[3]{p}+(n-l)\sqrt[3]{q}+(l-m)\sqrt[3]{r}=0$$

化简得（m－n）^{3}p＝（l－n）^{3}q＋（m－l）^{3}r＋3（l－n）（m－l）×（m－n）$\sqrt[3]{pqr}$等式左边是有理数，右边是无理数，矛盾．因此原命题成立．

A1－011 设 n 为大于 2 的已知整数，并设 V_n 为整数 1＋kn 的集合，k＝1，2，…．数 m∈V_n 称为在 V_n 中不可分解，如果不存在数 p，q∈V_n 使得 pq＝m．证明：存在一个数 r∈V_n 可用多于一种方法表达成 V_n 中不可分解的元素的乘积．

【题说】 第十九届（1977 年）国际数学奥林匹克题 3．本题由荷兰提供．

【证】 设 a＝n－1，b＝2n－1，则 a^2、b^2、a^2b^2 都属于 V_n．因为 a^2＜（n＋1）^{2}，所以 a^2 在 V_n 中不可分解．

因为 $\frac{ab}{a^2}=\frac{2n-1}{n-1}=2+\frac{1}{n-1}$ 在 n＞2 时不是整数，所以在 ab 的分解式中不会出现 a^2．

r＝a^2b^2 有两种不同的分解方式：r＝a^2·b^2＝a^2…（直至 b2 分成不可分解的元素之积）与 r＝ab·ab＝…（直至 ab 分成不可分解的元素之积），前者有因数 a^2，后者没有．

A1－012 证明在无限整数序列

10001，100010001，1000100010001，…

中没有素数．

注意第一数（一万零一）后每一整数是由前一整数的数字连接 0001 而成．

【题说】 1979 年英国数学奥林匹克题 6．

【证】 序列 1，10001，100010001，…，可写成

$$1,\ 1+10^4,\ 1+10^4+10^8,\ \cdots$$

其通项为 $a_n=\frac{10^{4n}-1}{10^4-1}$，n＝1，2，3，…我们要证明对于 n≥2，$a_n$ 是一个合数．

由于 $$a_{2k}=\frac{10^{8k}-1}{10^4-1}=\frac{10^{8k}-1}{10^8-1}\cdot\frac{10^8-1}{10^4-1},\ k=2,3,\cdots$$

$$a_{2k+1}=\frac{10^{4(2k+1)}-1}{10^4-1}=\frac{10^{2(2k+1)}-1}{10^2-1}\cdot\frac{10^{2(2k+1)}+1}{10^2-1},\ k=1,2,\cdots$$

即对 n＞2，a_n 均可分解为两个大于 1 的整数的乘积，而 a_2＝10001＝137·73．故对一切 n≥2，a_n 均为合数．

A1－013 如果一个自然数是素数，并且任意地交换它的数字，所得的数仍然是素数，那么这样的数叫绝对素数．求证：绝对素数的不同数字不能多于 3 个．

【题说】 第十八届（1984 年）全苏数学奥林匹克八年级题 8．

【证】 若不同数字多于 3 个，则这些数字只能是 1、3、7、9．不难验证 1379、3179、9137、7913、1397、3197、7139 除以 7，余数分别为 0、1、2、3、4、5、6．因此对任意自然数 M，10^4×M 与上述 7 个四位数分别相加，所得的和中至少有一个被 7 整除，从而含数字 1、3、7、9

的数不是绝对素数．

A1－014 设正整数 d 不等于 2、5、13．证明在集合｛2，5，13，d｝中可以找到两个不同元素 a、b，使得 ab－1 不是完全平方数．

【题说】 第二十七届（1986 年）国际数学奥林匹克题 1．本题由原联邦德国提供．

【证】 证明 2d－1、5d－1、13d－1 这三个数中至少有一个不是完全平方数即可．用反证法，设

$$5d-1=x^2 \qquad (1)$$

$$5d-1=y^2 \qquad (2)$$

$$13d-1=z^2 \qquad (3)$$

其中 x、y、z 是正整数．

由（1）式知，x 是奇数，不妨设 x＝2n－1．代入有 2d－1＝（2n－1）^{2}即

$$d=2n^2-2n+1 \qquad (4)$$

（4）式说明 d 也是奇数．

于是由（2）、（3）知 y、Z 是偶数，设 y＝2p，z＝2q，代入（2）、（3）相减后除以 4 有

$$2d=q^2-p^2=(q+p)(q-p)$$

因 2d 是偶数，即 q^2-p^2 是偶数，所以 p、q 同为偶数或同为奇数，从而 q＋p 和 q－p 都是偶数，即 2d 是 4 的倍数，因此 d 是偶数．这与 d 是奇数相矛盾，故命题正确．

A1－015 求出五个不同的正整数，使得它们两两互素，而任意 n（n≤5）个数的和为合数．

【题说】 第二十一届（1987 年）全苏数学奥林匹克十年级题 1．

【解】 由 n 个数

$$a_i=i\cdot n!+1,\ i=1,2,\cdots,n$$

组成的集合满足要求．

因为其中任意 k 个数之和为

$$m\cdot n!+k\ (m\in N,\ 2\le k\le n)$$

由于 n！＝1·2·…· n 是 k 的倍数，所以 m·n！＋k 是 k 的倍数，因而为合数．

对任意两个数 a_i 与 a_j（i＞j），如果它们有公共的质因数 p，则 p 也是 $a_i-a_j=(i-j)n!$ 的质因数，因为 0＜i－j＜n，所以 p 也是 n！的质因数．但 a_i 与 n！互质，所以 a_i 与 a_j 不可能有公共质因数 p，即 a_i、a_j（i≠j）互素．令 n＝5，便得满足条件的一组数：121，241，361，481，601．

A1－016 已知 n≥2，求证：如果 k^2+k+n 对于整数 k $\left(0\le k\le\sqrt{\frac{n}{3}}\right)$是质数，则$k^2+k+n$对于所有整数k（$0\le k\le n-2$）都是素数．

【题说】 第二十八届（1987 年）国际数学奥林匹克题 6．本题由原苏联提供．

同理，$AC=2\cos\frac{2\pi}{7}$，$BD=2\cos\frac{3\pi}{7}$．

－2，令p是m^2+m+n的最小素因子，则$p\leq\sqrt{m^2+m+n}$．

(1) 若 m≥p，则 p|（m－p）^{2}＋（m－p）＋n．

又（m－p）^{2}＋（m－p）＋n≥n＞P，这与 m 是使 k^2+k+n 为合数的最小正整数矛盾．

(2) 若 m≤p－1，则（p－1－m）^{2}＋（p－1－m）＋n＝（p－1－m）（p－m）＋n 被 p 整除，且

$$(p-1-m)^2+(p-1-m)+n\geq n>p$$

因为（p－1－m）^{2}＋（p－1－m）＋n 为合数，所以

$$p-1-m\geq m，p\geq 2m+1$$

由

$$2m+1\leq p\leq\sqrt{m^2+m+n}$$

得

$$4m^2+4m+1\leq m^2+m+n$$

即

$$3m^2+3m+1-n\leq 0$$

由此得

$$m\leq\frac{-3+\sqrt{12n-3}}{6}<\sqrt{\frac{n}{3}}$$

与已知条件矛盾．所以，对所有的$\sqrt{\frac{n}{3}}<k\leq n-2$，$k^2+k+n$为素数．

A1－017 正整数 a 与 b 使得 ab＋1 整除 a^2+b^2．求证：$(a^2+b^2)/(ab+1)$是某个正整数的平方．

【题说】 第二十九届（1988 年）国际数学奥林匹克题 6．本题由原联邦德国提供．

【证】 令$\frac{a^2+b^2}{ab+1}=k$．若k不是完全平方，考虑不定方程

$$a^2-kab+b^2=k \qquad (1)$$

显然（1）的解（a，b）满足 ab≥0（否则 ab≤－1，$a^2+b^2=k(ab+1)\leq 0$）．

又由于 k 不是完全平方，故 ab＞0．

设（a，b）是（1）的解中适合 a＞0（从而 b＞0）并且使 a＋b 最小的那个解．不妨设 a≥b．固定 k 与 b，把（1）看成 a 的二次方程，它有一根为 a．设另一根为 a′，则由韦达定理

$$\begin{cases}a+a'=kb & (2)\\ aa'=b^2-k & (3)\end{cases}$$

（2），a′为整数，因而（a′，b）也是（1）的解．由于 b＞0，所以 a′＞0．

但由（3）

$$a'=\frac{b^2-k}{a}\leq\frac{b^2-1}{a}\leq\frac{a^2-1}{a}<a$$

从而 $a'+b<a+b$，这与 $a+b$ 的最小性矛盾，所以 k 必为完全平方．

A1－018 求证：对任何正整数 n，存在 n 个相继的正整数，它们都不是素数的整数幂．

【题说】 第三十届（1989 年）国际数学奥林匹克题 5．本题由瑞典提供．

【证】 设 $a=(n+1)!$，则 a^2+k（$2\le k\le n+1$），被 k 整除而不被 k^2 整除（因为 a^2 被 k^2 整除而 k 不被 k^2 整除）．如果 a^2+k 是质数的整数幂 p^l，则 $k=p^j$（l、j 都是正整数），但 a^2 被 p^{2j} 整除因而被 p^{j+1} 整除，所以 a^2+k 被 p^j 整除而不被 p^{j+1} 整除，于是 $a^2+k=p^j=k$，矛盾．因此

$$a^2+k\ (2\le k\le n+1)$$

这 n 个连续正整数都不是素数的整数幂．

A1－019 n 为怎样的自然数时，数

$$3^{2n+1}-2^{2n+1}-6^n$$

是合数？

【题说】 第二十四届（1990 年）全苏数学奥林匹克十一年级题 5

【解】 $3^{2n+1}-2^{2n+1}-6^n=(3^n-2^n)(3^{n+1}+2^{n+1})$

当 $n>l$ 时，$3^n-2^n>1$，$3^{n+1}+2^{n+1}>1$，所以原数是合数．当 $n=1$ 时，原数是素数 13．

A1－020 设 n 是大于 6 的整数，且 a_1、a_2、…、a_k 是所有小于 n 且与 n 互素的自然数，如果

$$a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_k-a_{k-1}>0$$

求证：n 或是素数或是 2 的某个正整数次方．

【题说】 第三十二届（1991 年）国际数学奥林匹克题 2．本题由罗马尼亚提供．

【证】 显然 $a_1=1$．

由 $(n-1,n)=1$，得 $a_k=n-1$．

令 $d=a_2-a_1>0$．

当 $a_2=2$ 时，$d=1$，从而 $k=n-1$，n 与所有小于 n 的自然数互素．由此可知 n 是素数．

当 $a_2=3$ 时，$d=2$，从而 n 与所有小于 n 的奇数互素．故 n 是 2 的某个正整数次方．

设 $a_2>3$．a_2 是不能整除 n 的最小素数，所以 $2|n$，$3|n$．由于 $n-1=a_k=1+(k-1)d$，所以 $3\nmid d$．又 $1+d=a_2$，于是 $3\nmid 1+d$．由此可知 $3|1+2d$．若 $1+2d<n$，则 $a_3=1+2d$，这时 $3|(a_3,n)$．矛盾．若 $1+2d\ge n$，则小于 n 且与 n 互素自然数的个数为 2．

设 $n=2m$（>6）．若 m 为偶数，则 $m+1$ 与 n 互质，若 m 为奇数，则 $m+2$ 与 m 互质．即除去 $n-1$ 与 1 外、还有小于 n 且与 n 互质的数．矛盾．

综上所述，可知 n 或是素数或是 2 的某个正整数次方．

A1－021 试确定具有下述性质的最大正整数 A：把从 1001 至 2000 所有正整数任作一个排列，都可从其中找出连续的 10 项，使这 10 项之和大于或等于 A．

【题说】 第一届（1992 年）中国台北数学奥林匹克题 6．

【解】 设任一排列，总和都是 1001＋1002＋…＋2000＝1500500，将它分为 100 段，每段 10 项，至少有一段的和≥15005，所以

$$A\geq 15005$$

另一方面，将 1001～2000 排列如下：

2000	1001	1900	1101	1800
1201	1700	1301	1600	1401
1999	1002	1899	1102	1799
1202	1699	1302	1599	1402
…	…	…	…	…
1901	1100	1801	1200	1701
1300	1601	1400	1501	1300

并记上述排列为

$$a_1，a_2，\cdots，a_{2000}$$

（表中第 i 行第 j 列的数是这个数列的第 10（i－1）＋j 项，1≤i≤20，1≤j≤10）

令 $S_i=a_i+a_{i+1}+\cdots+a_{i+9}$（i＝1，2，…，1901）

则 $S_1=15005$，$S_2=15004$．易知若 i 为奇数，则 $S_i=15005$；若 i 为偶数，则 $S_i=15004$．

综上所述 A＝15005．

A1－022 相继 10 个整数的平方和能否成为完全平方数？

【题说】 1992 年友谊杯国际数学竞赛七年级题 2．

【解】

$$(n+1)^2+(n+2)^2+\cdots+(n+10)^2$$
$$=10n^2+110n+385=5(2n^2+22n+77)$$

不难验证 n≡0，1，－1，2，－2（mod 5）时，均有

$$2n^2+22n+77\equiv 2(n^2+n+1)\not\equiv 0 \pmod 5$$

所以 $(n+1)^2+(n+2)^2+\cdots+(n+10)^2$ 不是平方数，

A1－023 是否存在完全平方数，其数字和为 1993？

【题说】 第三届（1993 年）澳门数学奥林匹克第二轮题 2．

【解】 存在，事实上，

$$\overbrace{99\cdots9}^{n}7^2=(10^n-3)^2=10^{2n}-6\times10^n+9=\overbrace{99\cdots9}^{n}4\overbrace{00\cdots0}^{n}9$$ 取 n＝221 即可．

A1－024 能够表示成连续 9 个自然数之和，连续 10 个自然数之和，连续 11 个自然数之和的最小自然数是多少？

【题说】 第十一届（1993 年）美国数学邀请赛题 6．

【解】 答 495．

连续 9 个整数的和是第 5 个数的 9 倍；连续 10 个整数的和是第 5 项与第 6 项之和的 5 倍；连续 11 个整数的和是第 6 项的 11 倍，所以满足题目要求的自然数必能被 9、5、11 整除，这数至少是 495．

又 495＝51＋52＋…＋59＝45＋46＋…＋54＝40＋41＋…＋50

A1－025 如果自然数 n 使得 2n＋1 和 3n＋1 都恰好是平方数，试问 5n＋3 能否是一个素数？

【题说】 第十九届（1993 年）全俄数学奥林匹克九年级一试题 1．

【解】 如果 $2n+1=k^2$，$3n+1=m^2$，则 $5n+3=4(2n+1)-(3n+1)=4k^2-m^2=(2k+m)(2k-m)$．

因为 $5n+3>(3n+1)+2=m^2+2>2m+1$，所以 $2k-m\neq 1$（否则 $5n+3=2k+m=2m+1$）．从而 $5n+3=(2k+m)(2k-m)$ 是合数．

A1－026 设 n 是正整数．证明：2n＋1 和 3n＋1 都是平方数的充要条件是 n＋1 为两个相邻的平方数之和，并且为一平方数与相邻平方数 2 倍之和．

【题说】 1994 年澳大利亚数学奥林匹克二试题 2．

【证】 若 2n＋1 及 3n＋1 是平方数，因为 $2\nmid(2n+1)$，$3\nmid(3n+1)$，可设 $2n+1=(2k+1)^2$，$3n+1=(3t\pm 1)^2$，由此可得

$$n+1=k^2+(k+1)^2,\ n+1=(t\pm 1)^2+2t^2$$

反之，若 $n+1=k^2+(k+1)^2=(t\pm 1)^2+2t^2$，则

$$2n+1=(2k+1)^2,\ 3n+1=(3t\pm 1)^2$$

从而命题得证．

A1－027 设 a、b、c、d 为自然数，并且 ab＝cd．试问 a＋b＋c＋d 能否为素数．

【题说】 第五十八届（1995 年）莫斯科数学奥林匹克九年级题 10．

【解】 由题意知

$$a+b+c+d=a+b+c+\frac{ab}{c}=\frac{(a+c)(b+c)}{c}$$

为整数，从而存在正整数 c_1 与 c_2，使 $c=c_1c_2$，且 $\frac{a+c}{c_1}$ 与 $\frac{b+c}{c_2}$ 上均为正整数，将它们分别记作 k 与 l．由

$$a+c>c\geq c_1,\ b+c>c\geq c_2$$

所以，$k>1$ 且 $l>1$．

从而，$a+b+c+d=kl$ 为合数．

A1－028 设 $k_1<k_2<k_3<\cdots$ 是正整数，且没有两个是相邻的，又对于 $m=1,2,3,\cdots$，$S_m=k_1+k_2+\cdots+k_m$．求证：对每一个正整数 n，区间 (S_n,S_{n+1}) 中至少含有一个完全平方数．

【题说】 1996 年爱朋思杯——上海市高中数学竞赛题 2．

【证】 $S_n=k_n+k_{n-1}+\cdots+k_1$

$$\leq\begin{cases}k_n+(k_n-2)+(k_n-4)+\cdots+2=\frac{k_n(k_n+2)}{4} & \text{（若}k_n\text{为偶数．）}\\ k_n+(k_n-2)+(k_n-4)+\cdots+1=\frac{(k_n+1)^2}{4} & \text{（若}k_n\text{为奇数．）}\end{cases}$$

$$\leq\frac{(k_n+1)^2}{4}$$

所以

$$k_n+1\geq 2\sqrt{S_n}$$

$$k_{n+1}\geq k_n+2\geq 2\sqrt{S_n}+1$$

$$S_{n+1}=S_n+k_{n+1}\geq(\sqrt{S_n}+1)^2$$

从而

$$\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}\geq 1$$

即（$\sqrt{S_n}$**，**$\sqrt{S_{n+1}}$**）中至少含有一个整数．**

A2 求解问题

A2－001 哪些连续正整数之和为 1000？试求出所有的解．

【题说】 1963 年成都市赛高二二试题 3．

【解】 设这些连续正整数共 n 个（n＞1），最小的一个数为 a，则有

$$a+(a+1)+\cdots+(a+n-1)=1000$$

即

$$n(2a+n-1)=2000$$

若 n 为偶数，则 2a＋n－1 为奇数；若 n 为奇数，则 2a＋n－1 为偶数．因 a≥1，故 2a＋n－1＞n．

由于 $2000=2^4\cdot 5^3$，$n<\sqrt{2000}<50$，故 n 可取的值是 2、4、5、8、10、16、20、25、40．仅在 n 取 5、16、25 时，$\frac{2000}{n}$ 与 n 的奇偶性不同，故只有 n＝5，16，25，因此可能的取法只有下列三种：

若 n＝5，则 a＝198；

若 n＝16，则 a＝55；

若 n＝25，则 a＝28．

故解有三种：

$$198+199+200+201+202$$
$$55+56+\cdots+70$$
$$28+29+\cdots+52$$

A2－002 N 是整数，它的 b 进制表示是 777，求最小的正整数 b，使得 N 是整数的四次方．

【题说】 第九届（1977 年）加拿大数学奥林匹克题 3．

【解】 设 b 为所求最小正整数，则

$$7b^2+7b+7=x^4$$

素数 7 应整除 x，故可设 x＝7k，k 为正整数．于是有

$$b^2+b+1=7^3k^4$$

当 k＝1 时，（b－18）（b＋19）＝0．因此 b＝18 是满足条件的最小正整数．

A2－003 如果比 n 个连续整数的和大 100 的数等于其次 n 个连续数的和，求 n．

【题说】 1976 年美国纽约数学竞赛题 7．

【解】 设 $s_1=k+(k+1)+\cdots+[k+(n-1)]=nk+\frac{n(n-1)}{2}$

$$s_2=(k+n)+\cdots+(k+2n)=nk+n^2+\frac{n(n-1)}{2}$$

$$s_2-s_1=n^2=100$$

从而求得 n＝10．

A2－004 设 a 和 b 为正整数，当 a^2+b^2 被 a＋b 除时，商是 q 而余数是 r，试求出所有数对（a，b），使得 $q^2+r=1977$．

【题说】 第十九届（1977 年）国际数学奥林匹克题 5．本题由原联邦德国提供．

【解】 由题设$a^2+b^2=q(a+b)+r\ (0\leq r<a+b)$，$q^2+r=1977$，所以 $q2\leq 1977$，从而$q\leq 44$．

若$q\leq 43$，则$r=1977-q^2\geq 1977-43^2=128$．

又 $$\frac{1}{2}(a+b)^2\leq a^2+b^2=q(a+b)+r\leq 44(a+b)$$

即$(a+b)\leq 88$，与$(a+b)>r\geq 128$，矛盾．

因此，只能有$q=44$，$r=41$，从而得

$$a^2+b^2=44(a+b)+41$$

$$(a-22)^2+(b-22)^2=1009$$

不妨设$|a-22|\geq|b-22|$，则$1009\geq(a-22)^2\geq 504$，从而$45\leq a\leq 53$．

经验算得两组解：$a=50$，$b=37$及$a=50$，$b=7$．

由对称性，还有两组解$a=37$，$b=50$；$a=7$，$b=50$．

A2－005 数1978^n与1978^m的最后三位数相等，试求出正整数 n 和 m，使得$m+n$取最小值，这里$n>m\geq 1$．

【题说】 第二十届（1978 年）国际数学奥林匹克题 1．本题由古巴提供．

【解】 由题设

$1978^n-1978^m=1978^m(1978^{n-m}-1)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 1000)$

因而

$$1978^m\equiv 2^m\times 989^m\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 8),\quad m\geq 3$$

又

$$1978^{n-m}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 125)$$

而 $1978^{n-m}=(1975+3)^{n-m}$

$$\equiv 3^{n-m}+(n-m)3^{n-m-1}\cdot 1975\ (\mathrm{mod}\ 125)\quad (1)$$

从而$3^{n-m}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 5)$，于是$n-m$是 4 的倍数．

设$n-m=4k$，则

$$3^{n-m}=81^k\equiv 1+80^k+\frac{k(k-1)}{2}80^2\ (\mathrm{mod}\ 125)$$

代入（1）得

$$1\equiv 1978^{4k}\equiv 1+80k+\frac{k(k-1)}{2}\cdot 80^2+4k\cdot 1975\ (\mathrm{mod}\ 125)$$

从而

$$k(20k+3)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 25)$$

因此 k 必须是 25 的倍数，$n-m$至少等于$4\times 25=100$，于是$m+n$的最小值为

$$n-m+2m=106,\ m=3,\ n=103$$

A2－006 求方程 $x^3+x^2y+xy^2+y^3=8(x^2+xy+y^2+1)$的全部整数解 x、y．

【题说】1980 年卢森堡等五国国际数学竞赛题 6.本题由荷兰提供．

【解】 设 $$\left.\begin{array}{l}x+y=u\\ xy=v\end{array}\right\}\qquad (1)$$

于是 $x^3+x^2y+xy^2+y^3=(x+y)^3-2xy(x+y)=u^3-2vu$

$$x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy=u^2-v$$

从而原方程变为

$$2v(u-4)=u^3-8u^2-8 \quad (2)$$

因 $u\neq4$，故（2）即为

$$2u=(u-4)^2+4(u-4)-16-\frac{72}{u-4} \quad (3)$$

根据已知，$u-4$ 必整除 72，所以只能有

$$u-4=\pm2^{\alpha}3^{\beta}，其中\alpha=0，1，2，3；\beta=0，1，2$$

进一步计算可知只有 $u-4=2\cdot3=6$，于是

$$u=10，v=16$$

即
$$\begin{cases}x+y=10\\xy=16\end{cases}$$

从而 $\begin{cases}x=8\\y=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2\\y=8\end{cases}$.

A2－007 确定 m^2+n^2 的最大值，这里 m 和 n 是整数，满足 $m，n\in\{1，2，\cdots，1981\}$，$(n^2-mn-m^2)^2=1$.

【题说】 第二十二届（1981 年）国际数学奥林匹克题 3.

【解】 若 $m=n$，由 $(n^2-mn-m^2)^2=1$ 得 $(mn)^2=1$，故 $m=n=1$.

若 $m\neq n$，则由 $n^2-mn-m^2=\pm1$ 得 $n>m$. 令 $n=m+u_k$，于是

$$[(m+u_k)^2-m(m+u_k)-m^2]^2=1$$

化简得 $(m^2-u_km-u_k^2)^2=1$，从而 $m>u_k$. 再令 $m-u_k+u_{k-1}$，于是有

$$(u_k^2-u_{k-1}u_k-u_{k-1}^2)^2=1$$

若 $u_k\neq u_{k-1}$，则以上步骤可以继续下去，直至

$$(u_{k-l-1}^2-u_{k-l-1}-u_{k-l}^2)^2=1，且u_{k-l-1}=1$$

从而得到数列：

$$n，m，u_k，u_{k-1}，\cdots，u_{k-l}，u_{k-l-1}$$

此数列任意相邻三项皆满足 $u_i=u_{i-1}+u_{i-2}$，这恰好是斐波那契型数列.

而{1，2，…，1981}中斐氏数为：1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，233，377，610，987，1597，可见 $m=987$，$n=1597$ 时，$m^2+n^2=3524578$ 为满足条件的最大值.

A2－008 求方程 $w!=x!+y!+z!$ 的所有正整数解.

【题说】 第十五届（1983 年）加拿大数学奥林匹克题 1.

【解】 不妨设 $x\leq y\leq z$. 显然 $w\geq z+1$，因此

$$(z+1)!\leq w!=x!+y!+z!\leq3\cdot z!$$

从而 $z\leq2$. 通过计算知 $x=y=z=2$，$w=3$ 是原方程的唯一解.

A2－009 求满足下式的所有整数 n，m：

$$n^2+(n+1)^2=m^4+(m+1)^4$$

【题说】 1984 年匈牙利阿拉尼·丹尼尔数学竞赛（15 年龄组）题 1.

【解】 由原式得

$$n(n+1)=m(m+1)(m^2+m+2)$$

设 $m^2+m=k$，我们有 $n(n+1)=k(k+2)$. 显然，只可能两边为零. 解是（0，0），（0，−1），（−1，0），（−1，1）.

A1－010 前 1000 个正整数中可以表示成[2x]＋[4x]＋[6x]＋[8x]的正整数有多少个？

【题说】 第三届（1985 年）美国数学邀请赛题 10．

【解】 令 f（x）＝[2x]＋[4x]＋[6x]＋[8x]．

当x在（0，1）中变化时，f（x）值在12个“关节点”：$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{3}{8}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{5}{8}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{5}{6}$，$\frac{7}{8}$及1改变，所以f（x）在1～20中取12个不同的正整数值．

另一方面 f（x＋n）＝f（x）＋20n 对任一正整数 n 成立．将 1－1000 分为 50 段，每 20 个为 1 段．每段中，f（x）可取 12 个值．故总共可取到50×12＝600个值,亦即在前1000个正整数中有600个可以表示成[2x]＋[4x]＋[6x]＋[8x]的形式．

A2－011 使 n^3＋100 能被 n＋10 整除的正整数 n 的最大值是多少？

【题说】 第四届（1986 年）美国数学邀请赛题 5．

【解】 由 n^3＋100＝（n＋10）（n^2－10n＋100）－900 知，若 n^3＋100 被 n＋10 整除，则 900 也应被 n＋10 整除．因此，n 最大值是 890．

A2－012 a、b、c、d 为两两不同的正整数，并且

$$a+b=cd，ab=c+d$$

求出所有满足上述要求的四元数组 a、b、c、d．

【题说】 1987 年匈牙利数学奥林匹克题 1．

【解】 由于 a≠b，所以当且仅当 a＝1 或 b＝1 时，才有 a＋b≥ab．

如果 a、b 都不是 1，那么

$$c+d=ab>a+b=cd$$

由此知 c＝1 或 d＝1．

因此 a、b、c、d 中总有一个（也只有一个）为 1．如果 a＝1，那么由消去 b 可以推出

$$\frac{1}{cd}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$$

从而得到 c＝2，d＝3，或者 c＝3，d＝2．

这样，本题的答案可以列成下表

a	1	1	5	5	2	3	2	3
b	5	5	1	1	3	2	3	2
c	3	2	3	2	1	1	5	5
d	2	3	2	3	5	5	1	1

A2－013 设[r，s]表示正整数 r 和 s 的最小公倍数，求有序三元正整数组（a，b，c）的个数，其中[a，b]＝1000，[b，c]＝2000，[c，a]＝2000．

【题说】 第五届（1987 年）美国数学邀请赛题 7．

【解】 显然，a、b、c 都是形如 $2^m\cdot5^n$ 的数．设 $a=2^{m_1}\cdot5^{n_1}$，$b=2^{m_2}\cdot5^{n_2}$，$c=2^{m_3}\cdot5^{n_3}$．

由[a，b]＝1000＝$2^3\cdot5^3$，知 max（m_1，m_2）＝3，max（n_1，n_2）＝3．同

理，max（m_2，m_3）＝4，max（n_2，n_3）＝3；max（m_1，m_3）＝4，max（n_1，n_3）＝3．

由此，知 m_3 应是 4，m_1、m_2 中必有一是 3．另一个可以是 0、1、2 或 3 之任一种，因此 m_1、m_2 的取法有 7 种．又，n_1、n_2、n_3 中必有两个是 3，另一个可以是 0、1、2 或 3．因此 n_1、n_2、n_3 取法有 10 种．故 m_i、n_i（i＝1、2、3）不同取法共有 7×10＝70 种，即三元组共有 70 个．

A2－014 设 m 的立方根是一个形如 n＋r 的数，这里 n 为正整数，r 为小于 1/1000 的正实数．当 m 是满足上述条件的最小正整数时，求 n 的值．

【题说】 第五届（1987 年）美国数学邀请赛题 12．

【解】 已知$\sqrt[3]{m}=n+r<n+10^{-3}$，所以

$$m=n^3+1<(n+10^{-3})^3$$
$$=n^3+3n^2\cdot 10^{-3}+3n\cdot 10^{-6}+10^{-9}$$

于是

$$n^2+n\cdot 10^{-3}+3\cdot 10^{-6}>\frac{1000}{3}>18^2+2$$

从而 n＝19（此时 $m=19^3+1$ 为最小）．

A2－015 求出使数$\underbrace{144\cdots4}_{n个}$为自然数的平方的一切n值．

【题说】 第十三届（1987 年）全俄数学奥林匹克九年级题 1．

【解】 $144=12^2$，$1444=38^2$

设 n＞3，则

$$\underbrace{144\cdots4}_{n个}=k^2\quad(k\in N)$$

则 k 必是一个偶数．所以

$$36\underbrace{11\cdots1}_{(n-2)个}=\underbrace{144\cdots4}_{n个}\div 4=(k/2)^2$$

也是一个自然数的完全平方，但这是不可能的．因为平方数除以 4，余数为0或1，而$36\underbrace{11\cdots1}_{(n-2)个}$除以4余3．

因此，本题答案为 n＝2，3．

A2－016 当 n 是怎样的最小自然数时，方程$[10^n/x]=1989$有整数解？

【题说】 第二十三届（1989 年）全苏数学奥林匹克十年级题 1．

【解】 $1989\le 10^n/x<1990$

所以

$$10^n/1990<x\le 10^n/1989$$

即

$$10^n\cdot 0.000502512\cdots<x\le 10^n\cdot 0.000502765\cdots$$

所以 n＝7，这时 x＝5026 与 5027 是解．

A2－017 设 $a_n=50+n^2$，n＝1，2，…．对每个 n，a_n 与 a_{n+1} 的最大公约数记为 d_n．求 d_n 的最大值．

【题说】 1990年日本第1轮选拔赛题 9．

【解】

$$d_n=(a_n, a_n+1)$$
$$=(50+n^2, 50+(n+1)^2-(50+n^2))$$
$$=(50+n^2, 2n+1)$$
$$=(2(n^2+50), 2n+1)\text{（因 }2n+1\text{ 是奇数）}$$
$$=(2(n^2+50)-n(2n+1), 2n+1)$$
$$=(100-n, 2n+1)$$
$$=(100-n, 2n+1+2(100-n))$$
$$=(100-n, 201)\leq 201$$

在 $n=100\neq 201k$（$k\in N$）时，$d_n=201$．

故所求值为201．

A2－018 n是满足下列条件的最小正整数：

（1）n是75的倍数；

（2）n恰为 75个正整数因子（包括1及本身）．试求n/75．

【题说】 第八届（1990年）美国数学邀请赛题5．

【解】 为保证 n是75的倍数而又尽可能地小，可设 $n=2^\alpha\cdot 3^\beta\cdot 5^\gamma$，其中 $\alpha\geq 0$，$\beta\geq 1$，$\gamma\geq 2$，并且

$$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=75$$

由 $75=5^2\cdot 3$，易知当 $\alpha=\beta=4$，$\gamma=2$ 时，符合条件（1）、（2）．此时 $n=2^4\cdot 3^4\cdot 5^2$，$n/75=432$．

A2－019 1．求出两个自然数x、y，使得xy＋x和xy＋y分别是不同的自然数的平方．

2．能否在988至1991范围内求到这样的x和y？

【题说】 第二十五届（1991年）全苏数学奥林匹克九年级题5．

【解】 1．例如x＝1，y＝8即满足要求．

2．假设

$$988\leq x<y\leq 1991$$

x、$y\in N$，使得 $xy+x$ 与 $xy+y$ 是不同的自然数的平方，则

$$x^2<xy+x<xy+y$$

这时

$$y-x=(xy+y)-(xy+x)$$
$$>(x+1)^2-x^2=2x+1$$

即

$$y>3x+1$$

由此得

$$1991\geq y>3x+1\geq 3\times 998+1$$

矛盾！故在988与1991之间不存在这样的自然数x、y．

A2－020 求所有自然数n，使得

$$\min_{k\in N}\left(k^2+\left[\frac{n}{k^2}\right]\right)=1991$$

这里 $[n/k^2]$ 表示不超过 n/k^2 的最大整数，N是自然数集．

【题说】 1991年中国数学奥林匹克题 5．

【解】 题给条件等价于，对一切 $k\in N$，

$$k^2+n/k^2\geq 1991 \quad (1)$$

且存在 $k\in N$，使得 $k^2+n/k^2<1992$．(2)

(1) 等价于对一切 $k\in N$，

$$k^4-1991k^2+n\geq 0$$

即 $$(k^2-1991/2)^2+n-1991^2/4\geq 0 \quad (3)$$

因 $[\sqrt{1991/2}]=31$，而 $31^2-1991/2=-69/2$，$32^2-1991/2=57/2$，故 (3) 式左边在 k 取 32 时最小，因此 (1) 等价于

$$n\geq 1991\times 32^2-32^4=1024\times 967$$

又，(2) 等价于存在 $k\in N$，使

$$(k^2-996)^2+n-996^2<0$$

上式左边也在 $k=32$ 时最小，故 (2) 等价于

$$n<1992\times 32^2-32^4=1024\times 968$$

故 n 为满足

$$1024\times 967\leq n\leq 1024\times 967+1023$$

的一切整数．

A2－021 设 n 是固定的正整数，求出满足下述性质的所有正整数的和：在二进制的数字表示中，正好是由 2n 个数字组成，其中有 n 个 1 和 n 个 0，但首位数字不是 0．

【题说】 第二十三届（1991 年）加拿大数学奥林匹克题 2．

【解】 $n=1$，易知所求和 $S_1=2$．

$n\geq 2$ 时，首位数字为 1 的 2n 位数，在其余 $2n-1$ 位上，只要 n 个 0 的位置确定了．则 $n-1$ 个 1 的位置也就确定了，从而这个 2n 位二进制数也随之确定．

故首位数字为1的数共 C_{2n-1}^{n} 个．

现考虑第 k（$2n>k\geq 1$）位数字是 1 的数的个数．因为其中 n 个 0 的位置只可从 $2n-2$ 个位置（除去首位和第 k 位）中选择，故这样的数共 C_{2n-2}^{n} 个．

将所有这样的 2n 位二进制数相加，按数位求和，便有

$$S_n=2^{2n-1}C_{2n-1}^{n}+(1+2+\cdots+2^{2n-2})C_{2n-2}^{n}$$

A2－022 在{1000，1001，1002，…，2000}中有多少对相邻的数满足下列条件：每对中的两数相加时不需要进位？

【题说】 第十届（1992 年）美国数学邀请赛题 6．

【解】 设n的十进表达式是 $\overline{1abc}$ 如果 a、b、c 中的一个是 5、6、7 或 8 时，则当 n 和 $n+1$ 相加时将发生进位．再若 $b=9$ 而 $c\neq 9$；$a=9$ 而 $b\neq 9$ 或 $c\neq 9$．则当 n 和 $n+1$ 相加时也将发生进位．

如果不是上面描述的数，则 n 有如下形式

$$\overline{1abc}，\overline{1ab9}，\overline{1a99}，\overline{1999}$$

其中 a，b，$c\in\{0，1，2，3，4\}$．对这种形式的 n，当 n 和 $n+1$ 相加时不会发生进位，所以共有

$$5^3+5^2+5+1=156$$

个这样的 n．

A2－023 定义一个正整数 n 是一个阶乘的“尾”，如果存在一个正整数 m，使得 m！的十进位制表示中，结尾恰好有 n 个零，那么小于 1992 的正整数中有多少个不是阶乘的尾？

【题说】 第十届（1992 年）美国数学邀请赛题 15．

【解】 设 f（m）为 m！的尾．则 f（m）是 m 的不减函数，且当 m 是 5 的倍数时，有

$$f(m)=f(m+1)=f(m+2)=f(m+3)=f(m+4)<f(m+5)$$

因此，从 f（0）＝0 开始，f（m）依次取值为：

0，0，0，0，0；1，1，1，1，1；2，2，2，2，2；3，3，3，3，3；4，4，4，4，4；6，6，6，6，6；…；1991，1991，1991，1991，1991

容易看出

$$f(m)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{m}{5^k}\right) \qquad (1)$$

如果存在 m 使 f（m）＝1991，则

$$1991<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{m}{5^k}=m\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{m}{4}$$

因而 m＞4×1991＝7964．由公式（1）可计算出 f（7965）＝1988，从而 f（7975）＝1991．

在序列（1）中共有 7980 项，不同的值有 7980/5＝1596 个．所以在{0，1，2，…，1991}中，有 1992－1596＝396 个值不在（1）中出现．这就说明，有 396 个正整数不是阶乘的尾．

A2－024 数列$\{a_n\}$定义如下：$a_0=1$，$a_1=2$，$a_{n+2}=a_n+(a_{n+1})^2$．求 a_{1992} 除以 7 所得的余数．

【题说】 1992 年日本数学奥林匹克预选赛题 1．

【解】 考虑 a_n 以 7 为模的同余式：

$a_0=1\equiv1 \pmod 7$

$a_1=2\equiv2 \pmod 7$

$a_1=1+2^2=5\equiv-2 \pmod 7$

$a_3\equiv2+(-2)^2=6\equiv-1 \pmod 7$

$a_4\equiv-2+(-1)^2=-1 \pmod 7$

$a_5\equiv-1+(-1)^2=0 \pmod 7$

$a_6\equiv-1+0^2=-1 \pmod 7$

$a_7\equiv0+(-1)^2=1 \pmod 7$

$a_8\equiv-1+1^2=0 \pmod 7$

$a_9\equiv1+0^2=1 \pmod 7$

$a_{10}\equiv0+1^2=1 \pmod 7$

$a_{11}\equiv1+1^2=2 \pmod 7$

所以，a_n 除以 7 的余数以 10 为周期，故 $a_{1992}\equiv a_2\equiv5 \pmod 7$．

A2－025 求所有的正整数 n，满足等式

$$S(n)=S(2n)=S(3n)=\cdots=S(n^2)$$

其中 $S(x)$ 表示十进制正整数 x 的各位数字和．

【题说】 1992 年捷克和斯洛伐克数学奥林匹克（最后一轮）题 3．

【解】 显然，$n=1$ 满足要求．

由于对正整数 x，有 $S(x)\equiv x \pmod 9$，故当 $n>1$ 时，有

$$n\equiv S(n)\equiv S(2n)\equiv 2n \pmod 9$$

所以 $9|n$．

若 n 是一位数，则 $n=9$，又 $S(9)=S(2\times 9)=S(3\times 9)=\cdots=S(9^2)=9$，故 9 满足要求．

设 $n=\overline{a_1a_2\cdots a_{k+1}}$ 是 $k+1$（$k\geq 1$）位数，则

$$10^k\leq n<10^{k+1}$$

又 $9\nmid 10k$，故

$$10^k+1\leq n<10^{k+1}$$

若 $n<10^k+10^{k-1}+\cdots+10+1$，则

$$S((10^k+1)n)=S((10^k+1)\overline{a_1a_2\cdots a_{k+1}})$$
$$>S(\overline{a_1a_2\cdots a_{k+1}})=S(n)$$

与已知矛盾，从而

$$n\geq 10^k+10^{k-1}+\cdots+10+1 \quad (1)$$

令 $n=9m$．设 m 的位数为 l（$k\leq l\leq k+1$），$m-1=\overline{b_1b_2\cdots b_l}$．则由（1）及已知

$$S(n)=S((10^k+10^{k-1}+\cdots+10+1)n)$$
$$=S((10^{k+1}-1)m)$$
$$=S(10^{k+1}(m-1)+(10^{k+1}-10^l)+(10^l-m))$$
$$=S(\overline{b_1b_2\cdots b_l99\cdots 9c_1c_2\cdots c_l})$$

其中 9 有 $k+1-l$ 个，$b_i+c_i=9$，$i=1,2,\cdots,l$．

所以

$$S(n)=9(k+1) \qquad (2)$$

由于 n 是 $k+1$ 位数，所以 $n=99\cdots 9=10^{k+1}-1$．

另一方面，当 $n=99\cdots 9=10^{k+1}-1$ 时，$S(n)=S(2n)=S(3n)=\cdots=S(n^2)$．

综上所述，满足要求的正整数为 $n=1$ 及 $n=10^k-1$（$k\geq 1$）．

A2－026 求最大正整数 k，使得 $3^k|(2^{3^m}+1)$，其中 m 为任意正整数．

【题说】 1992 年友谊杯国际数学竞赛十、十一年级题 2．

【解】 当 $m=1$ 时，$2^{3^m}+1=9$，故 $k\leq 2$．又由于

$$2^{3^m}+1=(2^3)^{3^{m-1}}+1$$
$$\equiv(-1)^{3^{m-1}}+1 \pmod 9$$
$$=0$$

所以，对任意正整数 m，$9|(2^{3^m}+1)$．即所求 k 的值为 2．

A2－027　试求正整数$\left[\frac{10^{93}}{10^{31}+3}\right]$的末两位数字；$[x]$表示不超过$x$的最大整数．

【题说】 1993年全国联赛一试题2（4），原是填空题．

【解】 因为 $10^{93}+3^3=(10^{31})^3+3^3$

$=(10^{31}+3)((10^{31})^2-3\times10^{31}+3^2)$

从而　原式$=((10^{31})^2-3\times10^{31}+9)+\left[\frac{-3^3}{10^{31}+3}\right]$

$=(10^{31})(10^{31}-3)+9-1$

它的个位数字是8，十位数字是0．

A2－028 试求所有满足如下性质的四元实数组：组中的任一数都等于其余三个数中某两个数的乘积．

【题说】 第十九届（1993年）全俄数学奥林匹克十一年级二试题5．

【解】 设这组数的绝对值为$a\le b\le c\le d$．无论a为b，c，d哪两个数的乘积，均有$a\ge bc$，类似地，$d\le bc$．从而，$bc\le a\le b\le c\le d\le bc$，即$a=b=c=d=a^2$．所以$a=0$或1，不难验证，如果组中有负数，则负数的个数为2或3．

所以，答案为{0，0，0，0}，{1，1，1，1}，{－1，－1，1，1}，{－1，－1，－1，1}．

A2－029 对任意的实数x，函数$f(x)$有性质$f(x)+f(x-1)=x^2$．如果$f(19)=94$，那么$f(94)$除以1000的余数是多少？

【题说】 第十二届（1994年）美国数学邀请赛题3．

【解】 重复使用$f(x)=x^2-f(x-1)$，有

$$\begin{aligned}f(94)&=94^2-f(93)\\&=94^2-93^2+f(92)\\&=94^2-93^2+92^2-f(91)\\&=\cdots\\&=94^2-93^2+92^2-\cdots+20^2-f(19)\\&=(94+93)(94-93)+(92+91)(92-91)+\cdots+(22+21)(22-21)+20^2-94\\&=(94+93+92+\cdots+21)+306\\&=\frac{94+21}{2}\times74+306\\&=4561\end{aligned}$$

因此，$f(94)$除以1000的余数是561．

A2－030 对实数x，$[x]$表示x的整数部分，求使$[\log_2 1]+[\log_2 2]+[\log_2 3]+\cdots+[\log_2 n]=1994$成立的正整数$n$．

【题说】 第十二届（1994年）美国数学邀请赛题 4．

【解】 $[\mathrm{long}_2 1]+[\log_2 2]+[\log_2 3]+\cdots+[\log_2 128]+[\log_2 129]+\cdots+[\log_2 255]=2\times1+4\times2+8\times3+16\times4+32\times5+64\times6+128\times7=1538$．

于是 $n=255+\frac{1994-1538}{8}=312$.

A2－031 对给定的一个正整数 n．设 p（n）表示 n 的各位上的非零数字乘积（如果 n 只有一位数字，那么 p（n）等于那个数字）．若 S＝p（1）＋p（2）＋p（3）＋…＋p（999），则 S 的最大素因子是多少？

【题说】 第十二届（1994 年）美国数学邀请赛题 5．

【解】 将每个小于 1000 的正整数作为三位数，（若位数小于 3，则前面补 0，如 25 可写成 025），所有这样的正整数各位数字乘积的和是

$(0\cdot0\cdot0+0\cdot0\cdot1+0\cdot0\cdot2+\cdots+9\cdot9\cdot8+9\cdot9\cdot9)-0\cdot0\cdot0$

$=(0+1+2+\cdots+9)^3-0$

p（n）是 n 的非零数字的乘积，这个乘积的和可以由上面表达式将 0 换成 1 而得到．

因此，

$$\sum_{n=1}^{999} p(n)=(1+1+2+\cdots+9)^3=1$$

$$=46^3-1=3^3\cdot5\cdot7\cdot103$$

最大的素因子是 103．

A2－032 求所有不相同的素数 p、q、r 和 s，使得它们的和仍是素数，并且 p^2+qs 及 p^2+qr 都是平方数．

【题说】 第二十届（1994 年）全俄数学奥林匹克九年级题 7．

【解】 因为四个奇素数之和是大于 2 的偶数，所以所求的素数中必有一个为偶数 2．

若 $p\neq2$，则 p^2+qs 或 p^2+qr 中有一个形如 $(2k+1)^2+2(2l+1)=4(k^2+k+l)+3$，这是不可能的，因为奇数的平方除以 4 的余数是 1，所以 p＝2．

设 $2^2+qs=a^2$，则 $qs=(a+2)(a-2)$．

若 a－2＝1，则 qs＝5，因为 q、s 是奇素数，所以上式是不可能的．于是只能是

$$q=a-2,\quad s=a+2$$

或者

$$q=a+2,\ s=a-2$$

所以 s＝q－4 或 q＋4．同理 r＝q－4 或 q＋4．

三个数 q－4、q、q＋4 被 3 除，余数各不相同，因此其中必有一个被 3 整除．q 或 q＋4 为 3 时，都导致矛盾，所以只能是 q－4＝3．于是

$$(p,q,r,s)=(2,7,3,11)\text{ 或 }(2,7,11,3)$$

A2－033 求所有这样的素数，它既是两个素数之和，同时又是两个素数之差．

【题说】 第二十届（1994 年）全俄数学奥林匹克十年级题 5．

【解】 设所求的素数为 p，因它是两素数之和，故 p＞2，从而 p 是奇数．因此，和为 p 的两个素数中有一个是 2，同时差为 p 的两个素数中，减数也是 2，即 p＝q＋2，p＝r－2，其中 q、r 为素数．于是 p－2、p、p＋2 均为素数．在三个连续的奇数中必有一数被 3 整除，因这数为素数，故必为 3．不难验证只有 p－2＝3，p＝5，p＋2＝7 时，才满足条件．所以所求的素数是 5．

A2－034　求出所有的有序正整数对（m，n），使得$\frac{n^3+1}{mn-1}$是一个整数．

【题说】　第三十五届（1994年）国际数学奥林匹克题4．本题由澳大利亚提供．

【解】　$n^3+1=n^3+mn-(mn-1)$，所以$mn-1|n(n^2+m)$．因为$(mn-1, n)=1$，所以$mn-1|n^2+m$．又$n(m^2+n)-(n^2+m)=m(mn-1)$，

所以$mn-1|m^2+n$．因此m，n对称，不妨设$m\geq n$．

当$n=1$时，$mn-1=m-1|n^3+1=2$，从而$m=2$或3，以下设$n\geq 2$．

若$m=n$，则$n^2-1|(n^3+1)=(n^3-n)+(n+1)$，从而$n^2-1|(n+1)$，$m=n=2$．

若$m>n$，则由于

$$2(mn-1)\geq n^2+mn+n-2\geq n^2+2m>n^2+m$$

所以$mn-1=n^2+m$，即

$$(m-n-1)(n-1)=2$$

从而

$$\begin{cases}n=2, 3\\ m=5, 5\end{cases}$$

于是本题答案为

$(m, n)=(2, 1)$，$(3, 1)$，$(1, 2)$，$(2, 2)$，$(5, 2)$，$(1, 3)$，$(5, 3)$，$(3, 5)$，$(2, 5)$共九组．

A2－035　设$(1+\sin t)(1+\cos t)=\frac{5}{4}$，$(1-\sin t)(1-\cos t)=\frac{m}{n}-\sqrt{k}$，其中k、m、n为正整数，m、n互素．求$k+m+n$．

【题说】　第十三届（1995年）美国数学邀请赛题7．

【解】　由已知得

$$1+\sin t+\cos t+\sin t\cos t=\frac{5}{4}$$

即

$$(\sin t+\cos t)^2+2(\sin t+\cos t)=\frac{3}{2}$$

从而（因为$\sin t+\cos t\geq -2>-\sqrt{\frac{5}{2}}-1$）

$$\sin t+\cos t=\sqrt{\frac{5}{2}}-1$$

所以

$$\frac{5}{4}-\left(\frac{m}{n}-\sqrt{k}\right)=2(\sin t+\cos t)=2\left(\sqrt{\frac{5}{2}}-1\right)=\sqrt{10}-2$$

从而$k=10$，$\frac{m}{n}=\frac{13}{4}$，$k+m+n=10+13+4=27$．

A2－036　一个正整数不是42的正整数倍与合数之和．这个数最大

是多少？

【题说】 第十三届（1995 年）美国数学邀请赛题 10．

【解】 设这数为 42n＋p，其中 n 为非负整数，p 为小于 42 的素数或 1．

由于 2×42＋1，42＋2，42＋3，42×5＋5，42＋7，2×42＋11，42＋13，4×42＋17，3×42＋19，42＋23，3×42＋29，2×42＋31，4×42＋37，2×42＋41，都是合数，所以在 n≥5 时，42n＋p 都可表成 42 的正整数倍与合数之和，只有 42×5＋5 例外．因此，所求的数就是 42×5＋5＝215．

A2－037 p为奇素数，求正整数x、y使$x\le y$并且$\sqrt{2p}-\sqrt{x}-\sqrt{y}$非负、值尽可能小．

【题说】 第三十六届（1995 年）IMO 预选题．

【解】 p 以改为无平方因子的大于 1 的奇数．

首先$\sqrt{2p}-\sqrt{x}-\sqrt{y}\neq 0$，否则$\sqrt{2p}-\sqrt{x}=\sqrt{y}$，平方并化简得$\sqrt{2px}$为有理数，从而$p$是$x$的素因数，$x\ge 2p$，$\sqrt{x}+\sqrt{y}>\sqrt{2p}$．

于是$\sqrt{x}+\sqrt{y}<\sqrt{2p}$．

$$\begin{aligned}&(\sqrt{2p})^2-(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2\\&=2p-x-y-2\sqrt{xy}\\&=\frac{(2p-x-y)^2-4xy}{2p-x-y+2\sqrt{xy}}\end{aligned}\qquad(1)$$

若（2p－x－y）^{2}－4xy≥2，则

$$(1)\ge\frac{2}{2p}=\frac{1}{p}>\frac{1}{p+\sqrt{p^2-1}}$$

若（2p－x－y）^{2}－4xy＝1，则由于

$$4\le\sqrt{xy}\ (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2<2p$$

$$xy<\frac{p^2}{4}$$

从而

$$xy\le\frac{p^2-1}{4}$$

所以

$$\begin{aligned}(1)&\ge\frac{1}{\sqrt{1+4xy}+2\sqrt{xy}}\\&\ge\frac{1}{\sqrt{p^2}+\sqrt{p^2-1}}\\&=\frac{1}{p+\sqrt{p^2-1}}\end{aligned}$$

总之 $(\sqrt{2p})^2-(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2\geq\frac{1}{p+\sqrt{p-1}}$

$$=(\sqrt{2p})^2-\left(\sqrt{\frac{p-1}{2}}+\sqrt{\frac{p+1}{2}}\right)^2$$

从而

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}\leq\sqrt{\frac{p-1}{2}}+\sqrt{\frac{p+1}{2}}<\sqrt{2p}$$

等号仅在 $x=\frac{p-1}{2}$，$y=\frac{p+1}{2}$ 时成立．

因此，$x=\frac{p-1}{2}$，$y=\frac{p+1}{2}$ 是使 $\sqrt{2p}-\sqrt{x}-\sqrt{y}$ 为最小的非负值．

A2－038 求所有正整数 x、y，使得 $x+y^2+z^3=xyz$，这里 z 是 x、y 的最大公约数．

【题说】 第三十六届（1995 年）IMO 预选题．

【解】 由原方程及 y^2、z^3、xyz 均被 z^2 整除得出 $z^2|x$．设 $x=az^2$，$y=bz$，则原方程化为

$$a+b^2+z=abz^2 \quad (1)$$

由 b^2、abz^2 被 b 整除得 $b|(a+z)$．于是 $b\leq a+z$．

$$\begin{aligned}&a+z+b^2=abz^2\\&=(a+z)b+(a+z)b+b((z^2-2)a-2z)\\&\geq a+z+b^2+b((z^2-2)a-2z) \quad (2)\end{aligned}$$

（2）中不等式的等号只在 b＝1 并且 b＝a＋z 时成立，而这种情况不可能出现（a＋z＞1），所以（2）是严格的不等式．这表明

$$(z^2-2)a-2Z<0 \quad (3)$$

从而 $z\leq2$（否则（3）的左边 $\geq z^2-2-2z\geq z-2>0$）．

在 z＝2 时，2a－2z＜0，即 a＝1，代入（1）得 b＝1 或 3，从而 x＝4，y＝2 或 6．

在 z＝1 时，（1）成为

$$a+b^2+1=ab \quad (4)$$

从而

$$(a-b)(b-1)=b+1=(b-1)+2$$

这表明 $(b-1)|2$，b＝2 或 3．代入（4）得 a＝5．于是 x＝5，y＝2 或 3．

因此本题共有四组解：（x，y）＝（4，2），（4，6），（5，2），（5，3）．

A2－039 设 m、n∈N，（m，n）＝1．求 $(5^m+7^m, 5^n+7^n)$．其中（m，n）表示 m、n 的最大公约数．

【题说】 1996 年日本数学奥林匹克题 2．

【解】 记 $H(m,n)=(5^m+7^m,5^n+7^n)$．

则

$$H(0,1)=(2,12)=2$$
$$H(1,1)=(12,12)=12$$

因 H（m，n）＝H（n，m），故可设 $n\geq m$．

当 $n\geq 2m$ 时，

$$(5^m+7^m,\ 5^n+7^n)$$
$$=(5^m+7^m,\ (5^m+7^m)(5^{n-m}+7^{n-m})-5^m7^m(5^{n-2m}+7^{n-2m}))$$
$$=(5^m+7^m,\ 5^m7^m(5^{n-2m}+7^{n-2m}))$$
$$=(5^m+7^m,\ 5^{n-2m}+7^{n-2m})$$

当 $m\leq n<2m$ 时，

$$(5^m+7^m,\ 5^n+7^n)$$
$$=(5^m+7^m,\ (5^m+7^m)(5^{n-m}+7^{n-m})-5^{n-m}7^{n-m}(5^{2m-n}+7^{2m-n}))$$
$$=(5^m+7^m,\ 5^{2m-n}+7^{2m-n})$$

记

在△ADE中，$c=2b\cdot\sin\alpha=2b\cdot\sin\dfrac{\pi}{14}$　　　　(3)

则

(1) $H(m',n')=H(m,n)$；

(2) $m'+n'\equiv m+n\pmod 2$；

(3) $(m',n')=(m,n)$．

当 $(m,n)=1$ 时，反复进行上面的操作，最后必有 $(m',n')=(1,0)$ 或 $(m',n')=(1,1)$．从而有

$$(5^m+7^m,\ 5^n+7^n)=\begin{cases}2，当m+n为奇数时\\12，当m+n为偶数时\end{cases}$$

A2－040 求下列方程的正整数解：

$$(a,b)+[a,b]+a+b=ab$$

其中 $a\geq b$，$[a,b]$、(a,b) 分别表示 a 与 b 的最小公倍数与最大公因数．

【题说】 1996 年日本数学奥林匹克预选赛题 7．

【解】 记 $(a,b)=d$，$a=da'$，$b=db'$，则 $[a,b]=da'b'$．题设条件变为

$$1+a'+b'+a'b'=da'b' \qquad (*)$$

所以

$$d=\frac{1+a'+b'+a'b'}{a'b'}=\left(1+\frac{1}{a'}\right)\left(1+\frac{1}{b'}\right)$$

故 $1<d\leq 4$．

当 $d=4$ 时，$a'=b'=1$，从而 $a=b=4$；

当 $d=3$ 时，(*) 等价于

$$(2a'-1)(2b'-1)=3$$

由 $a'\geq b'$ 得 $a'=2$，$b'-1$．故 $a=6$，$b=3$．

当 $d=2$ 时，(*) 等价于

$$(a'-1)(b'-1)=2$$

由 $a'\geq b'$ 得 $a'=3$，$b'=2$．从而 $a=6$，$b=4$．

综上所述，所求的正整数解有 4，4；6，4；6，3．

A2－041 一个幻方中，每一行，每一列及每一对角线上的三个数之

和有相同的值．图示一个幻方中的四个数，求 x．

【题说】 第十四届（1996 年）美国数学邀请赛题 1．

【解】 幻方中两条对角线的和与第二列的和都为同一值 s，这 3s 也是第一行的和加上第二行的和，再加上中央一数的 3 倍．所以中央的数为$\frac{s}{3}$．

x	19	96
1		

左下角的数为 19＋96－1＝114．因此

$$\frac{s}{3}=(96+114)\div 2=105$$

$$x=3\times 105-19-96=200$$

A2－042 对整数 1，2，3，…，10 的每一个排列 a_1，a_2，…，a_{10}，作和

$$|a_1-a_2|+|a_3-a_4|+|a_5-a_6|+|a_7-a_8|+|a_9-a_{10}|$$

全部这样的和的平均值能写成$\frac{p}{q}$的形式，这里p、q是互素的正整数．求 p＋q．

【题说】 第十四届（1996 年）美国数学邀请赛题 12．

【解】 差$|a_i-a_j|$有如下的 45 种：

$$\begin{matrix}2-1 & 3-1 & \cdots & 10-1\\ & 3-2 & \cdots & 10-2\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & 10-9\end{matrix}$$

这 45 种的和为 1×9＋2×8＋3×7＋4×6＋5×5＋6×4＋7×3＋8×2＋9×1＝165．每一种出现的次数相同，而在和

$$|a_1-a_2|+|a_3-a_4|+|a_5-a_6|+|a_7-a_8|+|a_9-a_{10}|$$

中有 5 种，所以

$$\frac{p}{q}=\frac{5}{45}\times 165=\frac{55}{3}，p+q=55+3=58$$

A2－043 设正整数 a、b 使 15a＋16b 和 16a－15b 都是正整数的平方．求这两个平方数中较小的数能够取到的最小值．

【题说】 第三十七届（1996 年）国际数学奥林匹克题 4．本题由俄罗斯提供．

【解】 $15a+16b=r^2$，$16a-15b=s^2$

于是

$$16r^2-15s^2=16^2b+15^2b=481b \qquad (1)$$

所以 $16r^2-15s^2$ 是 481＝13×37 的倍数．

由于 0，±1，±2，±3，±4，±5，±6 的平方为 0，±1，±3，±4（mod 13），所以 15≡2（mod 13）不是任一数的平方．因此，$16r^2\equiv 15s^2$（mod 13）时，必有 13|s．

同样，由于0，±1，±2，±3，±4，±5，±6，±7，±8，±9，±10，±11，±12，±13，±14，±15，±16，±17，±18的平方为 0，±1，±3，±4，±9，±12，±16（mod 37），所以必有 $37|s$．

于是$481|s$．由（1），$481|r$．

在$r=s=481$时，$b=(16-15)\times481=481$，$a=(16+15)\times481=31\times481$，满足$15a+16b=r^2$，$16a-15b=s^2$．

所以所说最小值为481．

A2－044 设自然数n为十进制中的10位数．从左边数起第1位上的数恰是n的数字中0的个数，第2位上的数恰是n的数字中1的个数，一般地，第k+1位上的数恰是n的数字中k的个数（$0\le k\le9$）．求一切这样的数n．

【题说】 1997年日本数学奥林匹克预选赛题7．

【解】 设n的左数第k+1位上的数字为n_k（$0\le k\le9$），则数字k出现的次数为n_k．因为n是10位数，所以

$$n_0+n_1+n_2+\cdots+n_9=10 \qquad (1)$$

又数字k若在左数第n_{j+1}位上出现，则数字j在n中出现k次．n_k个k意味着有数字j_1，j_2，…，j_{n_k}，共出现k_{nk}次．于是，又有

$$n_i+2n_2+\cdots+9n_9=10 \qquad (2)$$

由（2）显然n_5，n_6，n_7，n_8，n_9，至多一个非零，且n_6，n_7，n_8，n_9均≤1．

若
$$n_5=n_6=n_7=n_8=n_9=0 \qquad (3)$$

则$n_0\ge5$．于是n中至少有一个数字≥5，与（3）矛盾．所以n_5，n_6，n_7，n_8，n_9中有一个非零，其余四个为0．从而

$$n_1+2n_2+3n_3+4n_4\le5 \qquad (4)$$

（4）表明n_1，n_2，n_3，n_4中至少有两个为0，从而n中0的个数不少于6，即$n_0\ge6$．于是n_6，n_7，n_8，n_9中有一个为1，$n_5=0$．

若$n_9=1$，则$n_0=9$，$n_1\ge1$，这显然不可能．

若$n_8=1$，则$n_0=8$，$n_1\ge1$，但无论$n_1>1$或$n_1=1$均不合要求．

若$n_7=1$，则$n_0=7$，$n_1=1$或2，前者显然不合要求．后者导致$n_2\ge1$，$n_0+n_1+n_2+n_7>10$也不合要求．

若$n_6=1$，则$n_0=6$，$n_1=2$或3．$n_1=2$时，$n_2=1$，数6210001000满足要求．$n_1=3$时，$n_3>0$，$n_0+n_1+n_3+n_6>10$，不合要求．

综上所述，满足条件的10位数n只有6210001000．

A2－045 求所有的整数对（a，b），其中$a\ge1$，$b\ge1$，且满足等式$a^{b^2}=b^a$．

【题说】 第三十八届（1997年）国际数学奥林匹克题5．本题由捷克提供．

【解】 显然当a、b中有一个等于1时，$(a,b)=(1,1)$．以下设a，$b\ge2$．

设$t=b^2/a$，则由题中等式得到$b=a^t$，$at=a^{2t}$，从而$t=a^{2t-1}$．如果$2t-1\ge1$，则$t=a^{2t-1}\ge(1+1)^{2t-1}\ge1+(2t-1)=2t>t$，矛盾．所

以 $2t-1<1$．于是我们有 $0<t<1$．

记 $K=1/t$，则 $K=a/b^2>1$ 为有理数，由 $a=b^k$ 可知

$$K=b^{K-2} \quad (1)$$

如果 $K\leq 2$，则 $K=b^{K-2}\leq 1$，与前面所证 $K>1$ 矛盾，因此 $K>2$．设 $K=p/q$，p，$q\in N$，p、q 互质，则 $p>2q$．于是由（1）式可得 $\left(\frac{p}{q}\right)^q=K^q=b^{p-2q}\in Z$．这意味着 $q^q|p^q$．但是p、q互素，故得 $q=1$，即 K 为一个大于 2 的自然数．

当 $b=2$ 时，由（2）式得到 $K=2^{K-2}$，所以 $K\geq 4$．又因为

$$K=2^{K-2}\geq C_{K-2}^0+C_{K-2}^1+C_{K-2}^2$$

$$=1+(K-2)+\frac{(K-2)(K-3)}{2}$$

$$=1+\frac{(K-1)(K-2)}{2}\geq 1+(K-1)=K,$$

等号当且仅当 $K=4$ 时成立，所以得到 $a=b^K=2^4=16$．

当 $b\geq 3$ 时，$=b^{K-2}\geq(1+2)^{K-2}\geq 1+2(K-2)=2K-3$．从而得到 $K\leq 3$．这意味着 $K=3$，于是得到 $b=3$，$a=b^K=3^3=27$．

综上所述，满足题目等式的所有正整数对为（a，b）＝（1，1），（16，2），（27，3）．

A3 数字问题

A3－001 在数 3000003 中，应把它的百位数字和万位数字 0 换成什么数字，才能使所得的数能被 13 整除？

【题说】 1950 年～1951 年波兰数学奥林匹克三试题 2．

【解】 设所求数字为 x 和 y，则有

$$n=\overline{30x0y03}=3\cdot 10^6+x\cdot 10^4+y\cdot 10^2+3$$

因为 10^6、10^4、10^2 除以 13 时，分别得余数 1、3、9，所以

$$n\equiv 3+3x+9y+3=3(2+x+3y)\pmod{13}$$

当且仅当 x＋3y＋2 被 13 整除，即

$$x+3y+2=13m\ (m\text{ 为自然数})\tag{1}$$

时，n 被 13 整除．由于

$$x+3y+2\leq 9+3\cdot 9+2=38$$

所以 m 只能取 1 或 2．

当 m＝1 时，由方程（1）及 0≤x，y≤9，解得

$$x=8,\ y=1;\ x=5,\ y=2;\ x=2,\ y=3$$

当 m＝2 时，解得 x＝9，y＝5；x＝6，y＝6；x＝3，y＝7；x＝0，y＝8．

故本题共有 7 个解：3080103，3050203，3020303，3090503，3060603，3030703，3000803．

A3－002 求出所有这样的三位数，使其被 11 整除后的商数等于该三位数各位数字的平方和．

【题说】 第二届（1960 年）国际数学奥林匹克题 1．本题由保加利亚提供．

【解】 设这个三位数除以 11 以后的商为 10a＋b，其中 a 是商的十位数，b 是商的个位数．若 a＋b≥10，则原数为

$$100(a+1)+10(a+b-10)+b$$

若 a＋b＜10，则原数为

$$100a+10(a+b)+b$$

以下对这两种情形分别讨论．

先考虑第一种情形．由题设有

$$(a+1)^2+(a+b-10)^2+b^2=10a+b\tag{1}$$

若 a＋b＞10，则有

$$(a+1)^2+(a+b-10)^2+b^2\geq(a+1)^2+1+(11-a)^2$$

$$=2\left(a-\frac{15}{2}\right)+10a+\frac{21}{2}>10a+b$$

故若（1）式成立，只能有 a＋b＝10．

将 b＝10－a 代入（1）解得唯一的一组正整数解

$$a=7,\ b=3$$

再考虑第二种情形．此时由题设有

$$a^2+(a+b)^2+b^2=10a+b\tag{2}$$

若 a＋b＞5，则有

$$a^2+(a+b)^2+b^2=2(a+b)\cdot a+2b^2>10a+b$$

故若（2）成立，只能有 $a+b\leq 5$．注意在（2）式中左边和 10a 都是偶数；因此 b 也是偶数．若 $a+b<5$，则 b 只能为 2，将 $b=2$ 代入（2）得不到整数解，因此只能有 $a+b=5$．

将 $b=5-a$ 代入（2）得唯一的一组正整数解

$$a=5,\ b=0$$

综上所述，合乎要求的三位数只有 550，803．

A3－003 下面是一个八位数除以一个三位数的算式，试求商，并说明理由．

$$\begin{array}{r}
7\ *\ *\ *\ * \\
*\ *\ *\ \overline{)\,*\ *\ *\ *\ *\ *\ *\ 8} \\
*\ *\ *\ \\
\hline
*\ *\ *\ *\ \\
*\ *\ *\ \\
\hline
*\ *\ *\ * \\
*\ *\ *\ * \\
\hline
0
\end{array}$$

【题说】 1958 年上海市赛高三题 1．

【解】 原式可写成：

$$\begin{array}{r}
7\ y_2\ y_3\ y_4\ y_5 \\
x_1\ x_2\ x_3\ \overline{)\,a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7\ 8} \\
b_1\ b_2\ b_3\ \\
\hline
c_1\ c_2\ a_5\ a_6\ \\
d_1\ d_2\ d_3\ \\
\hline
e_1\ e_2\ a_7\ 8 \\
e_1\ e_2\ a_7\ 8 \\
\hline
0
\end{array}$$

其中所有未知数都表示数字，且下标为 1 的未知数都不等于零．$x_1x_2x_3$ 等表示 $x_1\cdot 10^2+x_2\cdot 10+x_3$ 等．

（1）因为得到商的第一个数字 7 后，同时移下两个数字 a_5、a_6，所以 $y_2=0$，同理 $y_4=0$．

（2）四位数 $a_1a_2a_3a_4$ 与三位数 $b_1b_2b_3$ 之差为两位数 c_1c_2，所以 $a_1=1$，$a_2=0$，$b_1=9$，同理，$c_1=1$，$c_2=0$，$d_1=9$，于是 $a_4=b_3$，$b_2=9$，$a_3=0$．

（3）由 $7\times x_1x_2x_3=99b_3$，所以 $x_1=1$，$x_2=4$．$990-7\times 140=10$，所以 $x_3=2$，$b_3=4$，从而 $a_4=b_3=4$．

（4）由 $c_1=1$，$c_2=0$ 可知 $y_3=7$．

（5）$y_5\times 142$ 是四位数，所以 $x_5\geq 8$．又因 $y_5\times 142$ 的末位数字是 8，所以 $y_5=9$．

于是商为 70709，除数 142，从而被除数为 10040678．

A3－004 证明：在任意 39 个连续的自然数中，总能找到一个数，它的数字之和被 11 整除．

【题说】 1961 年全俄数学奥林匹克八年级题 3．

【证】 在任意 39 个连续自然数中，一定有三个数末位数字为 0，而前两个数中一定有一个十位数字不为 9，设它为 N，N 的数字之和为 n，则 N，N＋1，N＋2，…，N＋9，N＋19 这 11 个数的数字之和依次为 n，n＋1，n＋2，…，n＋9，n＋10，其中必有一个是 11 的倍数．

【注】 39 不能改为 38．例如 999981 至 1000018 这 38 个连续自然数中，每个数的数字和都不被 11 整除．本题曾被改编为匈牙利 1986 年竞赛题、北京市 1988 年竞赛题．

A3－005 求有下列性质的最小自然数 n：其十进制表示法以 6 结尾；当去掉最后一位 6 并把它写在剩下数字之前，则成为 n 的四倍数．

【题说】 第四届（1962 年）国际数学奥林匹克题 1．本题由波兰提供．

【解】 设 $n=10m+6$，则 $6\times10^{p}+m=4(10m+6)$，其中 p 为 m 的位数．于是 $m=2(10^{p}-4)/13$，要使 m 为整数，p 至少为 5，此时，$n=153846$．

A3－006 公共汽车票的号码由六个数字组成．若一张票的号码前三个数字之和等于后三个数字之和，则称它是幸运的．证明：所有幸运车票号码的和能被 13 整除．

【题说】 1965 年全俄数学奥林匹克八年级题 4．

【证】 设幸运车票的号码是 A，则 $A'=999999-A$ 也是幸运的，且 $A\neq A'$．因为 $A+A'=999999=999\times1001$ 含因数 13．而所有幸运号码都能如此两两配对．所以所有幸运号码之和能被 13 整除．

A3－007 自然数 k 有如下性质：若 n 能被 k 整除，那末把 n 的数字次序颠倒后得到的数仍能被 k 整除．证明：k 是 99 的因子．

【题说】 第一届（1967 年）全苏数学奥林匹克十年级题 5．

【证】 k 与 10 互质．事实上，存在首位为 1 且能被 k 整除的数，把它的数字倒过来也能被 k 整除，而此数的末位数字为 1．

取以 500 开头的且被 k 整除的数：500abc…z，（a，b，c，…，z 是这个数的数字），则以下的数均被 k 整除：

（1）z…cba005．

（2）和

$$\begin{array}{r} z\cdots cba00500\cdots0 \\ +)\qquad 500abc\cdots z \\ \hline z\cdots cba01000abc\cdots z \end{array}$$

（3）把（2）中的和倒过来

z…cba00010abc…z

（4）差

$$\begin{array}{r} z\cdots cba0100abc\cdots z \\ -)\quad z\cdots cba0001abc\cdots z \\ \hline 99000\cdots0 \end{array}$$

由此看出，99 能被 k 整除．

A3－008 计算由 1 到 10^9 的每一个数的数字之和，得到 10^9 个新数，再求每一个新数的数字之和；这样一直进行下去，直到都是一位数为止．那么，最后得到的数中是 1 多，还是 2 多？

【题说】 1964 年全俄数学奥林匹克八年级题 3．考虑整数被 9 除的余数．

【解】 一个正整数与其数字之和关于 9 是同余的，故最后所得的一位数为 1 者，是原数被 9 除余 1 的数，即 1，10，19，…，999999991 及 10^9．

同理，最后所得一位数为 2 者，原数被 9 除余 2，即 2，11，20，…，999999992．

二者相比，余 1 者多一个数，因此，最后得到的一位数中以 1 为多．

A3－009 求出具有下列性质的所有三位数 A：将数 A 的数字重新排列，得出的所有数的算术平均值等于 A．

【题说】 第八届（1974 年）全苏数学奥林匹克九年级题 5．

【解】 设$A=\overline{abc}$，按题意有

$$\overline{abc}+\overline{acb}+\overline{bac}+\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{cba}=\overline{6abc}$$

由此可得 222（a＋b＋c）＝6（100a＋10b＋c），即 7a＝3b＋4c，将这方程改写成

$$7(a-b)=4(c-b)$$

当 $0\le b\le 2$ 时，a＝b＝c，或 a－b＝4 且 c－b＝7．

当 $7\le b\le 9$ 时，b－a＝4，b－c＝7，从而

$$A\in\{111,222,\cdots,999,407,518,629,370,481,592\}$$

显然这 15 个三位数都合乎要求．

A3－010 当 4444^{4444} 写成十进制数时，它的各位数字之和是 A，而 B 是 A 的各位数字之和，求 B 的各位数字之和（所有的数都是十进制数）．

【题说】 第十七届（1975 年）国际数学奥林匹克题 4．本题由原苏联提供．

【解】 因为 4444^{4444} 的位数不超过 4×4444＝17776，所以

$$A\le 177760$$

$$B\le 1+5\times 9=46，B 的数字和 C\le 4+9=13$$

由于一个数与它的数字和 mod 9 同余，所以

$$C\equiv B\equiv A\equiv 4444^{4444}\equiv 7^{4444}$$
$$=(7^3)^{1481}\times 7\equiv 1^{1781}\times 7$$
$$\equiv 7 \pmod 9$$

故 C＝7，即数 B 的各位数字之和是 7．

A3－011 设 n 是整数，如果 n^2 的十位数字是 7，那么 n^2 的个位数字是什么？

【题说】 第十届（1978 年）加拿大数学奥林匹克题 1．

【解】 设 n＝10x＋y，x、y 为整数，且 $0\le y\le 9$，则

$$n^2=100x^2+20xy+y^2$$
$$=20A+y^2\ （A 为正整数）$$

因 20A 的十位数字是偶数，所以要想使 n^2 十位数字是 7，必须要 y^2 的十位数字是奇数，这只有 $y^2=16$ 或 36．从而 y^2 的个位数字，即 n^2 的个位数字都是 6．

A3－012　求出数（$\sqrt{2}+\sqrt{3}$）^{1980}的十进小数表达式中紧靠着小数点的右面一位数字（即小数第一位）与左面一位数字（即个位数）．并证明你的结论．

【题说】 1980 年四国国际数学竞赛题 6．本题由英国提供．

【解】 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{1980}=(5+2\sqrt{6})^{990}$

而

$$(5+2\sqrt{6})^{990}+(5-2\sqrt{6})^{990}$$

是正偶数，并且

$$(5+2\sqrt{6})^{990}+(5-2\sqrt{6})^{990}$$
$$\equiv 2\times(2)^{990}\pmod{10}$$
$$=2^{991}\times 6^{495}\equiv 2^{991}\times 6\pmod{10}$$
$$\equiv 2^{4\times 247+3}\equiv 2^3\equiv 3\pmod{5}$$

所以$(5+2\sqrt{6})^{990}+(5-2\sqrt{6})^{990}$的个位数字是8．

由于

$$(5-2\sqrt{6})^{990}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{1980}$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^{1980}<\frac{1}{2^{1980}}<0.01$$

所以$(5+\sqrt{6})^{990}$的个位数字为7，小数第一位为9．

A3－013 下列整数的末位数字是否组成周期数列？

(a) $[(\sqrt{10})^n]$，n＝1，2，…；

(b) $[(\sqrt{2})^n]$，n＝1，2，….

其中[a]表示数 a 的整数部分．

【题说】 第十七届（1983 年）全苏数学奥林匹克九年级题 4．

【解】 (a) 用a_n表示$[(\sqrt{10})^n]$的末位数字．

由于

$$[(\sqrt{10})^{2k+1}]=[10^k\sqrt{10}]$$

所以a_{2k+1}等于$\sqrt{10}$，化为小数时，小数第k位上的数字．而$\sqrt{10}$是无限不循环小数，所以$\{a_{2k+1}\}$从而$\{a_n\}$不是周期数列．

(b) 用b_n表示$[(\sqrt{2})^n]$在十进制中的末位数字，r_n表示$[(\sqrt{2})^n]$在二进制中的末位数字．显然，b_n为偶数时，$r_n=0$，b_n为奇数时，$r_n=1$．仿 (a) 可证$\{r_n\}$不是周期的，从而$\{b_n\}$也不是周期数列．

A3－014 设 a_n 是 $1^2+2^2+\cdots+n^2$ 的个位数字，n＝1，2，3，…，试证：$0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$是有理数．

【题说】 1984 年全国联赛二试题 4．

【证】 将$(n+1)^2$，$(n+2)^2$，…，$(n+100)^2$这 100 个数排成下表：

$(n+1)^2$	$(n+2)^2$	…	$(n+10)^2$
$(n+11)^2$	$(n+12)^2$	…	$(n+20)^2$
…	…	…	…
$(n+91)^2$	$(n+92)^2$	…	$(n+100)^2$

因k^2与$(k+10)^2$的个位数字相同，故表中每一列的 10 个数的个位数字皆相同．因此，将这 100 个数相加，和的个位数字是 0．

所以，$a_{n+100}=a_n$对任何 n 成立．

这说明$0.a_1a_2a_3\cdots$是循环小数，因而是有理数．

A3－015 是否存在具有如下性质的自然数 n：（十进制）数 n 的数字和等于 1000，而数n^2的数字和等于1000^2？

【题说】 第十九届（1985 年）全苏数学奥林匹克八年级题 2．

【解】 可用归纳法证明更一般的结论：

对于任意自然数 m，存在由 1 和 0 组成的自然数 n，它的数字和 S（n）＝m，而n^2的数字和 S（n^2）＝m^2？

当 m＝1，n＝1 时，显然满足要求．

设对自然数 m，存在由 1 和 0 组成的自然数 n，使得

$$S(n)=m,\ S(n^2)=m^2$$

设 n 为 k 位数，取

$n_1=n\times10^{k+1}+1$，则n_1由 0，1 组成并且

$$S(n_1)=S(n)+1=m+1$$

$$\begin{aligned}S(n_1^2)&=S(n^2\times10^{2k+2}+2n\times10^{k+1}+1)\\&=S(n^2\times10^{2k+2})+S(2n\times10^{k+1})+S(1)\\&=S(n^2)+2S(n)+1\\&=m^2+2m+1\\&=(m+1)^2\end{aligned}$$

因此命题对一切自然数 m 均成立．

A3－016 设1987可以在b进制中写成三位数$\overline{xyz}$，且$x+y+z=1+9+8+7$．试确定出所有可能的 x、y、z 及 b 的值．

【题说】 第十九届（1987 年）加拿大数学奥林匹克题 2．

【解】 由题设，

$xb^2+yb+z=1987$　(1)

因此　$b^3>1987>b^2$，$12<b<45$　(2)

又由已知，有　$x+y+z=25$　(3)

（3）－（1）得　$(b-1)(bx+y)=1962=2\times9\times109$

结合（2），知　$b-1=2\times9=18$，$b=19$

从而　$1987=5\times19^2+9\times19+11$

所以　$x=5$，$y=9$，$z=11$

A3－017 设自然数 n 是一个三位数．由它的三个非零数字任意排列成的所有三位数的和减去 n 等于 1990．求 n．

【题说】 1989 年芜湖市赛题 3．

【解】 设$n=\overline{abc}$，依题意得

$$2090<222(a+b+c)=1990+n<2989$$

而

$2090>222\times9=1998$，$222\times10=2220=1990+230$

$222\times11=2442\times1990+452$，$222\times12=2664=1990+674$

$222\times13=2886=1990+896$，$222\times14=3108>2989$

经验证：$a+b+c=11$ 时，$n=452$ 符合题意．

A3－018 定义数列$\{a_n\}$如下：$a_1=1989^{1989}$，a_n 等于 a_{n-1} 的各位数字之和，a_5 等于什么？

【题说】 第二十一届（1989 年）加拿大数学奥林匹克题 3．

【解】 由 $a_1<10000^{1989}=b_1$，而 b_1 的位数是 $4\times1989+1=7957$，知 $a_2<10\times8000=80000$，所以 a_2 最多是 5 位数，从而 $a_3\leq5\times9=45$，$a_4\leq4+9=13$，因此 a_5 一定是一位数．

另一方面，由 $9|1989$，知 $9|a_1$，因而 9 可整除 a_1 的数字和，即 $9|a_2$，又因此有 $9|a_3$，$9|a_4$，$9|a_5$．所以 $a_5=9$．

A3－019 某州颁发由 6 个数字组成的车牌证号（由 0—9 的数字组成），且规定任何两个牌号至少有两个数字不同（因此，证号“027592”与“020592”不能同时使用），试确定车牌证号最多有多少个？

【题说】 第十九届（1990 年）美国数学奥林匹克题 1．

【解】 至多可造出不同的五位证号 $a_1a_2a_3a_4a_5 10^5$ 个．令 a_6 是 $a_1+a_1+a_3+a_4+a_5$ 的个位数字，所成的六位数便满足要求．因为如果两个数的前五位中只有一个数字不同，那么第 6 位数字必然不同．

另一方面，任何 10^5+1 个 6 位数中，总有两个前五位数字完全相同．

因此，符合题目要求的车牌证号最多有 10^5 个．

A3－020 设 $A=99\cdots99$（81 位全为 9），求 A^2 的各位数字之和．

【题说】 1991 年日本数学奥林匹克预选赛题 1．

【解】 由 $A=10^{81}-1$ 知

$$A^2=10^{162}-2\cdot10^{81}+1$$
$$=99\cdots980\cdots01$$
$$\uparrow\qquad\uparrow$$
$$162\text{位}\quad 82\text{位}$$

故 A^2 各位数字之和$=9\times(162-82)+8+1=729$．

A3－021 如果一个正整数的十进制表示中至少有两个数字，并且每个数字都比它右边的数字小，那么称它为“上升”的．这种“上升”的正整数共有多少个？

【题说】 第十届（1992 年）美国数学邀请赛题 2．

【解】 符合条件的正整数中的数字，都是不同的非零数码，即集合 $S=\{1，2，3，\cdots，9\}$的二元或二元以上的子集．反过来，S 的每个二元或二元以上的子集，将它的数码从小到大排列，也得到一个符合条件的正整数．S 的子集共有 2^9

$=512$ 个，其中只含一个元素的子集有 9 个，一个空集．故符合条件的正整数共有 $512-10=502$ 个．

A3－022 试用一个 n 的函数，表示乘积

$$9\times99\times9999\times\cdots\times(10^{2^n}-1)$$

在十进制下各位数字的和．

【题说】第二十一届（1992 年）美国数学奥林匹克题 1．

【解】先给出引理：设自然数 m 的位数不多于 d，$M=(10^k-1)m$（$k\geq d$）．则

$$S(M)=9k$$

这里 S（M）表示 M 中各位数字的和．

事实上，令 $M=(10^k-1)m=p+q+r$，这里 $p=10^k(m-1)$，$q=10^d-m$，$r=10^k-10^d$．若 $m-1$ 的十进制的表示是

$$m-1=\overline{a_1a_2\cdots a_d}$$

则

$$p=\overline{a_1a_2\cdots a_d00\cdots0}\ (k\text{个}0)$$

$$q=(10^d-1)-(m-1)$$

$$=99\cdots9\ (d\text{个}9)-\overline{a_1a_2\cdots a_d}$$

$$=\overline{b_1b_2\cdots b_d}$$

$$a_i+b_i=9\ (i=1,2,\cdots,d)$$

$$r=(10^k-1)-(10^d-1)$$

$$=99\cdots9\ (k\text{个}9)-99\cdots9\ (d\text{个}9)$$

$$=99\cdots900\cdots0\ (k-d\text{个}9,\ d\text{个}0)$$

所以，$M=\overline{a_1a_2\cdots a_d00\cdots0}\ (k\text{个}0)+\overline{b_1b_2\cdots b_d}+9\cdots90\cdots0\ (k-d$ 个 9，d 个 0)

$$=\overline{a_1a_2\cdots a_d99\cdots9b_1b_2\cdots b_d}\ (k-d\text{个}9)$$

从而，S（M）=9k

记题给乘积为 M'，且令

$$m=9\times99\times\cdots\times(10^{2^{n-1}}-1)=\frac{M}{10^{2^n}-1}$$

因 $m<10^{1+2+\cdots+2^{n-1}}=10^{2^n}-1$，故 m 的位数 $\leq 2^n$．由引理知 $S(M^1)=9\cdot2^n$．

A3－023　求方程

$$\sqrt{1995}x^{\log_{1995}x}=x^2$$

的各个正根的乘积的最后三位数字．

【题说】第十三届（1995 年）美国数学邀请赛题 2．

【解】令 $y=\log_{1995}x$．由原方程取对数得

$$\frac{1}{2}+y^2=2y$$

解得

$$y=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_1x_2=1995^{y_1+y_2}=1995^2=(200-5)^2$$

其最后三位数字为 025．

A3－024　一个六位数的首位数字是 5，是否总能够在它的后面再添加 6 个数字，使得所得的十二位数恰是一个完全平方数？

【题说】1995 年城市数学联赛高年级普通水平题 3．

【解】不．若不然，10^5 个以 5 为首位数字的六位数可以衍生出 105 个十二位的完全平方数．即有 10^5 个自然数 n 满足．

$$5\times10^{11}\leq n^2<6\times10^{11}$$

亦即

$$7\times10^5<n<8\times10^5$$

由于 7×10^5 与 8×10^5 之间不存在 10^5 个整数，故上式不可能成立．

A4　整　除

A4－001　证明：当且仅当指数 n 不能被 4 整除时，$1^n+2^n+3^n+4^n$ 能被 5 整除．

【题说】1901 年匈牙利数学奥林匹克题 1．

【证】容易验证 $1^4\equiv 2^4\equiv 3^4\equiv 4^4\pmod 5$

假设 n=4k＋r，k 是整数，r=0，1，2，3．则

$$S_n=1^n+2^n+3^n+4^n\equiv 1^r+2^r+3^r+4^r\pmod 5$$

由此推出，当 r=0 时，$S_n\equiv 4$，而当 r=1，2，3 时，$S_n\equiv 0\pmod 5$．因此，当且仅当 n 不能被 4 整除时，S_n 能被 5 整除．

A4－002　证明：从 n 个给定的自然数中，总可以挑选出若干个数（至少一个，也可能是全体），它们的和能被 n 整除．

【题说】1948 年匈牙利数学奥林匹克题 3．

【证】设 a_1，a_2，…，a_n 是给定的 n 个数．考察和序列：a_1，a_1+a_2，$a_1+a_2+a_3$，…，$a_1+a_2+\cdots+a_n$．

如果所有的和数被 n 除时余数都不相同，那么必有一个和数被 n 除时余数为 0．此时本题的断言成立．

如果在 n 个和数中，有两个余数相同（被 n 除时），那么从被加项较多的和数中减去被加项较少的和数，所得的差能被 n 整除．此时本题的断言也成立．

A4－003　1．设 n 为正整数，证明 $13^{2n}-1$ 是 168 的倍数．

2．问：具有那种性质的自然数 n，能使 $1+2+3+\cdots+n$ 整除 $1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdot n$．

【题说】1956 年上海市赛高三复赛题 1．

【解】1．$13^{2n}-1=(13^2)^n-1$，能被 13^2-1，即 168 整除．

2．问题即

$$\frac{n!}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2(n-1)!}{n+1}$$

何时为整数．

(1) 若 n＋1 为奇质数，则

$$(n+1)\nmid 2(n-1)!$$

(2) 若 n＋1=2，则

$$(n+1)\mid 2(n-1)!$$

(3) 若 n＋1 为合数，则

$$n+1=ab$$

其中 $a\geq b>1$．

在 b=2 时，$a=n+1-a\leq n-1$，所以

$$a\mid(n-1)!,\ (n+1)\mid 2(n-1)!$$

在 b＞2 时，$2a\leq n+1-a<n-1$，所以

$$2ab\mid(n-1)!$$

更有

$$(n+1)\mid 2(n-1)!$$

综上所述，当 n≠p－1（p 为奇质数）时，$1+2+\cdots+n$ 整除 $1\cdot 2\cdots\cdot n$．

A4－004　证明：如果三个连续自然数的中间一个是自然数的立方，那么它们的乘积能被504整除．

【题说】 1957年～1958年波兰数学奥林匹克三试题1．

【证】设三个连续自然数的乘积为 $n=(a^3-1)a^3(a^3+1)$．

(1) $a\equiv 1, 2, -3 \pmod 7$ 时，$7|a^3-1$．$a\equiv -1, -2, 3 \pmod 7$ 时，$7|a^3+1$．$a\equiv 0 \pmod 7$ 时，$7|a^3$．因此 $7|n$．

(2) 当a为偶数时，a^3 被8整除；而当a为奇数时，a^3-1 与 a^3+1 是两个相邻偶数，其中一个被4整除，因此积被8整除．

(3) $a\equiv 1, -2, 4 \pmod 9$ 时，$9|a^3-1$．$a\equiv -1, 2, -4 \pmod 9$ 时，$9|a^3+1$．$a\equiv 0, \pm 3 \pmod 9$ 时，$9|a^3$．因此 $9|n$．

由于7、8、9互素，所以n被 $504=7\times 8\times 9$ 整除．

A4－005 设x、y、z是任意两两不等的整数，证明 $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$ 能被 $5(y-z)(z-x)(x-y)$ 整除．

【题说】1962年全俄数学奥林匹克十年级题3．

【证】令 $x-y=u$，$y-z=v$，则 $z-x=-(u+v)$．

$$(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5=u^5+v^5-(u+v)^5$$
$$=5uv(n+v)(u^2+uv+v^2)$$

而 $5(y-z)(z-x)(x-y)=-5uv(u+v)$．因此，结论成立，而且除后所得商式为 $u^2+uv+v^2=x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2xz$．

【别证】也可利用因式定理，分别考虑原式含有因式 $(x-y)$，$(y-z)$，$(z-x)$ 以及5．

A4－006　已知自然数a与b互质，证明：$a+b$ 与 a^2+b^2 的最大公约数为1或2．

【题说】1963年全俄数学奥林匹克八年级题4．

【证】设 $(a+b, a^2+b^2)=d$，则d可以整除

$$(a+b)^2-(a^2+b^2)=2ab$$

但由于a、b互质，a的质因数不整除a＋b，所以d与a互质，同理d与b互质．因此d=1或2．

A4－007　(a) 求出所有正整数n使 2^n-1 能被7整除．

(b) 证明：没有正整数n能使 2^n+1 被7整除．

【题说】第六届（1964年）国际数学奥林匹克题1．本题由捷克斯洛伐克提供．解的关键是找出 2^n 被7除所得的余数的规律．

【证】(a) 设m是正整数，则

$$2^{3m}=(2^3)^m=(7+1)^m$$
$$=7^m+C_m^1 7^{m-1}+C_m^2 7^{m-2}+\cdots+C_m^{m-1}7+1$$
$$=7k+1 \text{（k是正整数）}$$

从而

$$2^{3m+1}=2\cdot 2^{3m}=2(7k+1)=7k_1+2$$
$$2^{3m+2}=4\cdot 2^{3m}=4(7k+1)=7k_2+4$$

所以当 $n=3m$ 时，2^n-17k；

当 $n=3m+1$ 时，$2^n-1=7k_1+1$；

当 $n=3m+2$ 时，$2^n-1=7k_2+3$．

因此，当且仅当n是3的倍数时，2^n-1 能被7整除．

(b) 由(a)可知，2^n+1 被7除，余数只可能是2、3、5．因此，

2^n+1 总不能被 7 整除．

A4－008　设 k、m 和 n 为正整数，$m+k+1$ 是比 $n+1$ 大的一个质数，记 $C_s=s(s+1)$．证明：乘积

$$(C_{m+1}-C_k)(C_{m+2}-C_k)\cdots(C_{m+n}-C_k)$$

能被乘积 $C_1\cdot C_2\cdot\cdots\cdot C_n$ 整除．

【题说】第九届（1967 年）国际数学奥林匹克题 3．本题由英国提供．

【证】$C_p-C_q=p(p+1)-q(q+1)$

$$=p^2-q^2+p-q=(p-q)(p+q+1)$$

所以 $(C_{m+1}-C_k)(C_{m+2}-C_k)\cdots(C_{m+n}-C_k)$

$=(m-k+1)(m-k+2)\cdots(m-k+n)\cdot(m+k+2)(m+k+3)\cdot\cdots\cdot(m+k+n+1)$

$$C_1C_2\cdots C_n=n!(n+1)!$$

因此只需证

$$\left(\frac{(m-k+1)(m-k+2)\cdots(m-k+n)}{n!}\right)\cdot\left(\frac{(m+k+2)(m+k+3)\cdots(m+k+n+1)}{(n+1)!}\right)$$

$=A\cdot B$

是整数．

由于 n 个连续整数之积能被 n！整除，故 A 是整数．

又 $(m+k+1)B=\frac{(m+k+1)(m+k+2)(m+k+3)\cdots(m+k+n+1)}{(n+1)!}$

$$=C_{m+k+n+1}^{n+1}$$

是整数．因为 $m+k+1$ 是大于 $n+1$ 的质数，所以 $m+k+1$ 与 $(n+1)!$ 互素，从而 $(m+k+2)(m+k+3)\cdots(m+k+n+1)$ 能被 $(n+1)!$ 整除，于是 B 也是整数，命题得证．

A4－009　设 a、b、m、n 是自然数且 a 与 b 互素，又 $a>1$，证明：如果 a^m+b^m 能被 a^n+b^n 整除，那么 m 能被 n 整除．

【题说】第六届（1972 年）全苏数学奥林匹克十年级题 1．

【证】由于

$$a^k+b^k=a^{k-n}(a^n+b^n)-b^n(a^{k-n}-b^{k-n})$$
$$a^l-b^l=a^{l-n}(a^n+b^n)-b^n(a^{l-n}+b^{l-n})$$

所以

（i）如果 a^k+b^k 能被 a^n+b^n 整除，那么 $a^{k-n}-b^{k-n}$ 也能被 a^n+b^n 整除．

（ii）如果 a^l-b^l 能被 a^n+b^n 整除，那么 $a^{l-n}+b^{l-n}$ 也能被 a^n+b^n 整除．

设 $m=qn+r$，$0\le r<n$，由（i）、（ii）知 $a^r+(-1)^qb^r$ 能被 a^n+b^n 整除，但 $0\le|a^r+(-1)^qb^r|<a^n+b^n$，故 $r=0$（同时 q 是奇数）．亦即 $n|m$．

A4－010　设 m，n 为任意的非负整数，证明：

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

是整数（约定 0！=1）．

【题说】第十四届（1972 年）国际数学奥林匹克题 3．本题由英国提供．

【证】设 $f(m,n)=\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$

易证　f（m+1，n）=4f（m，n）－f（m，n+1）　　　（1）

当$m=0$时，$f(m,n)=C_{2n}^{n}$是整数．设对一切非负整数n，f（m，n）为整数，则由（1），f（m+1，n）是整数．

因此，对一切非负整数 m、n，f（m，n）是整数．

A4－011　证明对任意的自然数 n，和数

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}2^{3k}C_{2n+1}^{2k+1}$$

不能被 5 整除．

【题说】第十六届（1974 年）国际数学奥林匹克题 3．本题由罗马尼亚提供．

【证】令$b_n=\sum_{k=0}^{n}2^{3k}C_{2n+1}^{2k}$，则

$$\begin{aligned}\sqrt{8}a_n+b_n&=\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k+1}(\sqrt{8})^{2k+1}+\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k}(\sqrt{8})^{2k}\\&=\sum_{k=0}^{2n+1}C_{2n+1}^{k}(\sqrt{8})^{k}=(\sqrt{8}+1)^{2n+1}\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}\sqrt{8}a_n-b_n&=\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k+1}(\sqrt{8})^{2k+1}-\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{2k}(\sqrt{8})^{2k}\\&=(\sqrt{8}-1)^{2n+1}\end{aligned}$$

两式相乘得

$$8a_n^2-b_n^2=7^{2n+1}$$

即

$$8a_n^2=b_n^2+7^{2n+1}$$

因为 $7^{2n+1}=7\times49^n\equiv2\times(-1)^n \pmod 5$

$$b_n^2\equiv\pm1 \pmod 5$$

所以$b_n^2+7^{2n+1}\not\equiv0 \pmod 5$，从而$5\nmid a_n$．

A4－012　设 p 和 q 均为自然数，使得

$$\frac{p}{q}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}$$

证明：数 p 可被 1979 整除．

【题说】第二十一届（1979 年）国际数学奥林匹克题 1．本题由原联邦德国提供．

【证】$\frac{p}{q}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}$

$$=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1319})-2(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1318})$$

$$=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1319})-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{659})$$

$$=\frac{1}{660}+\frac{1}{661}+\cdots+\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}$$

$$=(\frac{1}{660}+\frac{1}{1319})+(\frac{1}{661}+\frac{1}{1318})+\cdots+(\frac{1}{989}+\frac{1}{990})$$

$$=1979\times(\frac{1}{660\times1319}+\frac{1}{661\times1318}+\cdots+\frac{1}{989\times990})$$

将等式两边同乘以 1319！，得

$$1319!\times\frac{p}{q}=1979\cdot N$$

其中 N 是自然数．

由此可见 1979 整除 1319！×p．因为 1979 是素数，显然不能整除 1319！，所以 1979 整除 p．

A4－013　一个六位数能被 37 整除，它的六个数字各个相同且都不是 0．证明：重新排列这个数的六个数字，至少可得到 23 个不同的能被 37 整除的六位数．

【题说】第十四届（1980 年）全苏数学奥林匹克十年级题 1．

【证】因为999能被37整除，所以六位数$\overline{abcdef}=\overline{abc}\times(999+1)+\overline{def}$被37整除，当且仅当$\overline{abc}+\overline{def}=100(a+d)+10(b+e)+(c+f)$被 37 整除．

由于上述括号中的数字是对称出现的，且各数字不为 0，故交换对称的数字，可得另外7个被37整除的六位数（如$\overline{abfdec}$等）．

又因为 100a＋10b＋c=－999c＋10（100c＋10a＋b），所以$\overline{cabfde}$、$\overline{bcaefd}$也能被37整除．这两个数按上述方式重排各位数字，便各再得 7 个被 37 整除的数，这样共得 23 个六位数．

A4－014　（a）对于什么样的整数 n＞2，有 n 个连续正整数，其中最大的数是其余 n－1 个数的最小公倍数的约数？

（b）对于什么样的 n＞2，恰有一组正整数具有上述性质？

【题说】第二十二届（1981 年）国际数学奥林匹克题 4．

【解】设 n 个连续正整数中最大的为 m．

当 n=3 时，如果 m 是 m－1，m－2 的最小公倍数的约数，那么 m 整除（m－1）（m－2），由 m|（m－1）（m－2）得 m|2，与 m－2＞0 矛盾．

设 n=4．由于

m|（m－1）（m－2）（m－3）

所以 m|6，而 m＞4，故这时只有一组正整数 3，4，5，6 具有所述性质．

设 n＞4．由于 m|（m－1）（m－2）…（m－n＋1），所以 m|（n－1）！取 m=（n－1）（n－2），则（n－1）|（m－（n－1）），（n－2）|（m－（n－2））．由于 n－1 与 n－2 互质，m－（n－1）与 m－（n－2）互

质，所以 $m=(n-1)(n-2)$ 整除 $m-(n-1)$ 与 $m-(n-2)$ 的最小公倍数，因而 m 具有题述性质．

类似地，取 $m=(n-2)(n-3)$，则 m 整除 $m-(n-2)$ 与 $m-(n-3)$ 的最小公倍数，因而 m 具有题述性质．

所以，当 $n\geq 4$ 时，总能找到具有题述性质的一组正整数．当且仅当 $n=4$ 时，恰有唯一的一组正整数．

A4－015　求一对正整数 a 和 b，使得：

(1) $ab(a+b)$ 不被 7 整除；

(2) $(a+b)^7-a^7-b^7$ 被 7^7 整除．

证明你的论断．

【题说】第二十五届（1984 年）国际数学奥林匹克题 2．

【解】 $(a+b)^7-a^7-b^7$

$=7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6$

$=7ab[(a^5+b^5)+3ab(a^3+b^3)+5a^2b^2(a+b)]$

$=7ab(a+b)[a^4+2a^3b+3a^2b^2+2ab^3+b^4]$

$=7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2$

取 $a=18$，$b=1$，则 $a^2+ab+b^2=a(a+b)+b^2=343=7^3$．所以 $(a+b)^7-a^7-b^7$ 被 7^7 整除，$ab(a+b)$ 不被 7 整除．

A4－016　1．是否存在 14 个连续正整数，其中每一个数均至少可被一个不小于 2、不大于 11 的素数整除？

2．是否存在 21 个连续正整数，其中每一个数均至少可被一个不小于 2、不大于 13 的素数整除？

【题说】第十五届（1986 年）美国数学奥林匹克题 1．

【解】1．14 个连续正整数中，有 7 个奇数 n，n＋2，n＋4，n＋6，n＋8，n＋10，n＋12 不能被 2 整除．这 7 个奇数中，至多 1 个被 11 整除，一个被 7 整除，2 个被 5 整除，3 个被 3 整除．

如果被 3 整除的数少于 3 个或被 5 整除的数少于 2 个，那么这 7 个奇数中被 3，5，7，11 整除的数不足 7 个．

如果恰有 3 个数被 3 整除，2 个数被 5 整除，那么，被 3 整除的数必须是 n，n＋6，n＋12，被 5 整除的 2 个数必须为 n 与 n＋10 或 n＋2 与 n＋12．此时必有一个数 n 或 n＋12 同时被 3，5 整除．即这 7 个奇数中被 3，5，7，11 整除的数仍不足 7 个．

不管怎样，这 14 个连续正整数中必有 1 个不被 2，3，5，7，11 任一个整除．故答案为不存在．

2．存在．以下 21 个连续整数

$$-10,\ -9,\ \cdots,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10$$

除去±1，其余整数被 2，3，5，7 之一整除．由中国剩余定理，满足

$$N\equiv 0 \pmod{210}$$
$$N\equiv 1 \pmod{11}$$
$$N\equiv -1 \pmod{13}$$

的整数 N 存在，于是

$$N-10,\ N-9,\ \cdots,\ N,\ N+1,\ \cdots,\ N+10$$

这 21 个连续整数满足所有要求．

A4－017 求出（并予以证明）所有大于1的整数n，使$\frac{2^n+1}{n^2}$为整数．

【题说】第三十一届（1990 年）国际数学奥林匹克题 3．本题由罗马尼亚提供．

【解】

显然 n 为奇数．设 p 为 n 的最小素因数，则

$$2^n\equiv -1 \pmod p \quad (1)$$

设 a 为使 $2n\equiv -1 \pmod P$ (2)

最小的正整数

$$n=ka+r,\ 0\le r<a \quad (3)$$

则 $2^n\equiv 2^{ka+r}\equiv (-1)^k\cdot 2^r$ (4)

若 k 为偶数，则由（1）、（4）

$$2^r\equiv -1 \pmod p$$

由 a 的最小性，r=0．

若 k 为奇数，即由（1）、（4），

$$2^r\equiv 1 \pmod p$$

从而 $2^{a-r}\equiv -1 \pmod p$

而 0＜a－r≤a，由 a 的最小性，仍有 r=0．

总之，a|n．由费尔马小定理

$$2^{p-1}\equiv 1 \pmod p$$

若 a＞p－1 则 a－（p－1）＜a 并且

$$2^{a-(p-1)}\equiv -1 \pmod p$$

与 a 的最小性矛盾，因此 a＜p．

由 p 的最小性及 a|n 得 a=1，即

$$2^1=-1 \pmod p$$

从而 P=3．

令 $n=3^k\cdot d$，（d，3）=1，若 k≥2，则

$$2^n+1=(3-1)^n+1=3n-\sum_{h=2}^{k+1}(-1)^h C_n^h 3^h \quad (5)$$

由于 h！中 3 的幂指数为

$$[\frac{h}{3}]+[\frac{h}{3^2}]+\cdots<\frac{h}{3}+\frac{h}{3^2}+\cdots=\frac{h}{2}$$

所以 $$C_n^h=\frac{n(n-1)\cdots(n-h+1)}{h!}$$

中3的幂指数＞$k-\frac{h}{2}$，（5）式右边和号中，各项都被$3^{k-\frac{h}{2}+h+1}=3^{k+\frac{h}{2}+1}$整除（h≥2），而3n恰被$3^{k+1}$整除，从而$2^n+1=3^{k+1}\cdot d'$，(3，d')=1．由于 $n^2=3^{2k}d^2$，$n^2\nmid 2^n+1$，矛盾！

因此 n=3d，（3，d）=1．

若 d＞1，令 q 为 d 的最小素因数，则

$$2^n\equiv -1 \pmod q$$

令 j 为使 $2^j\equiv -1 \pmod q$

的最小的正整数，与前面类似，可得 j|n，再由 q 的最小性及 j≤q－1

得 $j=1$，3．

从而

$$q|3 \text{ 或 } 3^2$$

均与（3，d）=1 矛盾．因而 d=1，n=3．

A4－018　试求出所有的正整数 a、b、c，其中 $1<a<b<c$，使得（a－1）（b－1）（c－1）是 abc－1 的约数．

【题说】第三十三届（1992 年）国际数学奥林匹克题 1．本题由新西兰提供．

【解】设 $x=a-1$，$y=b-1$，$z=c-1$，则 $1\le x<y<z$ 并且 xyz 是

$(x+1)(y+1)(z+1)-1=xyz+x+y+z+xy+yz+zx$ 的约数，从而 xyz 是 $x+y+z+xy+yz+zx$ 的约数．

由于 $x+y+z+xy+yz+zx<3yz$，所以 x=1 或 2．

若 x=1，则 yz 是奇数 $1+2y+2z$ 的约数．由于 $1+2y+2z<4z$，所以 y=3．并且 3z 是 $7+2z$ 的约数．于是 z=7．

若 x=2，则 2yz 是 $2+3y+3z+yz$ 的约数，从而 y，z 均为偶数，设 $y=2y_1$，$z=2z_1$，则 $4y_1z_1\le 1+3y_1+3z_1+2y_1z_1<6z_1+2y_1z_1$，所以 $y_1<3$．因为 $y>x$，所以 $y_1=2$，y=4．再由 $8z_1$ 是 $7+7z_1$ 的约数得 $z_1=7$，z=14．

因此，所求解为（3，5，15）与（2，4，8）．

A4－019　x 与 y 是两个互素的正整数，且 $xy\ne 1$，n 为正偶数．证明：$x+y$ 不整除 x^n+y^n．

【题说】1992 年日本数学奥林匹克题 1．

【证】由（x，y）=1 知（x+y，y）=1，（x+y，xy）=1．

当 n=2 时，$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$．由于 $x+y>2$，所以 $(x+y)\nmid 2xy$．故 $(x+y)\nmid(x^2+y^2)$．

假设当 $n=2k$（$k\in N_+$）时，$(x+y)\nmid(x^{2k}+y^{2k})$．则当 $n=2(k+1)$ 时，由于

$$x^{2(k+1)}+y^{2(k+1)}=(x+y)(x^{2k+1}+y^{2k+1})-xy(x^{2k}+y^{2k})$$

所以 $(x+y)\nmid(x^{2(k+1)}+y^{2(k+1)})$．故对一切正偶数 n，$x+y$ 不整除 x^n+y^n．

A4－020　证明当且仅当 $n+1$ 不是奇素数时，前 n 个自然数的积被前 n 个自然数的和整除．

【题说】第二十四届（1992 年）加拿大数学奥林匹克题 1．

【解】

$$1+2+\cdots+n=\frac{n}{2}(n+1)$$

若 $n+1$ 为奇素数 p，则 $p\nmid n!$，所以 $\frac{n}{2}(n+1)\nmid n!$．

若 $n+1$ 为奇合数，设 $n+1=qr$，q、r 为奇数且 $3\le q\le r$，则 $n\ge 9$，$q<2r\le\frac{2}{3}(n+1)\le n-1$，所以 $qr|(n-1)!$，$\frac{n}{2}(n+1)|n!$．

若 $n+1$ 为偶数，$n=1$ 时显然 $\frac{n}{2}(n+1)|n!$．设 $n+1=2u$，$u\ge 2$，则 $u=(n+1)-u\le n-1$，所以 $u|(n-1)!$，$\frac{n}{2}(n+1)=nu|n!$．

A4－021　找出 4 个不同的正整数，它们的积能被它们中的任意两

个数的和整除．

你能找出一组 5 个或更多个数具有同样的性质吗？

【题说】1992 年英国数学奥林匹克题 3．

【解】显然，2、6、10、14 满足要求．

任取 n 个不同的正整数。a_1、a_2、…、a_n，令

$$l=\prod_{1\le i<j\le n}(a_i+a_j)$$

则 n 个不同的正整数 la_1、la_2、…、la_n 中任意两个的和显然整除 l^2，从而整除它们的积 $l^n a_1 a_2 \cdots a_n$．

A4－022　求最大自然数 x，使得对每一个自然数 y，x 能整除 7^y+12^y-1．

【题说】1992 年友谊杯国际数学竞赛七年级题 1．

【解】当 y=1 时，$7^y+12y-1=18$．假设 $7^y+12y-1$ 是 18 的倍数，因为

$$7^{y+1}+12(y+1)-1=6\times 7^y+12+(7^y+12y-1)$$
$$=6\times(7^y+2)+(7^y+12y-1)$$
$$7^y+2\equiv 1+2\equiv 0 \pmod 3$$

所以，$7^{y+1}+12(y+1)-1$ 是 18 的倍数．

从而对一切自然数 y，18 整除 $7^y+12y-1$，所求的 x 即 18．

A4－023　证明：若 n 为大于 1 的自然数，则 2^n-1 不能被 n 整除．

【题说】1992 年友谊杯国际数学竞赛九年级题 2．

【证】若 n 是偶数，显然有 $n\nmid(2^n-1)$．若 n 是奇素数，由费马定理知 $2^n\equiv 2 \pmod n$，所以 $2^n-1\equiv 1 \pmod n$，即 $n\nmid(2^n-1)$．若 n 是奇合数，设 p 是 n 的最小素因子，由费马定理知 $2^{p-1}\equiv 1 \pmod P$；若 i 是使 $2^i\equiv 1 \pmod P$ 成立的最小自然数，则 $2\le i\le P-1$，从而 $i\nmid n$，设 $n=qi+r$，$0<r<i$，则 $2^n\equiv 2^r\not\equiv 1 \pmod p$，即 $p\nmid(2n-1)$，故 $n\nmid(2^n-1)$．

A4－024　当 n 为何正整数时，323 整除 $20^n+16^n-3^n-1$？

【题说】第三届（1993 年）澳门数学奥林匹克第一轮题 5．

【解】　　$323=17\times 19$

当 n 为偶数时，

$$20^n+16^n-3^n-1\equiv 1+3^n-3^n-1\equiv 0 \pmod{19}$$
$$20^n+16^n-3^n-1\equiv 3^n+1^n-3^n-1\equiv 0 \pmod{17}$$

所以此时 323 整除 $20^n+16^n-3^n-1$．

当 n 为奇数时，$20^n+16^n-3^n-1\equiv 3^n-1-3^n\equiv -2\not\equiv 0 \pmod{17}$，所以此时 323 不整除 $20^n+16^n-3^n-1$．

A4－025　设 x、y、z 都是整数，满足条件

$$(x-y)(y-z)(z-x)=x+y+z. \qquad (*)$$

试证：$x+y+z$ 可以被 27 整除．

【题说】第十九届（1993 年）全俄数学奥林匹克九年级二试题 5．

【证】（1）整数 x、y、z 被 3 除后余数都相同时，$27\mid(x-y)(y-z)(z-x)$，即 $27\mid x+y+z$．

（2）x、y、z 被 3 除后有且仅有两个余数相同，例如 $x\equiv y \pmod 3$，且 $y\not\equiv z \pmod 3$，这时 $3\nmid x+y+z$ 且 $3\mid(x-y)$，与（*）式矛盾，

可见情形（2）不会发生．

（3）x、y、z 被 3 除后余数都不相同，这时 $3|(x+y+z)$，但 $3\nmid(x-y)(y-z)(z-x)$．仍与（*）式矛盾，可见情况（3）也不会发生．

于是，x、y、z 除以 3 余数都相同，并且，$27|x+y+z$．

A4－026　对于自然数 n，如果对于任何整数 a，只要 $n|a^n-1$，就有 $n^2|a^n-1$，则称 n 具有性质 P．

（1）求证每个素数 n 都具有性质 P；

（2）求证有无穷多个合数也都具有性质 P．

【题说】第三十四届（1993 年）IMO 预选题．本题由印度提供．

【证】（1）设 n=P 为素数且 $p|(a^p-1)$，于是，$(a,p)=1$．因为

$$a^p-1=a(a^{p-1}-1)+(a-1)$$

由费马小定理 $p|(a^{p-1}-1)$．所以，$p|(a-1)$，即 $a\equiv1\pmod p$．因而

$$a^i\equiv1\pmod p,\ i=0,1,2,\cdots,p-1$$

将这 p 个同余式加起来即得

$$a^{p-1}+a^{p-2}+\cdots+a+1\equiv0\pmod p$$

所以，

$$p^2|(a-1)(a^{p-1}+a^{p-2}+\cdots+a+1)=a^p-1$$

（2）若 $n|(a^n-1)$，则 $(n,a)=1$．所以，$a^{\varphi(n)}\equiv1\pmod n$．又因 $a^n\equiv1\pmod n$，$a^{(n,\varphi(n))}\equiv1\pmod n$．如果 $(n,\varphi(n))=1$，则又有 $a\equiv1\pmod n$．于是，像（1）一样又可推得 $n^2|(a^n-1)$．因此，问题化为求无穷多个合数 n，使 $(n,\varphi(n))=1$．

对任何素数 $p\geq5$，取 $p-2$ 的素因数 q，并令 $n=pq$．这时 $\varphi(n)=(q-1)(p-1)$．因为 $q|(p-2)$，所以 $q\nmid(p-1)$．又因 $q\leqslant p-2<P$，故 $\nmid P(q-1)$．因此，有 $(n,\varphi(n))=1$．从而 n 具有性具有性质 P．显然 $p<n<p^2$．取大于 p^2 的素数，又可获得另一个具有性质 P 的合数．所以，有无穷多个合数 n 具有性质 p．

A4－027　证明：对于自然数 k、m 和 n．不等式 $[k,m]\cdot[m,n]\cdot[n,k]\geq[k,m,n]^2$ 成立．

（其中 $[a,b,c,\cdots,z]$ 表示数 a、b、c，…，z 的最小公倍数．）

【题说】第二十届（1994 年）全俄数学奥林匹克十年级（决赛）题 5．

【证】将 k、m、n 分解．设

$$k=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_l^{\alpha_l}$$

$$m=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_l^{\beta_l}$$

$$n=p_1^{\gamma_1}p_2^{\gamma_2}\cdots p_l^{\gamma_l}$$

其中 p_i（$i=1,2,\cdots,l$）为不同的素数，α_i、β_i、γ_i 为非负整数．

对任一个素因数 p_i，不妨设 $0\leq\alpha_i\leq\beta_i\leq\gamma_i$．在所要证明的不等式左边，$p_i$ 的指数为 $\beta_i+\gamma_i+\gamma_i=\beta_i+2\gamma_i$；而右边 p_i 的指数为 γ

$_i\cdot 2=2\gamma_i$.

$$p_i^{\beta_i+2\gamma_i}\geq p_i^{2\gamma_i}$$

因而所要证明的不等式成立．

A4－028 已知自然数a、b使得$\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}$是整数．证明：a与b的最大公约数不超过$\sqrt{a+b}$．

【题说】第二十届（1994 年）全俄数学奥林匹克十一年级（决赛）题 1．

【证】$\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}=\frac{a^2+a+b^2+b}{ab}$是整数．

设 d 是 a 与 b 的最大公约数．

因为 $d^2|ab$，所以 $d^2|a^2+b^2+a+b$．

因为 $d^2|a^2+b^2$，所以 $d^2|a+b$，

$$d\leq\sqrt{a+b}$$

A4－029　证明；所有形如 10017，100117，1001117，…的整数皆可被 53 整除．

【题说】第五十八届（1995 年）莫斯科数学奥林匹克八年级题 2．

【证】易知第一个数 10017 可被 53 整除，而数列中相邻二数的差

$$\underbrace{1001\cdots17}_{n\text{个}}-\underbrace{1001\cdots17}_{n-1\text{个}}=9\underbrace{010\cdots0}_{n\text{个}}$$

也可被 53 整除，所以数列中所有数皆可被 53 整除．

A4－030　证明：无论在数 12008 的两个 0 之间添加多少个 3，所得的数都可被 19 整除．

【题说】第五十八届（1995 年）莫斯科数学奥林匹克九年级题 7．

【证】我们有

$$\underbrace{1203\cdots308}_{n\text{个}}\cdots=\underbrace{126\cdots640}_{n+1\text{个}}-\underbrace{63\cdots32}_{n+1\text{个}}$$

$$=20\times\underbrace{63\cdots32}_{n+1\text{个}}-\underbrace{63\cdots32}_{n+1\text{个}}\ n+1\text{个}$$

$$=19\times\underbrace{63\cdots32}_{n+1\text{个}}$$

故结论成立．

A4－031　设 S={1，2，…，50），求最小自然数 k，使 S 的任一 k 元子集中都存在两个不同的数 a 与 b，满足（a+b）|ab．

【题说】1996 年中国数学奥林匹克（第十一届数学冬令营）题 2．

【解】设 a、b∈S，满足（a+b）|ab，令（a，b）=c，

则　$a=ca_1$，$b=cb_1$，（a_1，b_1）=1．

从而

$$c(a_1+b_1)=(a+b)|ab=c^2a_1b_1$$

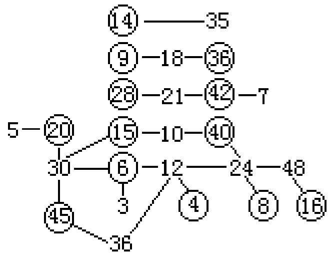
因为（a_1+b_1，a_1）=1，（a_1+b_1，b_1）=1，所以

$$(a_1+b_1)|c$$

由于 a、b 是 S 中不同的数，从而 a+b≤99 即 c（a_1+b_1）≤99，而

$a_1+b_1|c$，故有 $3\le a_1+b_1\le 9$.

在 $a_1+b_1=3$ 时，d=3，6，9，12，15，18，21，24，相应的（a，b）=（3，6），（6，12），（9，18），（12，24），（15，30），（18，36），（21，42），（24，48）．类似地，可得出 $a_1+b_1=4$，5，6，7，8，9 时的数对（a，b）．将每一对得到的 a、b 用线相连成右图．



S 中剩下的 25 个数与图上画圈的 13 个数所成的 38 元集，不含任一对 a、b 满足（a＋b）|ab．

另一方面，S 中任一集 R，如果元数≥39，那么图上至多 11 个数 $\notin$R，从而 12 对数（14，35），（9，18），（28，21），（42，7），（5，20），（30，15），（45，36），（6，3），（10，40），（12，4），（24，8），（48，16）中至少有一对数都属于 R，即 R 中有 a、b 满足（a＋b）|ab．

综上所述，K=39．

A4－032　设自然数 x、y、p、n 和 k 满足等式

$$x^n+y^n=p^k$$

证明：若 n（n＞1）是奇数，p 是奇素数，则 n 是数 p 的正整数幂．

【题说】第二十二届（1996 年）全俄数学奥林匹克九年级题 3．

【证】不失一般性，设 x 与 y 都不被 p 整除．因为 n 为奇数，所以

$$\frac{x^n+y^n}{x+y}=x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\cdots-xy^{n-2}+y^{n-1}$$

用 A 表示上式右边．由于 p＞2，因此 x、y 中至少有一个数大于 1．因为 n＞1，所以 A＞1．因为 A（x＋y）=p^k，所以 A 被 p 整除，数 x＋y 也被 p 整除．

于是得到

$$0\equiv A\equiv x^{n-1}-x^{n-2}(-x)+x^{n-3}(-x)^2-\cdots$$
$$-x(-x)^{n-2}+(-x)^{n-1}\pmod p$$

即 $nx^{n-1}\equiv 0\pmod p$，而 x 不被素数 P 整除，所以 n 被 p 整除．

对 n 的任一素因数 r，设 n=rs，则 $(x^s)^r+(y^s)^r=p^k$，根据上面所证，r 被 p 整除，所以 r=p，从而 n 是 p 的正整数幂．

A4－033　是否存在 3 个大于 1 的自然数，使得其中每个自然数的平方减 1，能分别被其余的每个自然数所整除？

【题说】第二十二届（1996 年）全俄数学奥林匹克十一年级题 5

【解】设 a≥b≥c 是满足题设条件的三个自然数．因为 a^2-1 被 b 整除，所以 a 与 b 互素．又 c^2-1 能分别被 a、b 整除，因而被 ab 整除，于是 $c^2-1\ge ab$．另一方面由 a≥c 及 b≥c 得 $ab\ge c^2$，矛盾．所以满足题设的数不存在．

A4－034　是否存在三个相异的素数 p、q、r，使 qr 整除 p^2+d，

rp 整除 q^2+d，pq 整除 r^2+d，其中

（1）d=10；

（2）d=11．

【题说】1996 年城市数学联赛低年级较高水平题 2．

【解】（1）满足条件的素数不存在，事实上，若 p、q、r 满足条件，不妨设 $p>q>r$．则 $r\neq 2$（若不然，$pq|14=r^2+d$，与 $q>2$ 相矛盾），从而 $q\geq r+2$，又 $3^2+10=19$ 是素数，从而 p、q、r 不可能是三个连续奇数（因三个连续奇素数中必有一个是 3），所以 $p\geq r+6$，但

$$r^2+10\geq pq\geq (r+6)(r+2)=r^2+8r+12$$

这是不可能的．

（2）p=5，q=3，r=2 满足条件．

A5 综 合 题

A5－001 证明：对任何自然数n，分式$\frac{21n+4}{14n+3}$不可约简．

【题说】第一届（1959 年）国际数学奥林匹克题 1．本题由波兰提供．

【证】因为 3（14n＋3）－2（21n＋4）=1，所以 14n＋3 与 21n＋4 的最大公约数为 1．故分式不可约简．

[别证]（21n＋4，14n＋3）=（21n＋4－（14n＋3），（14n＋3））＝（7n＋1，14n＋3－2（7n＋1））=（7n＋1，1）=1．

A5－002 在 n×n（n 为奇数）的方格表里的每一个方格中，任意填上一个＋1 或－1，在每一列的下面写上该列所有数的乘积；在每行的右边写上该行所有数的乘积，证明：这 2n 个乘积的和不等于 0．

【题说】1962 年全俄数学奥林匹克八、九年级题 5．

【证】设 p_1，p_2，…，p_n 是各行数字乘积，q_1，q_2，…，q_n 是各列数字乘积，它们都是＋1 或－1，而应有 $p_1p_2\cdots p_n=q_1q_2\cdots q_n$，所以 p_1、p_2、…、p_n、q_1、q_2…、q_n 中应有偶数个－1．设为 2k 个，则其中＋1 的个数为 2（n－k）．由于 n 为奇数，k≠n－k，所以

$$p_1+p_2+\cdots+p_n+q_1+q_2+\cdots+q_n\neq 0$$

A5－003 已知任意 n 个整数 a_1，a_2，…，a_n，由此得到一列新的数．

$$\frac{a_1+a_2}{2}，\frac{a_2+a_3}{2}，\cdots，\frac{a_{n-1}+a_n}{2}，\frac{a_n+a_1}{2}$$

由这 n 个数依同样法则又得到一列新数，并如此做下去．假如所有这些新数都是整数，证明原来所给各数 a_i（i=1，2，…，n）都相等．

【题说】1964 年全俄数学奥林匹克八年级题 4．n 为偶数时有一种例外情况使结论不成立．

【证】对于任给的 n 个数 x_i（1≤i≤n），如果它们不全相等，那么施行如上运算若干次后得的新数中，最大值要变小，最小值要变大，因此，如若不能得出一组 n 个相同的数的话，其中最大数不能永远是整数．

假设从一组 n 个数 z_1，z_2，…，z_n 得到 n 个相同的数

$$\frac{z_1+z_2}{2}=\frac{z_2+a_3}{2}=\cdots=\frac{z_n+z_1}{2}$$

那么，当 n 是奇数时，易知 $z_1=z_2=\cdots=z_n$；当 n 是偶数时，z_1，…，z_n 中奇数项相等，偶数项相等．

若 z_i（1≤i≤n）由 y_i（1≤i≤n）经运算得出，且设

$$\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{y_3+y_4}{2}=\cdots=\frac{y_{n-1}+y_n}{2}=a$$

$$\frac{y_2+y_3}{2}=\frac{y_4+y_5}{2}=\cdots=\frac{y_n+y_1}{2}=b$$

则有 $$2(y_1+y_2+\cdots+y_n)=2na$$

及 $$2(y_2+y_3+\cdots+y_n+y_1)=2nb$$

从而 $2na=2nb$，$a=b$

由此得出 $z_1=z_2=\cdots=z_n=a$

因此，我们的命题成立．

仅当 n 为偶数时，有一种例外情况：n 个整数 a，b，a，b，…，a，b，（a 与 b 的奇偶性相同，a≠b）满足题中条件，但结论不成立．

A5－004　某整数集合 A 既含有正整数，也含有负整数，而且如果 a 和 b 是它的元素，那么 2a 和 a＋b 也是它的元素，证明：集合 A 包含它的任意两个元素之差．

【题说】1967 年匈牙利数学奥林匹克题 1．

【证】不难证明：如果整数 c 是集合 A 的元素，而 n 是自然数，那么 nc 也属于集合 A．

因为集合 A 既含有正整数，也含有负整数，根据最小数原理，集合 A 存在最小的正整数 a 和绝对值最小的负整数 b．这两个数的和 a＋b 也应该属于集合 A，而且满足不等式．

$$b<a+b<a$$

但是集合 A 不含有小于 a 的正数和大于 b 的负数，所以 a＋b 只能等于 0．因此，数 0 属于集合 A，且 b=－a．根据前面所证，集合 A 包含数 a 的所有整数倍．

设 x∈A，则由带余数除法，存在整数 q、r，使 x=qa＋r（0≤r＜a）．于是 r=x＋（－qa）∈A．由于 0≤r＜a，必有 r=0．即 A 中的数均为 a 的整数倍．

既然集合 A 的元素都是 a 的整数倍，因此集合 A 的任意两个元素之差也是元素 a 的整数倍，因而属于集合 A．

A5－005　证明：任何不大于 n！的自然数，都能表示成不多于 n 个数的和，在这些加数中，没有两个是相同的，而且任何一个都是 n！的因数．

【题说】第二届（1968 年）全苏数学奥林匹克九年级题 5．

【证】对 n 用数学归纳法，

n=1 时，显然．

设 n 时结论真．

对 a≤（n＋1）！，将 a 除以 n＋1 得 a=d（n＋1）＋r，这里 d≤n！，0≤r＜n＋1．

由归纳假设，$d=d_1+d_2+\cdots+d_l$，l≤n．且所有 d_i 是 n！的不同因数（i=1，2，…，l）．

于是 $a=d_1(n+1)+\cdots+d_l(n+1)+r$

这个和中的加数不多于 n＋1 个，其中每一个都是（n＋1）！的因数，且全不相等．

A5－006　找出具有下列性质的所有正整数 n：设集合{n，n＋1，n＋2，n＋3，n＋4，n＋5}可以划分成两个无公共元素的非空子集，使得一个子集中所有元素的乘积等于另一子集中所有元素的乘积．

【题说】第十二届（1970 年）国际数学奥林匹克题 4．本题由捷克斯洛伐克提供．

【解】假定 n 具有所述性质，那么六个数 n，n＋1，n＋2，n＋3，n

＋4,n＋5 中任一个素因数 p 必定还整除另一个数(在另一个子集中).因而 p 整除这两个数的差，所以 p 只能为 2，3，5.

再考虑数 n+1，n+2，n+3，n+4.它们的素因数不能为 5（否则上面的六个数中只有一个被 5 整除），因此只能为 2 与 3.这四个数中有两个为连续奇数.它们必须是 3 的正整数幂（因为没有其它因数），但这样两个幂的差被 3 整除，决不能等于 2.矛盾！这就说明具有所述性质的 n 是不存在的.

A5－007　证明：任何一个正的既约真分数 m／n 可以表示成两两互异的自然数的倒数之和.

【题说】1972 年～1973 年波兰数学奥林匹克三试题 5.

【证】对 m 用数学归纳法.

m=1 时，显然成立.假设对小于 m 的自然数命题成立，我们证明它对 m＞1 也成立.为此，设

$$n=qm+r\ (0\le r<m) \qquad (1)$$

因为 m／n 是正的既约真分数，所以 q＞0，r＞0.

$$\frac{m}{n}-\frac{1}{q+1}=\frac{(q+1)m-n}{n(q+1)}=\frac{m-r}{n(q-1)} \qquad (2)$$

又因 0＜m－r＜m，所以由归纳假设，

$$\frac{m-r}{n(q+1)}=\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\cdots+\frac{1}{t_k} \qquad (3)$$

其中 $t_1<t_2<\cdots<t_k$ 为自然数.

因为 n＞m，所以由（3）知：$t_1>q+1$，将（3）代入（2）得

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{q+1}+\frac{1}{t_1}+\cdots+\frac{1}{t_k}$$

所以，命题对任何自然数 m 都成立.

A5－008　8 分和 15 分的邮票可以无限制地取用.某些邮资额数，例如 7 分、29 分，不能够刚好凑成.求不能凑成的最大额数 n，即大于 n 的额数都能够凑成，并证明你的答案.

【题说】第六届（1974 年）加拿大数学奥林匹克题 6.

【解】因为

98=8·1＋15·6
99=8·3＋15·5
100=8·5＋15·4
101=8·7＋15·3
102=8·9＋15·2
103=8·11＋15·1
104=8·13＋15·0
105=8·0＋15·7

比 105 大的数，可用以上 8 数加上 8 的适当倍数而得到.而 97 不能用 8 与 15 凑成.故所求的 n 值为 97.

【注】一般地，当正整数 p、q 互质时，不能用 p、q 凑成的最大整数 pq－p－q.

A5－009　若整数 n 可表示成

$$n=a_1+a_2+\cdots+a_k \qquad (1)$$

其中 a_1，a_2，…，a_k 是满足

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}=1 \qquad (2)$$

的正整数（不一定相异），那么，我们称 n 是好数，已知整数 33 至 73 是好数，证明：每一个不小于 33 的整数都是好数．

【题说】第七届（1978 年）英国数学奥林匹克题 3．

【证】我们改证命题

p_n：整数 n，n＋1，…，2n＋7 都是好数．

已知 p_{33} 为真．

假设 p_n 成立，那么 n 是好数，即存在正整数 a_1，a_2，…，a_k 使（1）、（2）成立，将（2）乘以 $\frac{1}{2}$，再加 $\frac{1}{2}$，得

$$\frac{1}{2a_1}+\frac{1}{2a_2}+\cdots+\frac{1}{2a_k}+\frac{1}{2}=1$$

从而

$$\frac{1}{2a_1}+\frac{1}{2a_2}+\cdots+\frac{1}{2a_k}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$$

$$\frac{1}{2a_1}+\frac{1}{2a_2}+\cdots+\frac{1}{2a_k}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$$

这表明 $2(a_1+a_2+\cdots+a_k)+4+4=2n+8$

$2(a_1+a_2+\cdots+a_k)+3+6=2n+9$

也是好数，因此 P_n 成立．根据数学归纳法，对所有正整数 n≥33，P_n 成立，原命题因而得证．

A5－010　设 $f(x)=x^2-x+1$．证明：对任意的 m 个自然数（m＞1），f（m），f（f（m）），…两两互素．

【题说】第十二届（1978 年）全苏数学奥林匹克十年级题 1．

【证】因 f（0）=1，所以多项式

$$P_n(x)=\underbrace{f(f(f\cdots}_{n} f(x)\cdots))$$

的常数项 $p_n(0)=1$．

因而，对于任意的整数 m，$p_n(m)$ 除以 m，余数等于 1．

用 $m'=p_k(m)$ 代替 m，就得到 $p_{n+k}(m)=p_n(m')$ 与 $m'=p_k(m)$ 互素．

A5－011　自然数 n 的数字和用 S（n）来表示．

（1）是否存在一个自然数 n，使得 n＋s（n）=1980；

（2）证明：在任意两个连续的自然数之中，至少有一个能表示成 n＋S（n）的形式，其中 n 为某个自然数．

【题说】第十四届（1980 年）全苏数学奥林匹克八年级题 6．

【解】（1）当 n=1962 时，n＋S（n）=1980．

（2）令 $S_n=n+S(n)$，如果 n 的末位数字是 9，则 $S_{n+1}<S_n$；否则 $S_{n+1}=S_n+2$．对任意两个连续的自然数 m（m≥2），m＋1，在 $S_n<m$ 的 n

中，选择最大的，并用 N 表示．这时 $S_{N+1} \geq m > S_N$，所以 N 的末位数字不是 9，从而 $S_{N+1}=S_{N+2}$．由 $m \leq S_{N+1}=S_{N+2} < m+2$，即得 $S_{N+1}=m$ 或 $S_{N+1}=m+1$．

A5－012　设 n 为≥2 的自然数．证明方程 $x^n+1=y^{n+1}$ 在 x 与 n+1 互质时无正整数解．

【题说】1980 年芬兰等四国国际数学竞赛题 3．本题由匈牙利提供．

【证】$x^n=y^{n+1}-1=(y-1)(y^n+y^{n-1}+\cdots+1)$．如果质数 p 是 y－1 与 $y^n+y^{n-1}+\cdots+1$ 的公因数，则 p 整除 x^n，从而 p 是 x 的因数．但 y 除以 p 余 1，所以 $y^n+y^{n-1}+\cdots+1$ 除以 p 与 n+1 除以 p 的余数相同，即 n+1 也被 p 整除，这与 x、n+1 互质矛盾．因此 y－1 与 $y^n+y^{n-1}+\cdots+1$ 互质，从而 $y-1=s^n$，$y^n+y^{n-1}+\cdots+1=t^n$，其中 s、t 为自然数，st=x．但 $y^n < y^n+y^{n-1}+\cdots+1 < (y+1)^n$，所以 $y^n+y^{n-1}+\cdots+1 \neq t^n$，矛盾，原方程无解．

A5－013　设 a、b、c 是两两互素的正整数，证明：2abc－be－ac－ab 是不能表示为 xbc＋yac＋zab 形式的最大整数（其中 x、y、z 是非负整数）．

【题说】第二十四届（1983 年）国际数学奥林匹克题 3．

【证】熟知在 a、b 互素时，对任意整数 n 有整数 x、y，使 ax＋by=n．当 n＞ab－a－b 时，首先取 0≤x＜b（若 x＞b 则用 x－b、y＋a 代替 x、y），我们有

$$by=n-ax>ab-a-b-ax\geq ab-a-b-a(b-1)=-b$$

所以 y＞－1 也是非负整数．即 n＞ab－a－b 时，有非负整数 x、y 使 ax＋by=n．

因为 a、b、c 两两互素，所以（bc，ac，ab）=1．

令（bc，ac）=d．则（ab，d）=1，所以方程

$$abz+dt=n \qquad (1)$$

有整数解，并且 0≤z＜d（若 z＞d 则用 z－d、t＋ab 代替 z、t）．

设 $bc=da_1$，$ac=db_1$，那么 $(a_1, b_1)=1$．在 n＞2abc－bc－ca－ab 时，

$$t=\frac{n-abz}{d}\geq\frac{n-ab(d-1)}{d}>\frac{abc^2}{d^2}-\frac{bc}{d}-\frac{ac}{d}$$

即

$$t>a_1b_1-a_1-b_1$$

从而方程

$$a_1x+b_1y=t \qquad (2)$$

有非负整数解（x，y）．

由（1）与（2）消去 t 可得

$$bcx+acy+abz=n$$

有非负整数解．

另一方面，若有非负整数 x、y、z 使

$$2abc-bc-ac-ah=xbc+yac+zab$$

则

$$bc(x+1)+ac(y+1)+ab(z+1)=2abc$$

于是应有，a 整除 bc（x＋1），因（a，bc）=1．所以，a 整除 x＋1，从而 c≤x＋1．同理有，b≤y＋1，c≤z＋1．因此

$$3abc=bca+acb+abc\leq bc(x+1)+ac(y+1)+ab(z+1)=2abc$$

由于 a、b、c 都是正整数，这是不可能的，故 2abc－bc－ca－ab 不能表成 xbc＋yca＋zab（x、y、z 为非负整数）的形式．

A5－014　能否选择 1983 个不同的正整数都不大于 10^5，且其中没有三个正整数是算术级数中的连续项，并证明你的论断．

【题说】第二十四届（1983 年）国际数学奥林匹克题 5．本题由波兰提供．

【解】考虑三进制表示中，不含数字 2 并且位数≤11 的数所成的集合 M．

显然 $|M|=2^{11}-1>1983$．M 中最大的数为

$$3^{10}+3^{9}+\cdots+3+1=\frac{1}{2}(3^{11}-1)=88573<10^{5}$$

若 x、y、z∈M 并且 x＋z=2y，则由于 2y 的各位数字为 0 或 2，所以 x＋z 的各位数字也为 0 或 2．从而 x、z 在同一位上的数字同为 0 或同为 2，即 x=z．因此 M 中任三个互不相同的数不成等差数列．

于是回答是肯定的，M 即是一例．

A5－015　将 19 分成若干个正整数之和，使其积为最大．

【题说】1984 年上海市赛一试题 2（9）．

【解】由于分法只有有限种，其中必有一种分法，分成的各数的积最大．我们证明这时必有：

（1）分成的正整数只能是 2 和 3．

因为 4=2＋2，且 4=2×2，若分出的数中有 4，拆成两个 2 其积不变；若分出的数中有数 a≥5．则只要把 a 拆成 2 与 a－2，由 2（a－2）＞a 知道积将增大．

（2）分成的正整数中，2 最多两个．

若 2 至少有 3 个，则由 3＋3=2＋2＋2 及 3×3＞2×2×2 可知，将 3 个 2 换成 2 个 3，积将增大．

所以，将 19 分成 5 个 3 与 2 个 2 的和，这些数的积 $3^5\times2^2=972$ 是最大的．

A5－016　设 a、b、c、d 是奇整数，0＜a＜b＜c＜d，且 ad=bc．证明：如果对某整数 k 和 m 有 $a+d=2^k$ 和 $b+c=2^m$，那末 a=1．

【题说】第二十五届（1984 年）国际数学奥林匹克题 6．

【证】因为 $a[(a+d)-(b+c)]$

$=a^2+ad-ab-ac=a^2+bc-ab-ac=(a-b)(a-c)>0$

所以 a＋d＞b＋c，即 $2^k>2^m$，k＞m．

又由 ad=bc，有　　　　$a(2^k-a)=b(2^m-b)$

$$2^m(b-2^{k-m}a)=b^2-a^2=(b+a)(b-a)$$

可知 2^m 整除（b＋a）（b－a）．但 b＋a 和 b－a 不能都被 4 整除（因为它们的和是 2b，而 b 是奇数），所以 2^{m-1} 必整除 b＋a 或 b－a 之一．

因为 $b+a<b+c=2^m$，所以 $b+a=2^{m-1}$ 或 $b-a=2^{m-1}$．

因为 a、b 是奇数，它们的公因数也是奇数，且是 b＋a 和 b－a 的因数，从而是 2^{m-1} 的奇因数，即 1．所以 a 与 b 互质，同理 a 与 c 也互质．但由 ad=bc，知 a 能整除 bc，故 a=1．

A5－017　对正整数 n≥1 的一个划分π，是指将 n 分成一个或若干个正整数之和，且按非减顺序排列（如 n=4，划分π有 1＋1＋1＋1，1＋

1＋2，1＋3，2＋2 及 4 共 5 种）．对任一划分π，定义 A（π）为划分π中数 1 出现的个数；B（π）为π中出现不同的数的个数（如对 n=13 的一个划分π：1＋1＋2＋2＋2＋5 而言，A（π）=2，B（π）=3）．求证：对任意正整数 n，其所有划分π的 A（π）之和等于 B（π）之和．

【题说】第十五届（1986 年）美国数学奥林匹克题 5．

【证】设 p（n）表示 n 划分的个数．那么第一个位置是 1 的划分有 p（n－1）个，第二个位置上是 1 的（当然它第一个位置上也是 1）的划分有 p（n－2）个．等等．第 n－1 个位置上是 1 的划分有 P（1）=1 个，第 n 个位置上是 1 的只有 1 种．若令 P（0）=1．则所有划分中含 1 的数 A（π）之和等于 P（n－1）＋P（n－2）＋…＋P（1）＋P（0）．

另一方面，从含有 1 的每个划分中拿去一个 1，都成为一个（n－1）的划分，共拿去 P（n－1）个 1．再从含有 2 的每个划分中拿去一个 2，都成为 n－2 的划分，共拿去 P（n－2）个 2．…从含有（n－1）的划分（只有一个：1＋（n－1），拿去（n－1），即拿去了 P（1）=1 个 1．再加上含有 n 的一个划分，n 为 P（0）=1 个，故 B（π）总和也等于 P（n－1）＋P（n－2）＋…＋P（1）＋P（0）．

因此，A（π）=B（π）．

A5－018　在直角坐标系 xoy 中，点 A（x_1，y_1）和点 B（x_2，y_2）的坐标均为一位正整数．OA 与 x 轴正方向的夹角大于 45°，OB 与 x 轴正方向的夹角小于 45°，B 在 x 轴上的射影为 B'，A 在 y 轴上的射影为 A'，△OB'B 的面积比△OA'A 的面积大 33.5．由 x_1、y_1、x_2、y_2组成的四位数$\overline{x_1x_2y_2y_1}=x_1\cdot 10^3+x_2\cdot 10^2+y_2\cdot 10+y_1$．试求出所有这样的四位数，并写出求解过程．

【题说】1985 年全国联赛二试题 1．

【解】由已知$\frac{1}{2}x_2y_2-\frac{1}{2}x_1y_1=33.5$，因为$x_1>0$，$y_1>0$．所以$x_2y_2>67$．又由于 x_2、y_2 均为一位正整数，所以 $x_2y_2=72$ 或 $x_2y_2=81$．因为∠BCB'<45°，所以 $x_2>y_2$．故由 $x_2y_2=72$ 可知 $x_2=9$，$y_2=8$．此时 $x_1y_1=5$．同样可求得 $x_1=1$，$y_1=5$．

综上可知，1985 为符合条件的唯一的四位数．

A5－019　设 n、k 为互素自然数，0<k<n，在集合 M={1，2，…，n－1}（n≥3）中的各数，要么着蓝色，要么着白色，已知

（1）对于各 i∈M，i 和 n－i 同色；

（2）对于各 i∈M，i≠k，i 和|i－k|同色．

证明：在 M 中的所有数均同色．

【题说】第二十六届（1985 年）国际数学奥林匹克题 2．本题由澳大利亚提供．

【证】设 $lk=nq_l+r_l$（l=1，2，…，n－1；1≤r_l≤n－1）．若 $r_l=r_{l'}$，则（l－l'）k 被 n 整除，但 n、k 互素，所以 n|（l－l'）这表明在 l=1，2…，n－1 时，r_1，r_2，…，r_{n-1} 互不相同，所以 M={r_1，r_2，…，r_{n-1}}．

若 r_l<n－k，即 r_l＋k<n，则 $r_{l+1}=r_l+k$，由条件（2），r_{l+1} 与 $r_{l+1}-k=r_l$ 同色．

若 $r_l \geq n-k$，即 $r_l+k\geq n$，则 $r_{l+1}=r_l+k-n$，于是 r_{l+1} 与 $k-r_{l+1}=n-r_l$ 同色．再由条件（1）$n-r_l$ 与 r_l 同色．

综上所述，r_{i+1} 与 r_l 同色（$l=1,2,\cdots,n-2$），因此 M 中所有数同色．

A5－020　如 n 是不小于 3 的自然数，以 f（n）表示不是 n 的因数的最小自然数（例如 f（12）=5）．如果 f（n）≥3，又可作 f（f（n））．类似地，如果 f（f（n））≥3，又可作 f（f（f（n）））等等．如果 $\underbrace{f(f(f\cdots f}_{k个f}(n)\cdots))$，就把 k 叫做 n 的“长度”．如果用 L_n 表示 n 的长度，试对任意的自然数 n（n≥3），求 L_n 并证明你的结论．

【题说】第三届（1988 年）全国冬令营赛题 6．

【解】很明显，若奇数 n≥3，那么 f（n）=2，因此只须讨论 n 为偶数的情况，我们首先证明，对任何 n≥3，f（n）$=p^s$，这里 P 是素数，s 为正整数．假若不然，若 f（n）有两个不同的素因子，这时总可以将 f（n）表为 f（n）=ab，其中 a、b 是大于 1 的互素的正整数．由 f 的定义知，a 与 b 都应能整除 n，因（a，b）=1，故 ab 也应整除 n，这与 f（n）=ab 矛盾．所以 f（n）$=p^s$．

由此可以得出以下结论：

（1）当 n 为大于 1 的奇数时，f（n）=2，故 $L_n=1$；

（2）设 n 为大于 2 的偶数，如果 f（n）=奇数，那么 f（f（n））=2，这时 $L_n=2$；如果 f（n）$=2^s$，其中自然数 s≥2，那么 f（f（n））=f（2^s）=3，从而 f（f（f（n）））=f（3）=2，这时 $L_n=3$．

A5－021　一个正整数，若它的每个质因数都至少是两重的（即在这数的分解式中每个质因数的幂指数都不小于 2），则称该正整数为“漂亮数”．相邻两个正整数皆为“漂亮数”，就称它们是一对“孪生漂亮数”，例如 8 与 9 就是一对“孪生漂亮数”．请你再找出两对“孪生漂亮数”来．

【题说】1989 年北京市赛高一题 5．

【解】设（n，n＋1）是一对“孪生漂亮数”，则 4n（n＋1）是漂亮数，并且

$$4n(n+1)+1=4n^2+4n+1=(2n+1)^2$$

是平方数，而平方数必为漂亮数．

所以，（4n（n＋1）、4n（n＋1）＋1）也是一对“孪生漂亮数”．

于是，取 n=8，得一对“孪生漂亮数”（288，289）．

再取 n=288，得另一对“孪生漂亮数”（332928，332929）．

A5－022　一个自然数若能表为两个自然数的平方差，则称这个自然数为“智慧数”比如 $16=5^2-3^2$，16 就是一个“智慧数”．在自然数列中从 1 开始数起，试问第 1990 个“智慧数”是哪个数？并请你说明理由．

【题说】1990 年北京市赛高一复赛题 4．

【解】显然 1 不是“智慧数”，而大于 1 的奇数 $2k+1=(k+1)^2-k^2$，都是“智慧数”．

$$4k=(k+1)^2-(k-1)^2$$

可见大于 4 且能被 4 整除的数都是“智慧数”而 4 不是“智慧数”，由于 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$（其中 x、y∈N），当 x，y 奇偶性相同时，(x＋y)(x－y) 被 4 整除．当 x，y 奇偶性相异时，(x＋y)(x－y) 为奇数，所以形如 4k＋2 的数不是“智慧数”

在自然数列中前四个自然数中只有 3 是“智慧数”．此后每连续四个数中有三个“智慧数”．

由于 1989=3×663，所以 2656=4×664 是第 1990 个“智慧数”．

A5－023　有 n（≥2）名选手参加一项为期 k 天的比赛，每天比赛中，选手的可能得分数为 1，2，3，…，n，且没有两人的得分数相同，当 k 天比赛结束时，发现每名选手的总分都是 26 分．试确定数对（n，k）的所有可能情况．

【题说】第二十二届（1990 年）加拿大数学奥林匹克题 1．

【解】所有选手得分总和为

$$kn(n+1)/2=26n，即 k(n+1)=52$$

（n，k）取值可以是（3，13），（12，4），（25，2）及（51，1），但最后一种选择不满足要求．

当（n，k）=（3，13）时，3 名选手 13 天得分配置为（1，2，3）＋2（2，3，1）+2（3，1，2）+3（1，3，2）+2（3，2，1）+3（2，1，3）=（26，26，26）．

当（n，k）=（12，4）时，12 名选手 4 天得分配置为 2（1，2，…，11，12）+2（12，11，…，2，1）=（26，26，…，26）．

当（n，k）=（25，2）时，25 名选手两天得分配置为（1，2，…，24，25）＋（25，24，…，2，1）=（26，26，…，26）．

A5－024　设 x 是一个自然数．若一串自然数 $x_0=1$，x_1，x_2，…，x_{t-1}，$x_t=x$，满足 $x_{i-1}<x_i$，$x_{i-1}|x_i$，i=1，2，…，t．则称 $\{x_0，x_1，x_2，…x_t\}$ 为 x 的一条因子链，t 为该因子链的长度．T（x）与 R（x）分别表示 x 的最长因子链的长度和最长因子链的条数．

对于 $x=5^k\times31^m\times1990^n$（k，m，n 是自然数）试求 T（x）与 R（x）．

【题说】第五届（1990 年）全国冬令营赛题 2．

【解】设 x 的质因数分解式为

$$x=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n}$$

其中 p_1、p_2、…、p_n 为互不相同的质数，α_1、α_2、…、α_n 为正整数．

由于因子链上，每一项至少比前一项多一个质因数，所以 T（x）≤ $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$．

将 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 个质因数（其中 α_1 个 p_1，α_2 个 p_2，…，α_n 个 p_n）依任意顺序排列，每个排列产生一个长为 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 的因子链（x_1 为排列的第一项，x_2 为 x_1 乘排列的第二项，x_3 为 x_2 乘第三项，…），因此 T（x）=$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$，R（x）即排列

的个数 $\dfrac{(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!}$．

对于 $x=5^k\times31^m\times1990^n=2^n\times5^{k+n}\times31^m\times199^n$，

$$T(x)=3n+k+m$$

$$R(x)=\frac{(3n+k+m)!}{(n!)^2\cdot m!\cdot(k+n)!}$$

A5－025　证明：若

$$\frac{x}{y+z+t}=\frac{y}{z+t+x}=\frac{z}{t+x+y}=\frac{t}{x+y+z}$$

则

$$\frac{x+y}{z+t}+\frac{y+z}{t+x}+\frac{z+t}{x+y}+\frac{t+x}{y+z} \qquad (1)$$

为整数．

【题说】1990 年匈牙利阿拉尼·丹尼尔数学竞赛低年级普通水平题 1．

【证】若 $x+y+z+t=0$，则由题设条件可得

$$\frac{x+y}{z+y}=\cdots=\frac{t+x}{y+z}=-1$$

于是此时（1）式的值等于－4．

若 $x+y+z+t\neq0$，则

$$\frac{x}{y+z+y}=\cdots=\frac{t}{x+y+z}=\frac{x+y+z+t}{3(x+y+z+t)}$$

由此可得 $x=y=z=t$．于是（1）式的值等于 4．

A5－026　课间休息时，n 个学生围着老师坐成一圈做游戏，老师按顺时针方向并按下列规则给学生们发糖：他选择一个学生并给一块糖，隔一个学生给下一个学生一块，再隔 2 个学生给下一个学生一块，再隔 3 个学生给下一个学生一块…．试确定 n 的值，使最后（也许绕许多圈）所有学生每人至少有一块糖．

【题说】1991 年亚太地区数学奥林匹克题 4．

【解】问题等价于确定正整数 n，使同余式

$$1+2+3+\cdots+x\equiv a \pmod n \qquad (1)$$

对任意正整数 a 都有解．

我们证明当且仅当 n 是 2 的方幂时，（1）式总有解．

若 n 不是 2 的方幂，则 n 有奇素因数 p．

由于 1，1＋2，1＋2＋3，…，1＋2＋…＋（p－1），1＋2＋…＋p 至多表示 mod p 的 p－1 个剩余类（最后两个数在同一个剩余类中），所以 1＋2＋…＋x 也至多表示 mod p 的 p－1 个剩余类，从而总有 a 使 $1+2+\cdots+x\equiv a \pmod p$ 无解，这时（1）也无解．

若 $n=2^k$（$k\geq1$），考察下列各数：

$$0\times1,\ 1\times2,\ 2\times3,\ \cdots,\ (2^k-1)2^k \qquad (2)$$

设 $x(x+1)\equiv y(y+1)\pmod{2^{k+1}}$，其中 $0\leq x,\ y\leq 2k-1$，则

$$x^2-y^2+x-y\equiv(x-y)(x+y+1)\equiv0 \pmod{2^{k+1}}$$

因为 $x-y$，$x+y+1$ 中，一个是奇数，一个是偶数，所以 $x-y\equiv0\pmod{2^{k+1}}$ 或 $x+y+1\equiv0\pmod{2^{k+1}}$

由后者得：

$$2^{k+1}\leq x+y+1\leq 2^k-1+2^k-1+1=2^{k+1}-1$$

矛盾．故　$x\equiv y\pmod{2^{k+1}}$，即 $x=y$．

因此（2）中的 2^k 个偶数 mod 2^{k+1} 互不同余，从而对任意整数 a，方程 $x(x+1)\equiv 2a\pmod{2n}$ 有解，即（1）有解．

A5－027　设 S={1，2，3，…，280}．求最小的自然数 n 使得 S 的每个有 n 个元素的子集都含有 5 个两两互素的数．

【题说】第三十二届（1991 年）国际数学奥林匹克题 3．本题由中国提供．

【解】令 A_i= {S 中一切可被 i 整除的自然数}，i=2，3，5，7．记 $A=A_2\cup A_3\cup A_5\cup A_7$，利用容斥原理，容易算出 A 中元素的个数是 216．由于在 A 中任取 5 个数必有两个数在同一个 A_i 之中，从而他们不互素．于是 $n\geq 217$．

另一方面，令

B_1=（1 和 S 中的一切素数}

B_2=（2^2，3^2，5^2，7^2，11^2，13^2}

B_3= {2×131，3×89，5×53，7×37，11×23，13×19}

B_4= {2×127，3×83，5×47，7×31，11×19，13×17}

B_5={2×113，3×79，5×43，7×29，11×17}

B_6={2×109，3×73，5×41，7×23，11×13}

易知 B_1 中元素的个数为 60．令 $B=B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4\cup B_5\cup B_6$，则 B 中元素的个数为 88，S－B 中元素的个数为 192．在 S 中任取 217 个数，由于 217－192=25＞4×6，于是存在 i（$1\leq i\leq 6$），使得这 217 个数中有 5 个数在 Bi 中．显然这 5 个数是两两互素的，所以 $n\leq 217$．

于是 n=217．

A5－028　对于每个正整数 n，以 s（n）表示满足如下条件的最大正整数：对于每个正整数 $k\leq s(n)$，n^2 都可以表示成 k 个正整数的平方之和．

1．证明：对于每个正整数 $n\geq 4$，都有 $s(n)\leq n^2-14$；

2．试找出一个正整数 n，使得 $s(n)=n^2-14$；

3．证明：存在无限多个正整数 n，使得 $s(n)=n^2-14$．

【题说】第三十三届（1992 年）国际数学奥林匹克题 6．本题由英国提供．

【解】用反证法证明如下：

假设对某个 $n\geq 4$，有 $s(n)\geq n^2-14$，则存在 $k=n^2-13$ 个正整数 a_1，a_2，…，a_k，使得

$$n^2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2$$

于是就有

$$\sum_{i=1}^{k}(a_i^2-1)=13 \qquad (1)$$

从而

$$0\leq a_i^2-1\leq 13$$

$a_i^2-1\in\{0,3,8\}$，设在a_i^2-1（$i=1,2,\cdots,k$）中有a个0，b个3，c个8．于是就有

$$3b+8c=13$$

这表明c=0或1；但相应的b不为整数，矛盾．

2.每个大于13的正整数m可以表为3b＋8c,其中b、c为非负整数.事实上，若m=3s＋1，则s≥5，m=3（s－5）＋2×8．若m=3s＋2，则s≥4，m=3（s－2）＋8．

于是若m满足$14\leq m\leq\frac{3}{4}n^2$，则对于上面的b、c，$m+b+c\leq m+\frac{1}{3}m\leq n^2$，

由

$$n^2=\underbrace{1^2+\cdots+1^2}_{(n^2-m-b-c)个}+\underbrace{2^2+\cdots+2^2}_{b个}+\underbrace{3^2+\cdots+3^2}_{c个}$$

即知n^2可表为n^2-m个平方和，从而n^2可表为n^2-14，n^2-15，…，$[\frac{1}{4}n^2]+1$个平方和．

对于n=13，有

$$n^2=12^2+5^2=12^2+4^2+3^2=8^2+8^2+5^2+4^2$$

由于8^2可表为4个4^2的和，4^2可表为4个2^2的和，2^2可表为4个1^2的和，所以$13^2=8^2+8^2+5^2+4^2$可表为4，7，10，…，43个平方的和，又由于$5^2=4^2+3^2$，13^2可表为5，8，11，…，44个平方的和．

由于12^2可表为4个6^2的和，6^2可表为4个3^2的和，所以$13^2=12^2+4^2+3^2$可表为3，6，9，…，33个平方的和．

又$13^2=\underbrace{3^2+3^2+\cdots+3^2}_{17个}+4^2$，而$3^2=2^2+2^2+1$，所以$13^2$可表为18＋2×9=36，18＋2×12=42个平方的和．再由4^2为4个2^2的和，13^2也可表为39个平方的和．

综上所述，13^2可表为1，2，…，44个平方的和．

又$n=13$时，$[\frac{1}{4}n^2]=42$，所以$n=13$满足$s(n)=n^2-14$．

3．令$n=2^k\times13$．

因为13^2可表为1，2，…，155个平方的和，2^2可表为4个平方的和，所以$13^2\times2^2$可表为1，2，…，155×4个平方的和，$13^2\times2^4$可表为1，2，…，155×4^2个平方的和，…，$n^2=13^2\times2^{2k}$可表为1，2，…，155×4^k个平方的和．

因为$155\times4^k>\frac{1}{4}(2^k\times13)^2=\frac{1}{4}n^2$，所以

$$s(n)=n^2-14$$

A5－029　每个正整数都可以表示成一个或者多个连续正整数的和．试对每个正整数n，求n有多少种不同的方法表示成这样的和．

【题说】第一届（1992年）中国台北数学奥林匹克题2．

【解】设m为n的正的奇因数，m=nd，则

$$n=(d-\frac{m-1}{2})+\cdots+(d-1)+d+(d+1)+\cdots+(d+\frac{m-1}{2}) \quad (1)$$

若（1）的每一项都是正的，则它就是 n 的一种表示（表成连续正整数的和）．

若（1）式右边有负数与 0，则这些负数与它们的相反数抵消（因为 $\frac{m-1}{2}-d<d+\frac{m-1}{2}$，所以这些相反数都是（1）式右边的项），0可以略去，这样剩下的项是连续的正整数，仍然得到 n 的一种表示，其项数为偶数（例如 7=（－2）＋（－1）＋0＋1＋2＋3＋4=3＋4）

于是 n 的每一个正奇因数产生一个表示．

反过来，若 n 有一个表示，项数为奇数 m，则它就是（1）的形式，而 m 是 n 的奇因数，若 n 有一个表示，项数为偶数，最小一项为 k＋1，则可将这表示向负的方向“延长”，增加 2k＋1 项，这些项中有 0 及±1，±2，…，±k．这样仍成为（1）的形式，项数是 n 的奇因数．

因此，n 的表示法正好是 n 的正奇因数的个数，如果 n 的标准分解式为 $n=2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t}$，$p_1$，$p_2$，…，$p_t$ 为奇素数，则n的表示法有（α_1＋1）（α_2＋1）…（α_t＋1）种．

A5－030　x、y 为正整数，x^4+y^4 除以 x＋y 的商是 97，求余数．

【题说】1992 年日本数学奥林匹克预选赛题 7．

【解】由题知 $x^4+y^4<98(x+y)$，不妨设 x≥y，则 $x^4<98\times 2x$，所以 x≤5．

注意到 $1^4=1$，$2^4=16$，$3^4=81$，$4^4=256$，$5^4=625$．对 x，y∈{1，2，3，4，5}，$x^4+y^4>97(x+y)$ 的仅有 $5^4+4^4=881=(5+4)\times 97+8$，所以所求的余数为 8．

A5－031　设 p=（a_1，a_2，…，a_{17}）是 1，2，…，17 的任一排列，令 k_p 是满足不等式

$$a_1+a_2+\cdots+a_k<a_{k+1}+\cdots+a_{17}$$

的最大下标 k，求 k_p 的最大值和最小值，并求所有不同的排列 p 相应的 k_p 的和．

【题说】1992 年捷克和斯洛伐克数学奥林匹克（最后一轮）题 1．

【解】若 $k_p\geq 12$，则

$$\begin{aligned} a_1+a_2+\cdots+a_{k_p} &\geq 1+2+\cdots+12=78 \\ &>75=13+14+\cdots+17 \\ &\geq a_{k_p+1}+\cdots+a_{17} \end{aligned}$$

这与 k_p 的定义相矛盾，所以 $k_p\leq 11$．

又当 p=（1，2，…，17）时，1＋2＋…＋11=66＜87=12＋13＋…＋17，故此时 $k_p=11$．

所以，k_p 的最大值为 11，并且 kp 的最小值为 5，此时 p=（17，16，…，2，1）．

设 p=（a_1，a_2，…，a_{17}）是 1，2，…，17 的任一排列，由 kp 的定义，知

$$a_1+a_2+\cdots+a_{k_p}<a_{k_p+1}+\cdots+a_{17} \qquad (1)$$

且

$$a_1+a_2+\cdots+a_{k_p}+a_{k_p+1}\geq a_{k_p+2}+\cdots+a_{17} \qquad (2)$$

但（2）的等号不可能成立，否则

$$a_1+a2+\cdots+a_{17}=2（a_{k_p+2}+\cdots+a_{17}）$$

即

$$17\times 9=2（a_{k_p+2}+\cdots+a_{17}）$$

矛盾．所以

$$a_{17}+\cdots+a_{k_p+2}<a_{k_p+1}+\cdots+a_2+a_1 \qquad (3)$$

由（1）和（3）可知，对排列 p=（a_1，a_2，…，a_{17}）的反向排列 p'=（a_{17}，a_{16}，…，a_1），

$$k_{p'}=17-（k_p+2）+1=16-k_p$$

所以 $k_p+k_{p'}=16$．

于是可把 1,2,…,17 的 17！个不同排列与它的反向排列一一配对．所求之和为

$$\frac{1}{2}\times 17!\times 16=8\times 17!$$

A5－032　确定所有正整数 n，使方程

$$x^n+（2+x）^n+（2-x）^n=0$$

有整数解．

【题说】1993 年亚太地区数学奥林匹克题 4．

【解】显然，n 只能为奇数．

当 n=1 时，x=－4．

当 n 为不小于 3 的奇数时，方程左边是首项系数为 1 的非负整系数多项式，常数项是 2^{n+1}，所以它的整数解只能具有-2^t 的形式，其中 t 为非负整数．若 t=0，则 x=－1，它不是方程的解；若 t=1，则 x=－2，也不是方程的解；当 t≥2 时，方程左边$=2^n[-2^{n(t-1)}+(1-2^{t-1})^n+(1+2^{t-1})^n]$，而$-2^{n(t-1)}+(1-2^{t-1})^n+(1+2^{t-1})^n\equiv 2 \pmod 4$，从而方程左边不等于零．

综上所述，当且仅当 n=1 时，原方程有一个整数解 x=－4．

A5－033　每一个大于 2 的自然数 n 都可以表示为若干个两两不等的正整数之和．记这些相加数个数的最大值为 A（n），求 A（n）．

【题说】1993 年德国数学奥林匹克（第一轮）题 1．

【解】对任意自然数 n（n≥3），存在自然数 m，使

$$\frac{1}{2}m（m+1）\leq n<\frac{1}{2}（m+1）（m+2）$$

这时n最多可表为m个不同的正整数1，2，…，m－1，$n-\frac{1}{2}m（m-1）$之和，所以 A（n）=m．

又m是满足m（m+1）≤n的最大整数，所以A（n）= m =

$$\left[\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\right]$$

A5－034　完全平方数对（a，b）满足：

（1）a 和 b 的十进制表示位数相同；

（2）将 b 的十进制表示续写在 a 的十进制表示之后，恰好构成一个新的完全平方数的十进制表示，例如 a=16，b=81，$1681=41^2$．求证：这样的数对（a，b）有无穷多对．

【题说】1993 年德国数学奥林匹克（第一轮）题 3．

【证】取 $a_1=4^2$，$a_2=49^2$，…，$a_n=(5\times10^{n-1}-1)^2$，…；$b_1=9^2$，$b_2=99^2$，…，$b_n=(10^n-1)^2$，…．其中 n 为正整数．

显然，a_n，b_n 均为 2n 位数，且

$$\begin{aligned}\overline{a_nb_n}&=a_n\times10^{2n}+b_n\\&=25\times10^{4n-2}-10^{3n}+2\times10^{2n}-2\times10^{2n}+1\\&=(5\times10^{2n-1}-10^n+1)^2\end{aligned}$$

即对任意正整数 n，（a_n，b_n）均满足条件．

A5－035　证明：对于任意整数 x，

$$\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{15}x$$

是一个整数．

【题说】1994 年澳大利亚数学奥林匹克一试题 2．

【证】$\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{15}x$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{15}(3x^5+5x^3+7x)\\&=\frac{1}{5}(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)+\frac{4}{3}(x+1)(x-1)+x\end{aligned}$$

由于连续 n 个整数中必有一个是 n 的倍数，所以上式为整数．

A5－036　整数a、b、c使得$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$与$\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}$ 均为整数，证明：$|a|=|b|=|c|$．

【题说】第五十八届（1995 年）莫斯科数学奥林匹克十年级题 17．

【解】如果a、b、c有公约数d，则可转为讨论$\frac{a}{d}$、$\frac{b}{d}$、$\frac{c}{d}$．所以，不失一般性，可设（a，b，c）=1，若结论不成立，则 a、b、c 中必有一数不等于±1，不失一般性，可设 a≠±1．

设 p 是 a 的质因数，则

$$abc\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)=a^2c+b^2a+c^2b$$

可被 p 整除．因此，p 整除 c^2b，故 p 整除 b 或 c，不妨设 p 整除 b．于是，p 不整除 c．

设 p^r 是整除 a 的 p 的最高方幂，ps 是整除 b 的 p 的最高方幂，不妨设r≤s．于是，p^{r+s}整除$abc\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right)=a^2b+c^2a+b^2c$．但$p^{r+s}$整除 a^2b 与 b^2c，而 p^{r+1} 不整除 c^2a，矛盾．因此本题结论成立．

A5－037　设 $n=2^{31}\cdot3^{19}$．n^2 有多少个小于 n，但不能整除 n 的正整

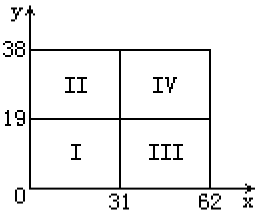
数因子？

【题说】第十三届（1995 年）美国数学邀请赛题 6．

【解】n^2 的因子必为 $2^\alpha\cdot 3^\beta$形，其中 $0\leq\alpha\leq 62$，$0\leq\beta\leq 38$．

于是（α，β）是属于图中矩形的格点，显然对 I、IV 中的格点（α，β），$2^\alpha.3^\beta$不满足要求（$2^\alpha\cdot 3^\beta|n$ 或 $2^\alpha\cdot 3^\beta\geq n$），II 中任一格点（约定β=19 或α=31 的点属于 I 或 IV，不属于 II 或 III）（α，β），若 $2^\alpha\cdot 3^\beta\geq n$，则对 III 中格点（62－α，31－β），有 $2^{62-\alpha}\cdot 3^{31-\beta}<n$．反之，对 III 中格点（α，β），若 $2^\alpha\cdot 3^\beta\geq n$，则对 II 中格点（62－α，31－β），有 $2^{62-\alpha}\cdot 3^{31-\beta}<n$．因此 II、III 中恰有一半的格点（α，β），使 $2^\alpha\cdot 3^\beta$满足要求．即所求的正整数因子个数为

$$19\times 31=589$$



A5－038　在满足 $y<x\leq 100$ 的有序正整数对（x，y）中，有多少对使得 $\frac{x}{y}$ 与 $\frac{x+1}{y+1}$ 都是整数？

【题说】第十三届（1995 年）美国数学邀请赛题 8．

【解】$\frac{x}{y}-\frac{x+1}{y+1}=\frac{x-y}{y(y+1)}$是正整数$k$．$ky$（$x+1$）$+y=x\leq 100$，所以$k$的个数为$[\frac{100-y}{y(y+1)}]$．$y\geq 10$时$[\frac{100-y}{y(y+1)}]=0$．而

$$[\frac{100-1}{1\times 2}]+[\frac{100-2}{2\times 3}]+[\frac{100-3}{3\times 4}]+[\frac{100-4}{4\times 5}]+[\frac{100-5}{5\times 6}]$$

$$+[\frac{100-6}{6\times 7}]+[\frac{100-7}{7\times 8}]+[\frac{100-8}{8\times 9}]+[\frac{100-9}{9\times 10}]$$

$$=49+16+8+4+3+2+1+1+1=85$$

A5－039　对于每个正整数 n，将 n 表示成 2 的非负整数次方的和，令 f（n）为正整数 n 的不同表示法的个数．

如果两个表示法的差别仅在于它们中各个数相加的次序不同，这两个表示法就被视为是相同的．例如，f（4）=4，因为 4 恰有下列四种表示法：4；2+2；2+1+1；1+1+1+1．

证明：对于任意整数 $n\geq 3$，$2^{n^2/4}<f(2^n)<2^{n^2/2}$．

【题说】第三十八届（1997 年）国际数学奥林匹克题 6．本题由立陶宛提供．

【证】对于任意一个大于 1 的奇数 n=2k+1，n 的任一表示中必含一个 1．去掉这个 1 就得到 2k 的一个表示．反之，给 2k 的任一表示加上一个 1 就得到 2k+1 的一个表示．这显然是 2k+1 和 2k 的表示之间的一个一一对应．从而有如下递归式：

$$f(2k+1)=f(2k) \qquad (1)$$

对于任意正偶数 n=2k，其表示可以分为两类：含有 1 的与不含 1 的．对

于前者，去掉一个 1 就得到 2k－1 的一个表示；对于后者，将每一项除以 2，就得到 k 的一个表示．这两种变换都是可逆的，从而都是一一对应．于是得到第二个递归式：

$$f(2k)=f(2k-1)+f(k) \qquad (2)$$

（1）、（2）式对于任意 k≥1 都成立．显然 f（1）=1．定义 f（0）=1，则（1）式对于 k=0 也成立．根据（1）、（2）式，函数 f 是不减的．

由（1）式，可以将（2）式中的 f（2k－1）换成 f（2k－2），得到 f（2k）－f（2k－2）=f（k），k=1，2，3，…，给定任一正整数 n≥1，将上式对于 k=1，2，…，n 求和，得到

$$f(2n)=f(0)+f(1)+\cdots+f(n),\ n=1,2,3,\cdots \qquad (3)$$

下面先证明上界，在（3）式中，右端所有的项都不大于最后一项，对于 n≥2，2=f（2）≤f（n）．于是有

$$f(2n)=2+(f(2)+\cdots+f(n))\le 2+(n-1)f(n)$$
$$\le f(n)+(n-1)f(n)=nf(n)$$

n=2，3，4，…从而得到

$$f(2^n)\le 2^{n-1}\cdot f(2^{n-1})\le 2^{n-1}\cdot 2^{n-2}\cdot f(2^{n-1})$$
$$\le 2^{n-1}\cdot 2^{n-2}\cdot 2^{n-3}\cdot f(2^{n-3})\le\cdots$$
$$\le 2^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1}\cdot f(2)=2^{n(n-1)/2}\cdot 2$$

因为当 $n\ge 3$ 时有 $2^{n(n-1)/2}\cdot 2<2^{n^2/2}$，上界得证．

为了证明下界，我们先证明对于具有相同奇偶性的正整数 b≥a≥0，有如下不等式成立：

$$f(b+1)-f(b)\ge f(a+1)-f(a) \qquad (4)$$

事实上，如果 a、b 同为偶数，则由（1）式知上式两端均等于 0．而当 a、b 同为奇数时，由（2）式知 f（b+1）－f（b）=f（b+1）/2），f（a+1）－f（a）=f（（a+1）/2）．由函数 f 是不减的即得不等式（4）成立．

任取正整数 r≥k≥1，其中 r 为偶数，在（4）式中依次令 a=r－j，b=r＋j，j=0，1，…，k－1．然后将这些不等式加起来，得到

$$f(r+k)-f(r)\ge f(r+1)-f(r-k+1)$$

因为 r 是偶数，所以 f（r+1）=f（r）．从而

$$f(r+k)+f(r-k+1)\ge 2f(r),\ k=1,\cdots,r$$

对于 k=1，…，r，将上述不等式相加，即得

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(2r)\ge 2rf(r)$$

根据（3）式，上式左端等于 f（4r）－1．从而对于任意偶数 r≥2，f（4r）＞2rf（r）＋1＞2rf（r）．取 $r=2^{m-2}$ 即得

$$f(2^m)\ge 2^{m-1}f(2^{m-2}) \qquad (5)$$

要使 $r=2^{m-2}$ 为偶数，m 须为大于 2 的整数，但是（5）式对于 m=2 也成立．

显然 $f(2^2)=4>2^{\frac{2^2}{4}}$，$f(2^3)=f_{(0)}+f_{(1)}+f_{(2)}+f_{(3)}+f_{(4)}$ $=1+1+2+2+=10>2^{\frac{3^2}{4}}$．假设 $n\ge 4$ 并且对 $n-2$ 已有 $f(2^{n-2})>2^{\frac{(n-2)^2}{4}}$ 则由(5)

$$f(2^n) \geq 2^{n-1} f(2^{n-2}) > 2^{n-1+\frac{(n-2)^2}{4}} = 2^{\frac{n^2}{4}}.$$

因此对一切 n≥2 下界成立.

B 代　数

B1　集合、数、式

B1－001　把含有 12 个元素的集分成 6 个子集，每个子集都含有 2 个元素，有多少种分法？

【题说】1969 年～1970 年波兰数学奥林匹克三试题 5．

【解】将 12 个元素排成一列有 12！种方法．排定后，从左到右每 2 个一组就得到 6 个 2 元子集．同一组中 2 个元素顺序交换得到的是同一子集．6 个子集顺序交换得到的是同样的分法，因此共有

$$\frac{12!}{6!\cdot 2^6}=10395$$

种不同的分法．

[别解]设 a_1 是集中的一个元素，将 a_1 与其余 11 个元素中的任一个结合，就得到含 a_1 的 2 元子集，这种 2 元子集共有 11 种．

确定含 a_1 的子集后，设 a_2 是剩下的一个元素，将 a_2 与其余 9 个元素中的任一个结合，就得到含 a_2 的 2 元子集，这种子集共有 9 种．

如此继续下去，得到 6 个 2 元子集．共有 11×9×7×5×3=10395 种分法．

B1－002　证明：任一个有限集的全部子集可以这样地排列顺序，使任何两个邻接的集相差一个元素．

【题说】1971 年～1972 年波兰数学奥林匹克三试题 5．

【证】设有限集 A 含 n 个元素．当 n=1 时，子集序列φ，A 即满足条件．

假设 n=k 时命题成立，对于 k＋1 元集

$$A=\{x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}\}$$

由归纳假设，$\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$的子集可排成序列

$$B_1, B_2, \cdots, B_t \quad (t=2^k)$$

满足要求．因此 A 的子集也可排成序列

$B_1, B_2, \cdots, B_t, B_t\cup\{x_{k+1}\}, B_{t-1}\cup\{x_{k+1}\}, \cdots, B_2\cup\{x_{k+1}\}B_1\cup\{x_{k+1}\}$，满足要求．

于是命题对一切自然数 n 均成立．

B1－003　设 1≤r≤n，考虑集合{1，2，3，…，n}的所有含 r 个元素的子集及每个这样的子集中的最小元素，用 F（n，r）表示一切这样的子集各自的最小元素的算术平均数．证明：

$$F(n, r)=\frac{n+1}{r+1}$$

【题说】第二十二届（1981 年）国际数学奥林匹克题 2．

【证】集合$\{1, 2, \cdots, n\}$共有C_n^r个r元子集，其中最小元素为k的（$1\le k\le n-r+1$）有C_{n-k}^{r-1}个（其余r－1个元素从k＋1，k＋2，…，n这 n－k 个数中选出）．所以

$$F(n, r) = \frac{1}{C_n^r}\sum_{k-1}^{n-r+1} kC_{n-k}^{r-1} \qquad (1)$$

将（1）式右边的和写成一个表

$$\begin{array}{lll} C_{n-11}^{r-1} & & \\ C_{n-2}^{r-1} & C_{n-2}^{r-1} & \\ \vdots & \vdots & \\ C_{r-1}^{r-1} & C_{r-1}^{r-1} \cdots & C_{r-1}^{r-1} \end{array}$$

将上表每一行加起来，再将这些行和相加便得（1）的右边的分子，现在先将上表每一列加起来得到C_n^r，C_{n-1}^r，…，C_r^r．再将这些列和相加得C_{n+1}^{r+1}．于是

$$F(n.\ r) = \frac{1}{C_n^r}\cdot C_{n+1}^{r+1} = \frac{n+1}{r+1}$$

B1－004　定义一个数集的和为该集的所有元素的和．设 S 是一些不大于 15 的正整数组成的集，假设 S 的任意两个不相交的子集有不相同的和，具有这个性质的集合 S 的和的最大值是多少？

【题说】第四届（1986 年）美国数学邀请赛题 12．

【解】先证明 S 元素个数至多是 5．如果多于 5 个，则元素个数不超过4的子集至少有$C_6^1+C_6^2+C_6^3+C_6^4=56$个，每个子集的和≤$12+13+14+15=54$．故必有两个子集的和相等．

S 的元素个数≤5，所以 S 的和≤15＋14＋13＋12＋11=65．如果 S 的和≥62，则 S 的元数为 5，并且 15、14 均在 S 中（S 的和至多比 15＋14＋13＋12＋11 少 3）．这时 S 中无其它的连续整数，因而只有一种情况即｛15，14，13，11，9），不难看出它不满足条件．

所以，S 的和≤61．特别地，S={15，14，13，11，8}时，和取最大值 61．

B1－005 证明：满足不等式$\sum_{k=1}^{70}\frac{k}{x-k}\geq\frac{5}{4}$的实数$x$的集合是互不相交的区间的并集，并且这些区间长度的总和等于 1988．

【题说】第二十九届（1988 年）国际数学奥林匹克题 4．本题由爱尔兰提供．

【证】令$f(x)=\sum_{k=1}^{70}\frac{k}{x-k}-\frac{5}{4}$，易见，对$n=1，2，\cdots，70$，有

$$\lim_{x\to n+0} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to n-0} f(x)=-\infty$$

且

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\frac{4}{5}$$

故 f（x）=0 在（1，2），（2，3），…，（69，70），（70，＋∞）各区间中，都各有一根，记为 x_1，x_2，…，x_{70}．

令

$$f(x=)\frac{4}{5}(x-1)(x-2)\cdots(x-70)f(x) \qquad (1)$$

显然 x_1，x_2，…，x_{70} 是（1）的根，而 F（x）是 70 次代数多项式，

故至多有 70 个实根．因此 x_1，x_2，…，x_{70} 即是在相应区间中的唯一的根．由此，不等式 f（x）≥0 的解集是：

$$(1，x_1]\cup(2，x_2]\cup\cdots\cup(70，x_{70}]$$

这些区间长度和为 $\sum_{i=1}^{70}(x_i-i)=\sum_{i=1}^{70}x_i-\sum_{i=1}^{70}i$．

由根与系数关系知，$\sum x_i$ 是多项式 F（x）中 x^{69} 的系数，即

$$(1+2+\cdots+70)(1+4/5)$$

因此，区间长度之和为

$$\frac{4}{5}(1+2+\cdots+70)=4\times7\times71=1988$$

B1－006　对有限集合 A，存在函数 f：N→A 具有下述性质：若|i－j|是素数，则 f（i）≠f（j），N={1，2，…}．求有限集合 A 的元素的最少个数．

【题说】1990 年巴尔干地区数学奥林匹克题 4．

【解】1，3，6，8 中每两个数的差为素数，所以 f（1），f（3），f（6），f（8）互不相同，|A|≥4．

另一方面，令 A={0，1，2，3}．对每一自然数 n，令 f（n）为 n 除以 4 所得余数，则在 f（i）=f（j）时，|i－j|被 4 整除．因而 f 是满足条件的函数．

于是，A 的元素个数最少为 4．

B1－007　集合{1，2，3，…，100}的某些子集，满足条件：没有一个数是另一个数的 2 倍．这样的子集中所含元素的个数最多是多少？

【题说】1991 年河南省数学奥林匹克集训班一试题 1（6）．原题为选择题．

【解】令 A_1= {51，52，…，100}，A_2= {26，27，…，50}，A_3= {13，14，…，25}，A_4=（7，8，9，10，11，12），A_5=（4，5，6}，A_6={2，3}，A_7={1}．

$A_1\cup A_3\cup A_5\cup A_7$ 共 50＋13＋3＋1=67 个元素，每一个都不是另一个的两倍．

若集合 B⊆ {1，2，…，100}，其中每一个数都不是另一个的两倍，则在 $a\in B\cap A_2$ 时，$2a\notin B$，因此 $|B\cap A_2|+|B\cap A_1|\le50$．同样 $|B\cap A_4|+|B\cap A_3|\le13$，$|B\cap A_6|+|B\cap A_5|\le3$．因此 $|B|\le67$．

本题答案为 67．

B1－008　设集合 S_n={1，2，…，n）．若 X 是 S_n 的子集，把 X 中所有数之和称为 X 的“容量”（规定空集容量为 0）．若 X 的容量为奇（偶）数，则称 X 为 S_n 的奇（偶）子集．

（1）求证：S_n 的奇子集与偶子集个数相等；

（2）求证：当 n≥3 时，S_n 的所有奇子集容量之和，与所有偶子集容量之和相等．

（3）当 n≥3 时，求 S_n 所有奇子集的容量之和．

【题说】1992 年全国联赛二试题 2．

【证】设 S 为 S_n 的奇子集，令

$$T=\begin{cases} S\cup\{1\}, & 若1\notin S \\ S\backslash\{1\}, & 若1\in S \end{cases}$$

则 T 是偶子集，S→T 是奇子集的集到偶子集的一一对应，而且每个偶子集 T，均恰有一个奇子集

$$S=\begin{cases} T\cup\{1\}, & 若1\notin T \\ T\backslash\{1\}, & 若1\in T \end{cases}$$

与之对应，所以（1）的结论成立．

对任一 i（1≤i≤n），含 i 的子集共 2^{n-1} 个，用上面的对应方法可知在 i≠1 时，这 2^{n-1} 个集中有一半是奇子集．在 i=1 时，由于 n≥3，将上边的 1 换成 3，同样可得其中有一半是奇子集．于是在计算奇子集容量之和时，元素 i 的贡献是 $2^{n-2}\cdot i$．奇子集容量之和是

$$\sum_{i=1}^{n}2^{n-2}i=n(n+1)\cdot 2^{n-3}$$

根据上面所说，这也是偶子集容量之和，两者相等．

B1－009　用σ（S）表示非空整数集 S 中所有元素的和．设 A= {a_1，a_2，…，a_n} 是正整数集，且 $a_1<a_2<\cdots<a_{11}$．若对每个正整数 n≤1500，存在 A 的子集 S，使得σ（S）=n．试求满足上述要求的 a_{10} 的最小值．

【题说】第二十一届（1992 年）美国数学奥林匹克题 3．

【解】令 $S_k=a_1+a_2+\cdots+a_k$（1≤k≤11）．

若 $a_k>S_{k-1}+1$，则不存在 S⊂A，使

$$\sigma(S)=S_{k-1}+1$$

所以，

$$S_k=S_{k-1}+a_k\le 2S_{k-1}+1 \qquad (1)$$

又由题设得 $S_1=a_1=1$．于是由（1）及归纳法易得

$$S_k\le 2^k-1\ (1\le k\le m) \qquad (2)$$

若 $S_{10}<750$，则 $a_{11}\le 1500$（否则 750 无法用σ（S）表出），$S_{11}=S_{10}+a_{11}<1500$，所以 $S_{10}\ge 750$．

又 $S_8\le 2^8-1=255$，于是

$$2a_{10}\ge a_9+a_{10}=S_{10}-S_8\ge 495$$

所以，$a_{10}\ge 248$．

另一方面，令

A={1，2，4，8，16，32，64，128，247，248，750}

当 $n\le 255=2^7+2^6+\cdots+2+2^0$ 时，可找到 S⊂ {1，2，4，…，128}，使σ（S）=n．当 n≤255＋247=502 时，存在 S⊂（1，2，4，…，128，247），使σ（S）=n；当 n≤502＋248=750 时，存在 S⊂{1，2，4，…247，248}，使σ（S）=n；当 n≤750＋750=1500 时，存在 S⊂A，使σ（S）=n．

于是 a_{10} 的最小值为 248．

B1－010　给定集合 S= {Z_1，Z_2，…，Z_{1993}}，其中 Z_1，Z_2，…，Z_{1993} 为非零复数（可视为平面上非零向量）．求证：可以把 S 中元素分

成若干子集，使得

（1）S 中每个元素属于且仅属于一个子集；

（2）每一子集中任一复数与该子集所有复数之和的夹角不超过 90°；

（3）将任二子集中复数分别作和，所得和数之间夹角大于 90°．

【题说】1993 年中国数学奥林匹克（第八届数学冬令营）题 4．

【证】现对任意正整数 n 给以证明．

设非零复数集 $S=\{Z_1, \cdots, Z_n\}$．

对 S 每个非空子集 A，其中所有数之和，称为 A 之和．

S 共有 2^n-1 个非空子集，其中必有一个子集 S_1，其和的模 $|a_1|$ 最大．

若 $S\neq S_1$，对 $S\backslash S_1$，取其非空子集 S_2，使其和的模 $|a_2|$ 最大．如比等等．

因 S 为有限集，故经若干步后，即得 S 的一个划分：$S_1, S_2, \cdots, S_k$，它们的和 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 的模分别是 S，$S\backslash S_1$，$S\backslash(S_1\cup S_2)$，…，$S\backslash(S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_{k-1})$ 的非空子集和的最大模．

这样的划分，条件（1）显然满足．

若某个 S_r 中有一元素 Z 与 a_r 的夹角＞90°，则如图 a，$|a_r-Z|>|a_r|$．a_r-Z 是 $S\backslash(S_1\cup\cdots\cup S_{r-1})$ 的非空子集 $S_r\backslash\{Z\}$ 之和，与 S_r 的选取矛盾．

若 a_r 与 a_t（$1\leq r<t\leq k$）的夹角 ≤90°，则如图（b），$|a_r+a_t|>|a_r|$．a_r+a_t 是 $S\backslash(S_1\cup\cdots\cup S_{r-1})$ 不空子集 $S_r\cup S_t$ 之和，这又与 S_r 选取矛盾．

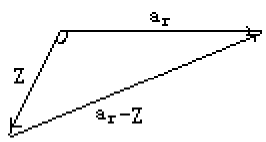


图 a

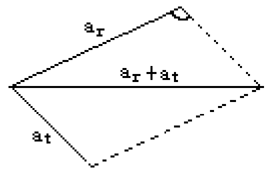


图 b

因此，所述划分满足条件（1）～（3）．

【注】因为平面上至多有三个向量，它们之间两两的夹角都大于 90°，故 S 至多分为三个子集．

B1－011　设集合 $A=\{1, 2, 3, \cdots, 366\}$．如果 A 的一个二元子集 $B=\{a, b\}$ 满足 $17\mid(a+b)$，则称 B 具有性质 p．

（1）求 A 的具有性质 p 的二元子集的个数；

（2）A 一组二元子集，两两不相交并且具有性质 P 这组二元子集的个数最多是多少？

【题说】1994 年全国联赛河北省预赛二试题 1．

【解】将 1，2，…，366 按 17 除的余数分为 17 类：17 类：[0]，[1]，…，[16]．因为 366=17×21＋9，所以[1]，[2]，…[9]中各有 22 个数，[10]，…，[16]，[0]中各有 21 个数．

当且仅当 a∈[k]，b∈[17－k]时，{a，b}具有性质 p．

当 a，b∈[0]时，具有性质 p 的子集个数为 $C_{21}^2=210$．

当 a∈[k]，b∈[17－k]，k=1，2，…，7 时，具有性质 p 的子集

个数各为$C_{22}^1\times C_{21}^1=462$个．

当$a\in[8]$，$b\in[9]$时，具有性质p的子集个数为$C_{22}^1\times C_{22}^1=484$．

所以A的具有性质p的二元子集个数共有

$$210+462\times7+484=3928\text{（个）}$$

（2）为使二元子集两两不变，可如下搭配：

$a\in[0]$，$b\in[0]$，有10个子集；

$a\in[k]$，$b\in[17-k]$，$k=1，2，\cdots，7$，有21个子集；

$a\in[8]$，$b\in[9]$，有22个子集．

故A的具有性质p两两不交的二元子集共有

$$10+21\times7+22=179\text{（个）}$$

B1－012　设$|v|$、σ（v）和π（v）分别表示由正整数组成的有限集合v的元素的个数，元素的和以及元素的积（如果集合v是空集，则$|v|=0$，σ（v）=0，Π（v）=1）．若S是由正整数组成的有限集合．证明

$$\sum_{v\subseteq S}(-1)^{|v|}C_{m-\sigma(v)}^{|S|}=\prod(S)$$

对所有的正整数m≥σ（S）成立．

【题说】第二十三届（1994年）美国数学奥林匹克题5．

【证】设$S=\{a_1，a_2，\cdots，a_n\}$．长为m的、由m－n个0与n个1组成的数列共有C_m^n个．

将这样的数列分为n＋1段，第一段a_1个数，第二段a_2个数，…，第n段a_n个数．

前n段的每一段中恰有1个1的数列，由于第i段的1有a_i种位置（1≤i≤n），所以这样的数列共有

$$a_1a_2\cdots a_n=\Pi(S)\text{个．}$$

另一方面，第i段没有1的数列（1≤i≤n）有$C_{m-a_i}^n$个．更一般地，设$v\subseteq S$，对所有v的元素a_i，在第i段均没有1的数列有

$$C_{m-\sigma(v)}^n$$

个．根据容斥原理，

$$\prod(S)=C_m^n-\sum_{a_i\in s}C_{m-a_i}^n+\sum_{a_i<a_j\in s}C_{m-a_i-a_j-\cdots}^n$$

$$=\sum_{v\subseteq s}(-1)^{|v|}C_{m-\sigma(v)}^n$$

即本题的等式成立．

B1－013 已知集合$X=\{1，2，\cdots，k\}$，对$A\subseteq X$，将A中所有元素的和记为S（A）．将X分为互不相交的两个子集A、B，且A∪B=X，若S（A）=2S（B），求k的所有值．

【题说】1994年四川省赛题4．

【解】因A∪B=X，A∩B=Φ，且S（A）=2S（B），故

$S（X）=3S（A）=\dfrac{k(k+1)}{2}$是3的倍数．

即3|k或3|k＋1．

（1）当 k=3m 时，令 A={1，3，4，6，…，3m－2，3m}， B={2，5，…，3m－1}，则 A、B 满足要求．

（2）当 k=3m－1 时，令 A={2，3，5，6，8，…，3m－3，3m－1}，B={1，4，7，…，3m－2}，则 A、B 满足要求．

因此 k=3m 或 3m－1（m=1，2，…）．

B1－014 已知对任意实数x，函数f（x）都有定义，且f^2（x）≤$2x^2f$（$\frac{x}{2}$），如果集合A＝{a|f（a）＞a^2}不是空集，试证A是无限集．

【题说】1994 年江苏省赛题 6．

【解】因为$f^2_{(0)}\leqslant 0$，所以 f（0）=0，即0∉A．

设 a∈A，则 f（a）＞a^2．而由已知条件，

$$f^2_{(a)}\leq 2a^2f(\frac{a}{2})$$

所以$f(\frac{a}{2})\geq\frac{f^2(a)}{2a^2}>\frac{(a^2)^2}{2a^2}=\frac{a^2}{2}>(\frac{a}{2})^2$，即$\frac{a}{2}$∈A．

于是a，$\frac{a}{2}$，$\frac{a}{2^2}$，$\frac{a}{2^3}$，…均∈A，A为无限集．

B1－015 设 M={1，2，…，1995}，A 是 M 的子集，且满足条件：当 x∈A 时，15x∉A，试求 A 中元素个数的最大值．

【题说】1995 年全国联赛一试题 2（6）．原为填空题．

【解】由题设，当 k=9，10，…，133 时，k 与 15k 不能同时在 A 中，故至少有

$$133-8=125$$

个数不在 A 中，即|A|≤1995－125=1870

另一方面，M 的子集

$$A=\{1，2，…，8\}\cup\{134，…，1997\}$$

满足条件．它恰好有 1780 个元素．故｜A｜的最大数是 1870．

B1-016 已知集合{1，2，3，4，5，6，7，8，9，10}．求该集合具有下列性质的子集个数：每个子集至少含有 2 个元素，且每个子集中任意两个元素的差的绝对值大于 1．

【题说】1996 年爱朋思杯——上海市赛题 3．

【解】设 a_n 是集合{1，2，…，n}的具有题设性质的子集个数．集合{1，2，…，n，n+1，n+2}的具有题设性质的子集可分为两类：第一类子集包含元 n+2，这样的子集有 a_n+n 个(即每个{1，2，…，n}的这种子集与{n+2}的并集，以及{1，n+2}，{2，n+2}，…，{n，n+2})；第二类子集不包含 n+2，这样的子集有 a_{n+1} 个．于是，有

$$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}+n$$

显然，a_3=1，a_4=3(即{1，3}，{2，4}，{1，4})．

所以 a_5=7，a_6=14，a_7=26，a_8=46，a_9=79，a_{10}=133．

B1-017 对任意非空实数集 S，令σ(S)为 S 的元素之和．已知 n 个正整数的集 A，考虑 S 跑遍 A 的非空子集时，所有不同和σ(S)的集．证明这些和可以分为 n 类，每一类中最大的和与最小的和的比不超过 2．

【题说】 第二十五届(1996 年)美国数学奥林匹克题 2

【解】设 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，$a_1<a_2<\cdots<a_n$．令 $f_j=a_1+a_2+\cdots a_j$，$e_j=\max\{a_j, f_{j-1}\}$，则 $f_j=f_{j-1}+a_j\leq 2e_j(1\leq j\leq n)$．

每个和 $a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_t}$，$i_1<i_2<\cdots<i_t$，必在某个区间 $(f_{j-1}, f_j]$ 中．因为

$$a_{i_1}+a_{i_2}+a_{i_t}>f_{j-1}=a_1+a_2+\cdots a_{j-1}$$

所以

$$i_t\geq j$$

从而

$$a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_t}\geq a_j$$

于是 $a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_t}\in[e_j, f_j]$．

这样 σ(S)被分为 n 个类，在 e_j 与 f_j 之间的和为第 j 类$(1\leq j\leq n)$，f_j 本身在第 j 类，而 $e_j=f_{j-1}$ 时，e_j 不在第 j 类；$e_j>f_{j-1}$ 时，e_j 在第 j 类．每一类中最大的和与最小的和的比不超过 2．

B1-018　设 S={1，2，3，4)，n 项的数列：$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 有下列性质，对于 S 的任何一个非空子集 B(B 的元素个数记为｜B｜)，在该数列中有相邻的｜B｜项恰好组成集合 B．求 n 的最小值．

【题说】1997 年爱朋思杯——上海市赛决赛题 3．

【解】n 的最小值为 8．

首先证明 S 中的每个数在数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中至少出现 2 次．事实上，若 S 中的某个数在这个数列中只出现 1 次，由于含这个数的二元子集共有 3 个，但在数列中含这个数的相邻两项至多只有两种取法，因而 3 个含这个数的二元子集不可能都在数列相邻两项中出现．

由此可见 $n\geq 8$．

另一方面，8 项数列：3，1，2，3，4，1，2，4 满足条件，因此，所求最小值为 8．

B1-019　求两个正整数 m 与 n 之间(m<n)，一切分母为 3 的既约分数的和．

【题说】1962 年成都市赛高三二试题 1．

【解】以m为首项，$\frac{1}{3}$为公差，末项为n的等差数列，共有

$$3(n-m)+1$$

项．其和

$$S_1=\frac{1}{2}(m+n)[3(n-m)+1]$$

但其中整数项的和

$$S_2=\frac{1}{2}(m+n)(n-m+1)$$

故所求之和

$$S=S_1-S_2=n^2-m^2$$

B1-020　证明 cos10°是无理数．

【题说】1963 年合肥市赛高二二试题 3．

【证】利用公式 $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$，可得

$$\cos 30°=4\cos^3 10°-3\cos 10° \qquad (1)$$

即

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=4\cos^3 10°-3\cos 10°$$

若 cos10°是一个有理数，则(1)右端为有理数，而左端是一个无理数，矛盾，故 cos10°为无理数．

B1-021　求出所有四元实数组(x_1，x_2，x_3，x_4)，使其中任一个数与其余三数积的和等于 2．

【题说】第七届(1965 年)国际数学奥林匹克题 4．本题由原苏联提供．

【解】设 $x_1x_2x_3x_4=d$，则

$$x_i^2+d-2x_i=x_i\left(x_i+\frac{d}{x_i}-2\right)=0$$

所以 $x_i=1\pm\sqrt{1-d}$　($i=1$，2，3，4)．

显然 $d\leq 1$．有以下五种情况：

1．$x_1=x_2=x_3=x_4=1+\sqrt{1-d}$，则

$$d=(1+\sqrt{1-d})^4\geq 1\geq d$$

所以 $d=1$，$x_1=x_2=x_3=x_4=1$．

2．x_1、x_2、x_3、x_4中有三个为$1+\sqrt{1-d}$，一个为$1-\sqrt{1-d}$，则$d=(1-\sqrt{1-d})(1+\sqrt{1-d})^3=d(1+\sqrt{1-d})^2$，所以$d=0$，从而$x_1$、$x_2$、$x_3$、$x_4$中三个为2，一个为0，但$0+2\times 2\times 2\neq 2$，所以$d=0$是不可能的．

3．x_1、x_2、x_3、x_4中有两个为$1+\sqrt{1-d}$，两个为$1-\sqrt{1-d}$，

则$d=(1-\sqrt{1-d})^2(1+\sqrt{1-d})^2=d^2$，$d=0$或1．情况同1、2．

4．x_1、x_2、x_3、x_4中有一个为$1+\sqrt{1-d}$，三个为$1-\sqrt{1-d}$，则$d=(1+\sqrt{1-d})(1-\sqrt{1-d})^3=d(1-\sqrt{1-d})^2$，$d=0$，1，-3，前两种情况同2、1；$d=-3$时，$X_i$中三个为-1，一个为+3．

5．$x_1=x_2=x_3=x_4=1-\sqrt{1-d}$，则

$$0<d=(1-\sqrt{1-d})^4=\left(\frac{d}{1+\sqrt{1-d}}\right)^4\leq d^4\leq d$$

所以 $d=1$，$x_1=x_2=x_3=x_4=1$．

综上所述，x_1、x_2、x_3、x_4 或者全为 1；或者其中有三个为-1，一个为 3．

B1-022　设 P(x)是自然数 x 在十进制中各位数字的乘积．试求出所有能使 $P(x)=x^2-10x-22$ 成立的自然数．

【题说】第十届(1968 年)国际数学奥林匹克题 2．本题由捷克斯洛伐克提供．

【解】设 n 位数 x 满足

$$P(x)=x^2-10x-22 \tag{1}$$

若 $n\geq 3$，则 $x\geq 10^{n-1}\geq 100$，

$$9^n\geq P(x)=x(x-10)-22\geq 90x-22\geq 90\cdot 10^{n-1}-22$$
$$=9\cdot 10^n-22>10^n$$

矛盾．

若 $n=1$，则

$$x=P(x)=x^2-10x-22$$

即

$$x^2-11x-22=0$$

但此方程无正整数解．因此 $n=2$．

若 $x\geq 20$，则

$$x^2-10x-22=x(x-10)-22\geq 10x-22\geq 200-22>9^2\geq P(x)$$

因此 $x=10+y$，$y\in\{0，1，2，\cdots，9\}$．(1)变成

$$y=(10+y)^2-10(10+y)-22$$

易知 $y=2$，$x=12$．

B1-023　证明：如果三个正数的积为 1，而它们的和严格地大于它们的倒数之和，那么，它们中恰好有一个数大于 1．

【题说】第四届(1970 年)全苏数学奥林匹克八年级题 2．

【证】设这三个数为 a，b，c，则

$$(a-1)(b-1)(c-1)=abc-(ab+bc+ca)+(a+b+c)-1$$
$$=a+b+c-(ab+bc+ca)=a+b+c-\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)>0$$

左边有一个或三个因子为正．但 $abc=1$，所以 a、b、c 不可能全大于 1，从而 a、b、c 中有且只有一个数大于 1．

B1-024　若干个正整数的和为 1976，求这些正整数的积的最大值．

【题说】第十八届(1976 年)国际数学奥林匹克题 4．本题由美国提供．

【解】设这些正整数为 a_1，…，a_n，则

$$a_1+\cdots+a_n=1976$$

不妨设 $a_i<4(1\leq i\leq n)$，这是因为当 $a_i\geq 4$ 时 $a_i\leq 2(a_i-2)$，故把 a_i 换成 2 和 a_i-2 不会使积减小．再注意 $2\times 2\times 2<3\times 3$，所以只需考虑积 $2^a\cdot 3^b$，其中 $a=0，1，2$，且 $2a+3b=1976$．由此得 $a=1$，$b=658$，故所求的最大值为 2×3^{658}．

B1-025　确定最大的实数 z，满足

$$x+y+z=5 \tag{1}$$

$$xy+yz+zx=3 \tag{2}$$

并且 x、y 也是实数．

【题说】第十届(1978 年)加拿大数学奥林匹克题 3．

【解】由(1)得 $(x+y)^2=(5-z)^2$，由(2)得 $xy=3-z(5-z)$．于是 $0\leq(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=(5-z)^2-4[3-z(5-z)]$

$=-3z^2+10z+13=(13-3z)(1+z)$

因此有

$$-1\leq z\leq 13/3$$

当 $x=y=1/3$ 时，$z=13/3$．因此 z 最大值是 13/3．

B1-026　已知 a、b、c、d、e 是满足

$$a+b+c+d+e=8, \tag{1}$$

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16 \tag{2}$$

的实数，试确定 e 的最大值．

【题说】第七届(1978 年)美国数学奥林匹克题 1．

【解】由 Cauchy 不等式，

$$(8-e)^2=(a+b+c+d)^2\leq 4(a^2+b^2+c^2+d^2)=4(16-e^2),$$

即

$$5e^2-16e\leq 0，0\leq e\leq \frac{16}{5}$$

当 $a=b=c=d=\frac{6}{5}$，$e=\frac{16}{5}$ 时，满足(1)、(2)，可见 e 的最大值是 16/5．

B1-027　已知：$0.301029<\lg 2<0.301030$，

$$0.477120<\lg 3<0.477121$$

求 2000^{1979} 的首位数字．

【题说】1979 年安徽省赛二试题 1．

【解】因为

$$\lg 2000^{1979}=1979(3+\lg 2)=5937+1979\lg 2$$

$$595.736391<1979\lg 2<595.738370$$

而

$$\lg 5=1-\lg 2<0.70$$

$$\lg 6=\lg 2+\lg 3>0.77$$

所以

$$6532+\lg 5<\lg 2000^{1979}<6532+\lg 6$$

即

$$5\times 10^{6532}<2000^{1979}<6\times 10^{6532}$$

所以 2000^{1979} 的首位数字是 5．

B1-028　已知 a_1，a_2，…，a_8 均为正数，且

$$a_1+a_2+\cdots+a_8=20 \tag{1}$$

$$a_1a_2\cdots a_8=4 \tag{2}$$

试证：a_1，a_2，…，a_8 之中至少有一个数小于 1．

【题说】1979 年湖北省赛二试题 5．

【证】用反证法．如果 a_1，a_2，…，a_8 都不小于 1，则可设

$$a_i=1+b_i(b_i>0，i=1，2，\cdots，8)$$

再由(1)即得

$$b_1+b_2+\cdots+b_8=12$$

于是

$$\begin{aligned}a_1a_2\cdots a_8&=(1+b_1)(1+b_2)\cdots(1+b_8)\\&=1+(b_1+b_2+\cdots+b_8)+\cdots+b_1b_2\cdots b_8\\&\geq 1+(b_1+b_2+\cdots+b_8)\\&=1+12=13\end{aligned}$$

与条件(2)矛盾．所以八个数中至少有一个数小于 1．

B1-029　求所有实数 a，使得存在非负实数 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 满足关系：

$$\sum_{k=1}^{5}kx_k=a,\ \sum_{k=1}^{5}k^3x_k=a^2,\ \sum_{k=1}^{5}k^5x_k=a^3$$

【题说】第二十一届(1979 年)国际数学奥林匹克题 5．本题由以色列提供．

【解】利用柯西不等式及题设条件，有

$$a^4=\left(\sum_{k=1}^{5}k^3x_k\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{5}\left(k^{\frac{1}{2}}\sqrt{x_k}\right)\left(k^{\frac{5}{2}}\sqrt{x_k}\right)\right)^2$$

$$\leq\left(\sum_{k=1}^{5}kx_k\right)\left(\sum_{k=1}^{5}k^5x_k\right)=a^4$$

故中间不等式只能取等号，这意味着在 $x_k\neq 0$ 时，

$$\frac{k^{\frac{5}{2}}\sqrt{x_k}}{k^{\frac{1}{2}}\sqrt{x_k}}=k^2=\text{常数}$$

由此推知，x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 中至多一个非 0．因此，只能有下面两种情况：

(1)$x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=0$，此时 a=0；

(2)某个 $x_k=c\neq 0$，其余 $x_i=0(i\neq k)$．这时由已知得 kc=a，$k^3c=a^2$，$k^5c=a^3$．从而

$$k^2=a,\ c=k$$

总之，当且仅当 a=0，1，4，9，16，25 时，存在非负实数 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 满足题中三个方程．

B1-030　下列表中的对数值有两个是错误的，请予纠正．

x	0.021	0.27	1.5	2.8
lgx	2a+b+c-3	6a-3b-2	3a-b+c	1-2a+2b-c
x	3	5	6	7
lgx	2a-b	a+c	1+a-b-c	2(b+c)
x	8	9	14	
lgx	3-3a-3c	4a-2b	1-a+2b	

【题说】1981 年全国联赛题 2．

【解】lg3、lg0.27、lg9 的值同为正确或同为错误．因表中只有两

处错误，故三者都对．同理，lg2、lg5、lg8、lg6 都对．

再若 lg7=2(b+c)，则 lg14=lg7+lg2=1-a+2b+c，lg0.021=lg3+lg7-3=2a+b+2c-3，lg2.8=2lg2+lg7-1=1-2a+2b．即 lg7=2(b+c)对，就推出 lg14、lg0.021、lg2.8 三个值都错，与题设矛盾，故知 lg7 不对．应为 lg7=lgl4-lg2=2b+c．

lg1.5 的值也不对，应为 lg1.5=lg3+lg5-1=3a-b+c-1．

B1-031　把 n^2 个互不相等的实数排成下表：

$$a_{11}，a_{12}，\cdots，a_{1n}$$

$$a_{21}，a_{22}，\cdots，a_{2n}$$

$$\cdots$$

$$a_{n1}，a_{n2}，\cdots，a_{nn}$$

取每行的最大数得 n 个数，其中最小的一个是 x；再取每列的最小数，又得 n 个数，其中最大的一个是 y，试比较 x^n 与 y^n 的大小．

【题说】1982 年上海市赛二试题 2

【解】设 $x=a_{ij}$，$y=a_{pq}$，则

$$a_{ij}\geq a_{iq}\geq a_{pq}$$

所以 $x\geq y$．

(1)当 n 是奇数时，$x^n\geq y^n$．

(2)当 n 是偶数时

(i)如果 $x\geq y\geq 0$，则 $x^n\geq y^n$；

(ii)如果 $0\geq x\geq y$，则 $x^n\leq y^n$；

(iii)如果 $x\geq 0\geq y$，则当 $x\geq -y$ 时，$x^n\geq y^n$；当 $x\leq -y$ 时，$x^n\leq y^n$．

B1-032　对任意实数 x、y．定义运算 x*y 为：

$$x*y=ax+by+cxy$$

其中 a、b、c 为常数，等式右端运算是通常的实数的加法和乘法．现已知 1*2=3，2*3=4，并且有一个非零实数 d，使得对于任意实数 x，都有 x*d=x，求 d 的值．

【题说】1985 年全国联赛一试题 2(4)．原题为填空题．

【解】由所设条件，有

$$1*2=a+2b+2c=3 \tag{1}$$

$$2*3=2a+3b+6c=4 \tag{2}$$

$$x*d=ax+bd+cxd=(a+cd)x+bd=x \tag{3}$$

由(3)得

$$a+cd=1 \tag{4}$$

$$bd=0 \tag{5}$$

因 $d\neq 0$，故由(5)式得 b=0．再解方程(1)及(2)，得 a=5，c=-1，最后由(4)式得 d=4．

B1-033　计算下式的值：

$$\frac{(10^4+324)(22^4+324)(34^3+324)(46^4+324)(58^4+324)}{(4^4+324)(16^4+324)(28^4+324)(40^4+324)(52^4+324)}$$

【题说】第五届(1987 年)美国数学邀请赛题 14．注意 $324=4\times3^4$．

【解】 $x^4+4y^4=(x^2+2y^2)^2-(2xy)^2$

$=[(x^2+2y^2)-2xy][(x^2+2y^2)+2xy]$

$=[(x-y)^2+y^2][(x+y)^2+y^2]$

因此， $n^4+324=n^4+4\cdot3^4$

$=[(n-3)^2+9][(n+3)^2+9]$

$$原式=\frac{(7^2+9)(13^2+9)\cdots(55^2+9)(61^2+9)}{(1^2+9)(7^2+9)\cdots(49^2+9)(55^2+9)}$$

$$=\frac{61^2+9}{1^2+9}=\frac{3730}{10}=373$$

B1-034　在 1^2，2^2，3^2，…，1989^2 每个数前添上“+”或“-”号，使其代数和为最小的非负数，并写出算式．

【题说】第十五届(1989 年第 3 阶段)全俄数学奥林匹克十年级题 3．

【解】这些数中有 995 个奇数，其代数和总是奇数，即所求的数不小于 1．

另一方面，因为

$$k^2-(k+1)^2-(k+2)^2+(k+3)^2=4$$

所以八个连续平方数的代数和可以为 0．

对 22^2，23^2，…，1989^2，每连续八个一组，并适当添加符号，使每组的代数和为 0．对 6^2，7^2，…，21^2 这十六个数适当添加符号，使其和为 16．而

$$-1^2+2^2-3^2+4^2-5^2=-15$$

于是，可在 1^2，2^2，…，1989^2 前适当添加“+”号或“-”号，使所得的代数和为 1．

B1-035　黑板上写下若干个正数，两两乘积之和为 1．证明：可抹去

其中一数，使余下各数之和小于$\sqrt{2}$．

【题说】第十六届(1990 年)全俄数学奥林匹克十年级题 5

【证】设所写的数为a_i($i=1$，2，…，n)，记$S=\sum_{i=1}^{n}a_i$．由已知$2=\sum_{i=1}^{n}a_i(S-a_i)$．

假设对于所有$k=1$，2，…，n，$S-a_k\geq\sqrt{2}$，则$2\geq\sum_{i=1}^{n}(a_i\sqrt{2})=\sqrt{2}S$，即$\sqrt{2}\geq S$．另一方面，$S>S-a_1\geq\sqrt{2}$，矛盾．故命题得证．

B1-036　A 是满足下列条件的正整数集合；

(1)没有 2，3，5，7，11，13 以外的素因数；

(2)不被 2^2，3^2，5^2，7^2，11^2，13^2 整除．

但 $1\in A$．求 A 的元素 n 的倒数的总和．

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\frac{1}{2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13}$$

【题说】1992 年日本数学奥林匹克预选赛题 4.

【解】

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13}$$

$$=\frac{1}{2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13}((1+2+3+5+\cdots+13)+(2\cdot3+2\cdot5+\cdots+11\cdot13)+\cdots+(2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13))$$

$$=\frac{1}{2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13}(1+2)(1+3)(1+5)(1+7)(1+11)(1+13)$$

$$=\frac{3\cdot4\cdot6\cdot8\cdot12\cdot14}{2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13}=\frac{2304}{715}$$

B1-037 有理数集 Q 的子集 S 有如下性质：

(1)如果 a∈S，b∈S，则 a+b，ab∈S；

(2)对于每一个有理数 r，r∈S，-r∈S，r=0 有且仅有一条成立.

试证明：S 是由全体正有理数组成.

【题说】1993 年河北省赛一试题 3.

【证】i)先证 1∈S．否则由(2)得-1∈S，再由(1)得 1=(-1)(-1)=1∈S，与(2)矛盾.

ii)由 1∈S 得 2=1+1∈S，3=2+1∈S，…，故一切正整数∈S.

(iii)一切正有理数 $\frac{n}{m}$(m、n是互质的正整数)∈S．否则，由(2)知 $-\frac{n}{m}$∈S，再由(1)可得

$$m\cdot\left(-\frac{n}{m}\right)=-n\in S$$

与(2)矛盾.

iv)由(2)知，S 不含负有理数和零，即 S 由全体正有理数组成.

B1-038 设 $f(z)=z^2+az+b$ 是具有复系数 a，b 的关于复变量 z 的二次三项式，且对一切 z(|z|=1)有|f(z)|=1．求 a 和 b 的值.

【题说】1993 年河北省赛二试题 1.

【解】令 z=±1，±i 得

$$1=|1+a+b|$$
$$1=|1-a+b|$$
$$1=|-1+ia+b|$$
$$1=|-1-ia+b|$$

相加得

$$4=|1+a+b|+|1-a+b|+|-1+ia+b|+|-1-ia+b|$$
$$\geq|(1+a+b)+(1-a+b)+(1-ia-b)+(1+ia-b)|=4$$

从而 1+a+b，1-a+b，1-ia-b，1+ia-b 四个复数作为向量来看，方向相同，而它们的长又均为 1．于是 a=0，b=0.

另一方面，在 a=b=0 时，$f(z)=z^2$．对一切满足|z|=1 的 z，$|f(z)|=|z|^2=1$.

B1-039　证明：实数 x 是有理数的充分必要条件是：能从数列 x、x+1，…，x+n，…中选出 3 个不同的项，组成等比数列．

【题说】第二十五届(1993 年)加拿大数学奥林匹克题 2．

【证】(1)充分性 设 x+i、x+j、x+k 成等比数列，则

$$(x+j)^2=(x+i)(x+k)$$
$$=((x+j)-(j-i))((x+j)+(k-j))$$
$$=(x+j)^2+(k+i-2j)(x+j)-(k-j)(j-i)$$

从而 $(k+i-2j)(x+j)=(k-j)(j-i)\neq 0$

所以 $i+k-2j\neq$，$x+j=\dfrac{(k-j)(j-i)}{k+i-2j}$ 为有理数，x 也为有理数．

(2)必要性 设 x 为有理数 $\dfrac{q}{p}$ (p、q 为整数且 $p\neq 0$)，则 x，$x+q$，$x+(p$ p+2)q 成等比数列．

事实上，这时

$$x[x+(p+2)q]=\frac{q}{p}[\frac{q}{p}+(p+2)q]$$
$$=\left(\frac{q}{p}\right)^2+2q\frac{q}{p}+q^2=(x+q)^2$$

B1-040　对每一个整数 n≥2，确定并证明满足下列等式：

$$a^n=a+1 \quad 及 \quad b^{2n}=b+3a$$

的两个正实数 a，b 谁大．

【题说】第二十二届(1993 年)美国数学奥林匹克题 1．

【解】我们证明对一切 n≥2，有 a＞b．

显然 a≠1，从而 $(a+1)^2>4a$．假设 b≥a，则得到如下两个互相矛盾的结果：

$$\frac{b}{a}\leq\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}$$

及

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}=\frac{b+3a}{(a+1)^2}<\frac{b+3a}{4a}\leq\frac{b}{a}$$

故 a＞b．

B1-041　已知 n 个正整数 $a_i(1\leq i\leq n)$ 满足 $a_1<a_2<\cdots<a_n\leq 2n$．其中任意两个 a_i，$a_j(i\neq j)$ 的最小公倍数都大于 2n．

求证：$a_1>\left[\dfrac{2n}{3}\right]$ · $\left(\left[\dfrac{2n}{3}\right]表示\dfrac{2n}{3}的整数部分\right)$

【题说】1994 年上海市赛高三二试题 1．

【证】将每个 a_i 写成 $2^{\alpha_i}(2t_i-1)$ 的形式，其中 α_i 为非负整数，t_i 为自然数．对任意的 i≠j，因 $[a_i,a_j]>2n$，故 $2t_i-1\neq 2t_j-1$．由此推知，$2t_1-1$，$2t_2-1$，…，$2t_n-1$ 是 1，3，…，2n-1 的一个排列．

若 $a_1\leq\left[\dfrac{2n}{3}\right]$，则 $3a_1\leq 2n$，且 $3a_1=2^{\alpha_1}(6t_1-3)$．故 $6t_1-3$ 也是不超 $2n$

-1 的正奇数．因 $6t_1-3\neq 2t_1-1$，故存在 $j>1$，使 $6t_1-3=2t_j-1$．于是

$$[a_1,a_j]=\begin{cases}2^{\alpha_1}(2t_j-1)=3a_1\leq 2n，若\alpha_1\geq\alpha_j\\ a^j(2t_j-1)=a_j\leq m，若\alpha_1<\alpha_j\end{cases}$$

B1-042 证明 $\sqrt{2}-1$ 的每个正整数幂都可以写成 $\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$ 的形式，m 为正整数．

【题说】第二十六届(1994 年)加拿大数学奥林匹克题 2．

【解】$(\sqrt{2}-1)^n=\frac{1}{2}((\sqrt{2}+1)^n+(\sqrt{2}-1)^n)$

$$-\frac{1}{2}((\sqrt{2}+1)^n-(\sqrt{2}-1)^n)，$$

令 $m=\frac{1}{4}((\sqrt{2}+1)^n+(\sqrt{2}-1)^n)^2$，则

$$m-1=\frac{1}{4}((\sqrt{2}+1)^n-(\sqrt{2}-1)^n)^2$$

并且

$$\begin{aligned}m&=\frac{1}{4}((\sqrt{2}+1)^{2n}+(\sqrt{2}-1)^{2n}+2)\\&=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}C_{2n}^{2k}\cdot 2^k+1\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}C_{2n}^{2k}\cdot 2^{k-1}+1\end{aligned}$$

为整数，则

$$(\sqrt{2}-1)^n=\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$$

B1-043 设 $K_1<K_2<K_3<\cdots$ 是正整数，且没有两个数是相邻的，$S_m=K_1+K_2+\cdots+K_m$，$m=1，2，3，\cdots$．证明：对每一个正整数 n，区间 $[S_n，S_{n+1})$ 中至少有一个完全平方数．

【题说】第二十三届(1994 年)美国数学奥林匹克题 1．

【证】区间 $[S_n，S_{n+1}]$ 中有完全平方数，当且仅当区间 $[\sqrt{S_n}，\sqrt{S_{n+1}}]$ 中有整数．所以只需证明对每一个正整数 $n\geq 1$，$\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}\geq 1$．将 $S_{n+1}=S_n+K_{n+1}$ 代入上述不等式并化简知所要证明的不等式就是 $K_{n+1}\geq 2\sqrt{S_n}+1$．因为 $K_{m+1}-K_m\geq 2$．对每一个正整数 m 成立，

$$\begin{aligned}S_n&=K_n+K_{n-1}+K_{n-2}+\cdots+K_1\\&\leq K_n+(K_n-2)+(K_n-4)+\cdots+L_n\end{aligned}$$

其中 $L_n=2$，如果 K_n 是偶数；$L_n=1$，如果 K_n 是奇数，由此可得

$$S_n\leq\begin{cases}\dfrac{K_n(K_n+2)}{4} & (如果K_n是偶数)\\ \dfrac{(K_n+1)^2}{4} & (如果K_n是奇数)\end{cases}$$

$$\leq\frac{(K_n+1)^2}{4}$$

所以$(K_n+1)^2\geq 4S_n$，因而$K_{n+1}\geq K_n+2\geq 2\sqrt{S_n}+1$．

B1-044 已知方程$x^{10}+(13x-1)^{10}=0$有10个复根r_1，$\bar{r}_1$；r_2，$\bar{r}_2$；r_3，$\bar{r}_3$；r_4，$\bar{r}_4$；r_5，$\bar{r}_5$．而r_i与$\bar{r}_i$$(i=1，2，3，4，5)$互为共轭复根．求$\frac{1}{r_1\bar{r}_1}+\frac{1}{r_2\bar{r}_2}+\frac{1}{r_3\bar{r}_3}+\frac{1}{r_4\bar{r}_4}+\frac{1}{r_5\bar{r}_5}$的值．

【题说】第12届(1994年)美国数学邀请赛题 13．

【解】原方程即

$$\left(\frac{1}{x}-13\right)^{10}=-1$$

所以对任一个根 r 有

$$\left|\frac{1}{r}-13\right|=1$$

从而

$$\left(\frac{1}{r_1}-13\right)\left(\frac{1}{\bar{r}_1}-13\right)+\cdots+\left(\frac{1}{r_5}-13\right)\left(\frac{1}{\bar{r}_5}-13\right)=5$$

展开得

$$\left(\frac{1}{r_1\bar{r}_1}+\cdots+\frac{1}{r_5\bar{r}_5}\right)-13\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{\bar{r}_1}+\cdots+\frac{1}{r_5}+\frac{1}{\bar{r}_5}\right)+5\cdot 169=5$$

由于 $-1=\left(\frac{1}{r}\right)^{10}-130\left(\frac{1}{r}\right)^{9}+\cdots$

所以$\frac{1}{r}$是$x^{10}-130x^9+\cdots=-1$的根，故

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{\bar{r}_1}+\cdots+\frac{1}{r_5}+\frac{1}{\bar{r}_5}=130$$

$$\frac{1}{r_1\bar{r}_1}+\cdots+\frac{1}{r_5\bar{r}_5}=850$$

B1-045　求满足下列等式的数 a；

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\frac{1}{\sqrt[3]{a}}(1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$$

【题说】1995年日本数学奥林匹克预选赛题 1，

【解】将等式两边同立方，并整理得

$$(\sqrt[3]{2}-1)a=(1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})^3$$
$$=1-2+4-6\cdot 2+3(-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$$
$$=9(\sqrt[3]{2}-1)$$

所以 a=9．

B1-046　设 p 是 n 个实数 x_1，x_2，…，x_n 的乘积，若 $p-x_k$ 是奇数，k=1，2，…，n．证明：x_1，x_2，…，x_n 皆为无理数．

【题说】1995年城市数学联赛高年级较高水平题 2．

【解】设 $p-x_k=a_k$ 为奇数(k=1，2，…，n)，则

$$p=x_1x_2\cdots x_n=(p-a_1)(p-a_2)\cdots(p-a_n)$$

即 P 是方程

$$(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)=x \tag{1}$$

的根．方程(1)的首项系数为 1，所以它的有理根一定是整数，而且一定是常数项$(-1)^n a_1a_2\cdots a_n$的约数，即有理根一定是奇数．但 x 为奇数时，(1)的左边为偶数，右边为奇数．所以(1)没有奇数根，从而没有有理根．于是 p 为无理数，

$x_k=p-a_k$均为无理数(k=1，2，…，n)．

B1-047　a、b、c、d 取某些实数值时，方程$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$有四个非实数根，其中两个根的积为 13+i，另两个根的和为 3+4i，这里 i 为虚数单位．求 b．

【题说】第 13 届(1995 年)美国数学邀请赛题 5．

【解】设四个根为 e±if，g±ih，则

$$e+g=3，f+h=4$$

所以

$b=(e+if)(e-if)+(g+ih)+(g-ih)+(e+if)(g+ih)+(e-if)(g-ih)+(e+if)(g-ih)+(e-if)(g+ih)$

$=e^2+f^2+g^2+h^2+26+2(eg+fh)$

$=(e+g)^2+(f+h)^2+26$

$=3^2+4^2+26$

$=51$

B1-048　设非零复数a_1，a_2，a_3，a_4，a_5满足

$$\begin{cases}\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{a_4}{a_3}=\dfrac{a_5}{a_4} & (1)\\ a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=4\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_4}+\dfrac{1}{a_5}\right)=S & (2)\end{cases}$$

其中 S 为实数，且$|S|\le 2$．求证：复数a_1，a_2，a_3，a_4，a_5在复平面上所对应的点位于同一圆周上．

【题说】1997 年全国联赛一试题 5．

【解】令$a_2/a_1=q$，则$a_n=a_1q^{n-1}$(n=2，3，4，5)，于是由条件(1)，得

$$a_1(1+q+q^2+q^3+q^4)=\frac{4}{a_1q^4}(q^4+q^3+q^2+q+1) \tag{3}$$

(1)若 $1+q+q^2+q^3+q^4=0$，则

$$q^5-1=(q-1)(q^4+q^3+q^2+q+1)=0$$

$\Rightarrow q^5=1$，$|q|=1$，从而$|a_1|=|a_2|=|a_3|=|a_4|=|a_5|$，故复数$a_1$，$a_2$，$a_3$，$a_4$，$a_5$所对应的点共圆．

(2)若 $1+q+q^2+q^3+q^4\neq 0$，则由(3)得

$a_2^2q^4=4$ 即 $a_3^2=4$，$a_3=\pm 2$．

此时 q 满足方程

$$1+q+\frac{1}{q}+q^2+\frac{1}{q^2}=\frac{S}{a_3}=\pm\frac{S}{2}$$

(4)

令$x=q+\dfrac{1}{q}$，则(4)成为关于x的二次方程

$$x^2+x-1\pm\frac{S}{2}=0$$

(5)

因｜S｜≤2，故判别式△=5±2S＞0，从而方程(5)有二相异实根，且其绝对值都不大于 2．

事实上，当｜x｜＞2 时，令｜x｜=2+h(h＞0)，则

$$x^2+x-1\pm\frac{S}{2}\geq(2+h)^2-(2+h)-1-\left|\frac{S}{2}\right|$$

$$\geq h^2+3h>0$$

对于方程(5)的每个根α、q 满足实系数二次方程 $q^2-\alpha q+1=0$，其判别式$\triangle=\alpha^2-4\leq0$，故两根 q_1、q_2 或为相等的实数，或为共轭复数，都有$|q_1|^2=|q_2|^2=q_1q_2=1$．

总之，方程(5)的每个根 q，都满足｜q｜=1．

B1-049　试问：当且仅当实数 x_0，x_1，…，x_n(n≥2)满足什么条件时，存在实数 y_0，y_1，…，y_n，使得

$$z_0^2=z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2$$

(1)

成立，其中 $z_k=x_k+iy_k$，i 为虚单位，k=0，1，…，n．证明你的结论．

【题说】1997 年全国联赛二试题 2．

【解】若存在实数 y_1，y_2，…，y_n 使(1)成立，则

$$(1)\Rightarrow\begin{cases}x_0^2-y_0^2=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2-\sum\limits_{k=1}^{n}y_k^2\\ x_0y_0=\sum\limits_{k=1}^{n}x_ky_k\end{cases}$$

(2)

下面证明

$$x_0^2\leq\sum_{k=1}^{n}x_k^2$$

(3)

事实上，若$x_0^2>\sum x_k^2$，则由(2)知$y_0^2>\sum y_k^2$．由柯西不等式，得

$$x_0^2y_0^2=(\sum x_ky_k)^2\leq(\sum x_k^2)(\sum y_k^2)<x_0^2y_0^2$$

这是不可能的．故(3)成立．

反之，若(3)成立，有两种情况．

(1)$x_0^2=\sum x_k^2$，则取$y_k=x_k$，k＝0，1，2，…，n，显然(2)成立．

(2)$x_0^2<\sum x_k^2$，记$a^2=\sum x_k^2-x_k^0>0$，从而x_1，…，x_n，不全为0．不妨设$x_n\neq0$，取$y_k=0$，k＝0，1，…，n-2．

$$y_{n-1}=\frac{ax}{\sqrt{x_{n-1}^2+x_n^2}}，y_n=\frac{-ax_{n-1}}{\sqrt{x_{n-1}^2+x_n^2}}$$

易知(2)也成立．

B1-050 将和$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{k^3+9k^2+26k+24}$写成$\frac{p(n)}{q(n)}$的形式，其中$p(x)$，$q(x)$为整系数多项式．

【题说】第二十九届(1997 年)加拿大数学奥林匹克题 5．

【解】原式$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{(k+2)(k+3)(k+4)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(C_{n+1}^{k+1}-C_n^{k+1})}{(k+2)(k+3)(k+4)}$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{(n+1)!}{(k+4)!(n-k)!}-\frac{n!}{(k+4)!(n-k-1)!}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(-1)^k}{(n+2)(n+3)(n+4)}C_{n+4}^{k+4}-\frac{(-1)^k}{(n+1)(n+2)(n+3)}C_{n+3}^{k+4}\right)$$

$$=\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}\left(\sum_{k=0}^{n+4}(-1)^k C_{n+4}^k-1+C_{n+4}^1-C_{n+4}^2+C_{n+4}^3\right)$$

$$-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\left(\sum_{k=0}^{n+3}(-1)^k C_{n+3}^k-1+C_{n+3}^1-C_{n+3}^2+C_{n+3}^3\right)$$

$$=\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$$

$$\left[(n+1)\left(-1+n+4-\frac{(n+4)(n+3)}{2}+\frac{(n+4)(n+3)(n+2)}{6}\right)\right.$$

$$\left.-(n+4)\left(-1+n+3-\frac{(n+3)(n+2)}{2}+\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}\right)\right]$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n+4}(-1)^k C_{n+4}^k=(1-1)^{n+4}=0\sum_{k=0}^{n+3}(-1)^k C_{n+3}^k=(1-1)^{n+3}=0\right)$$

$$=\frac{1}{2(n+3)(n+4)}$$

B1-051 证明：如果在 x 取三个不同的整数值时，变量 x 的整系数多项式的值的绝对值都是 1，那么这多项式没有整数根．

【题说】1967 年～1968 年波兰数学奥林匹克二试题 1．

【证】设整系数多项式 f(x)对于三个不同的整数 a、b、c，有

$$|f(a)|=|f(b)|=|f(c)|=1 \tag{1}$$

假定 f(x)有整数根 x_0，则

$$f(x)=(x-x_0)Q(x) \tag{2}$$

这里 Q(x)是整系数多项式．

由(1)与(2)可知，$|(a-x_0)Q(a)|a-x_0|\cdot|Q(a)|=1$．因为$|Q(a)|$是整数，所以$|a-x_0|=1$．同理$|b-x_0|=1$，$|c-x_0|=1$，从而三个数

$a-x_0$，$b-x_0$，$c-x_0$ 中有两个相等，因而 a、b、c 中有某两个相等，与已知 a、b、c 矛盾，故 f(x)不可能有整数根．

B1-052　已知有整系数 a_1，a_2，…，a_n 的多项式

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

对四个不同的整数 a、b、c、d，使得

$$f(a)=f(b)=f(c)=f(d)=5$$

证明：不存在整数 k 使得 f(k)=8．

【题说】第二届(1970 年)加拿大数学奥林匹克题 10．注意 a、b、c、d 是多项式 f(x)-5 的根．

【证】由已知，应有

$$f(x)-5=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)g(x)$$

其中 g(x)是整系数多项式．如果有整数 k，使 f(k)=8，则

$$(k-a)(k-b)(k-c)(k-d)g(k)=3$$

但素数 3 不可能有 4 个以上不同的因数(包括负因数在内)k-a，k-b，k-c，k-d，g(k)．矛盾．

B1-053　P(x)是非常数的整系数多项式，n(P)为能使 $[P(K)]^2=1$ 成立的整数 K 的个数．证明：

$$n(P)-\deg(P)\leq 2$$

其中 deg(P)是多项式 P(x)的次数．

【题说】第十六届(1974 年)国际数学奥林匹克题 6．本题由瑞典提供．

【证】若 $[P(K)]^2=1$，则 $P(K)=\pm 1$．

设 P(x)-1 有 m 个整数根 K_1，…，K_m，则

$$P(x)-1=(x-K_1)\cdots(x-K_m)Q(x)$$

其中 Q(x)为整系数多项式．

$$P(x)+1=(x-K_1)\cdots(x-K_m)Q(x)+2$$

若 m≥4，则因 4 个互不相同的非零整数之积的绝对值大于 2，故 P(K)+1 对任意整数 K 不为 0，若 m=3，同理可得至多 1 个 K 使 P(K)+1=0．对 P(x)+1 的整数根个数 m′有完全类似的结论：若 m′≥4，则 m=0，若 m′=3，则 m=1．总而言之，m 和 m′至少有一个不大于 2，因而

$$n(P)=m+m'\leq 2+\deg(P)$$

$$n(P)-\deg(P)\leq 2$$

B1-054　求出满足下列条件的所有含两个变量的多项式：

(1)P 是 n 次齐次的．即对所有实数 t、x、y，有

$$P(tx, ty)=t^n\cdot P(x, y)$$

(2)对所有实数 a、b、c 有

$$P(a+b, c)+P(b+c, a)+P(c+a, b)=0$$

(3)P(1，0)=1．

【题说】第十七届(1975 年)国际数学奥林匹克题 6．本题由英国提供．

【解】设 P 是满足条件(1)～(3)的 n 次多项式．由于常数多项式不可能同时满足(2)和(3)，故 n≥1．

在(2)中令 a=b，c=-2a，则由 P 的齐次性得

$$0=P(2a,-2a)+P(-a,a)+P(-a,a)$$
$$=[(-2)^n+2]P(-a,a)$$

若 $n>1$，则有 $P(-a,a)=0$，因而 $P(x,y)$ 能被 $x+y$ 整除．

设 $P(x,y)=(x+y)P_1(x,y)$，则由(2)得

$P_1(a+b,c)(a+b+c)+P_1(b+c,a)(a+b+c)+P_1(c+a,b)(a+b+c)=0$

故

$$P_1(a+b,c)+P_1(b+c,a)+P_1(c+a,b)=0$$

P_1 仍是齐次的，且

$$P_1(1,0)=P_1(1,0)(1+0)=P(1,0)=1$$

即 P_1 也满足条件(1)～(3)，它的次数为 $n-1$．如果 $n-1>1$．同样可再构造一个 $n-2$ 次齐次多项式 P_2，它满足条件(1)～(3)，并且

$$p_1(x,y)=(x+y)p_2(x,y)$$

如此下去，最后总会得到一个一次多项式

$$P_{n-1}(x,y)=mx+ny$$

由条件(2)令 $a=1$，$b=c=0$，得

$$2m+n=0$$

再由(3)得 $m=1$，故 $n=-2$，而有

$$P(x,y)=(x+y)^{n-1}P_{n-1}(x\cdot y)$$
$$=(z+y)^{n-1}(x-2y)$$

不难验证这种形状的多项式的确满足条件(1)～(3)，这样我们就求出了所有满足条件(1)～(3)的齐次多项式．

B1-055　如果 $P(x)$、$Q(x)$、$R(x)$ 及 $S(x)$ 是多项式，且使得

$$P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)=(x^4+x^3+x^2+x+1)S(x) \quad (1)$$

试证：$(x-1)$ 是 $P(x)$ 的一个因式．

【题说】第五届(1976 年)美国数学奥林匹克题 5．由多项式余式定理，问题等价于证明 $P(1)=0$．

【证】令 $\omega=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$，则 $\omega^5=1$．依次设 $x=\omega$、ω^2、ω^3，代入(1)，因 $(x^4+x^3+x^2+x+1)=(x^5-1)/(x-1)$，得

$$P(1)+\omega Q(1)+\omega^2R(1)=0 \quad (2)$$
$$P(1)+\omega^2Q(1)+\omega^4R(1)=0 \quad (3)$$
$$P(1)+\omega^4Q(1)+\omega^6R(1)=0 \quad (4)$$

消去 $Q(1)$、$R(1)$，得 $P(1)=0$．由余式定理知，$(x-1)$ 是 $P(x)$ 的因式．

B1-056　确定所有正整数对 (m,n)，使得 $(1+x^n+x^{2n}+\cdots+x^{mn})$ 能被 $(1+x+x^2+\cdots+x^m)$ 整除．

【题说】第六届(1977 年)美国数学奥林匹克题 1．

【解】问题等价于：求 (m,n) 使得

$$\frac{(x^n)^{m+1}-1}{x^n-1}\cdot\frac{x-1}{x^{m+1}-1}$$

是多项式．对任何正整数 m、n，$(x^n)^{m+1}-1$ 既能被 (x^n-1) 整除，又能被 $(x^{m+1}-1)$ 整除．所以，为使分母因式全约去，只须 (x^n-1) 与 $(x^{m+1}-1)$ 除 $(x-1)$ 外，

没有别的公因式．这只须 n 与(m+1)互质即可．

另一方面，如果 n 与(m+1)的最大公约数 d＞1，那么$(x^n-1)(x^{m+1}-1)$被$(x^d-1)^2$整除，$(x^n-1)(x^{m+1}-1)$有重根 s≠1．但$((x^n)^{m+1}-1)\cdot(x-1)$只有一个重根 x=1，所以当 n 与 m+1 不互质时，(m，n)不合要求．

总之，本题的解是 n 与 m+1 互质的正整数对(m，n)．

B1-057　分解因式：$x^{12}+x^9+x^6+x^3+1$．

【题说】1978 年全国联赛二试题 2(1)．

【解】$x^{12}+x^9+x^6+x^3+1$

$$=\frac{x^{15}-1}{x^3-1}=\frac{x^5-1}{x-1}\cdot\frac{x^{10}+x^5+1}{x^2+x+1}$$

$$=(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)$$

B1-058　设 $f(x)=ax^2+bx+c$，已知 f(1)、f(2)、f(3)、f(4)、f(5)都是质数，求证：f(x)不能分解成两个整系数一次式的积．

【题说】1981 年北京市赛高一题 7．用反证法．

【证】设

$$f(x)=g(x)h(x)$$

其中 g(x)与 h(x)都是整系数一次式，则

$$f(1)=g(1)h(1)，f(2)=g(2)h(2)$$
$$f(3)=g(3)h(3)，f(4)=g(4)h(4)$$
$$f(5)=g(5)h(5)$$

上述五个等式的左端都是质数，因此在 g(1)、g(2)、g(3)、g(4)、g(5)，h(1)、h(2)、h(3)、k(4)、h(5)这十个整数中至少有五个是±1．

由于 g(x)是整系数一次式，所以 g(1)、g(2)、g(3)、g(4)、g(5)是不同的数，其中至多有一个 1，一个-1；h(1)、h(2)、h(3)、h(4)、h(5)中也是这样．故这十个数中至多有四个±1．矛盾．

所以原命题正确．

B1-059　对每一实数 r，定义 T_r 为平面内的点变换，它把点(x，y)变为点$(2^rx，r2^rx+2^ry)$．求曲线 y=f(x)，使在所有变换 T_r 下，其图像保持不变．

【题说】第十五届(1983 年)加拿大数学奥林匹克题 2．

【解】设曲线 y=f(x)在所有变换 T_r 下保持不变，则对所有 x，r 应有

$$f(2^rx)=r2^rx+2^ry=r2^rx+2^rf(x) \tag{1}$$

在式中令 x=0，则有 $f(0)=2^rf(0)$，故知 f(0)=0．

对 x＞0，设 f(1)=a，将 x=1 代入(1)中，则有

$$f(2^r)=r2^r+a2^r \tag{2}$$

再令 $r=\log_2x$，由(2)得

$$f(x)=x\log_2x+ax \tag{3}$$

对 x＜0，设 f(-1)=b．在(1)中令 x=-1，则有

$$f(-2^r)=-r2^r+2^rf(-1)$$

$$=-r2^r+b\cdot 2^r \tag{4}$$

再令 $r=\log_2(-x)$，由(4)得

$$f(x)=x\log_2(-x)-bx \tag{5}$$

综上所述，$y=f(x)$的解析表达式应为

$$y=f(x)=\begin{cases} x\log_2 x+ax & (x>0) \\ 0 & (x=0) \\ x\log_2(-x)-bx & (x<0 \end{cases}$$

其中 a、b 为常数．

不难验证，它们确实符合要求．

B1-060　用以下规则归纳地造出多项式的集合 S：(1)$x\in S$；(2)若 $f(x)\in S$，则 $xf(x)\in S$，$x+(1-x)f(x)\in S$．证明：S 中没有两个不同的多项式，它们在区间 $0<x<1$ 上的图像相交．

【题说】第十六届(1987 年)美国数学奥林匹克题 3．用数学归纳法．

【证】首先证明：在区间 $0<x<1$ 上，对于所有 $f(x)\in S$，有 $0<f(x)<1$．事实上，可对多项式次数进行归纳证明．n=1，显然成立．假设 $0<f(x)<1$，则 $0<xf(x)<x<1$，$0<x+(1-x)f(x)<x+(1-x)=1$．

下面仍对次数 n 进行归纳，证明 S 中任二多项式不交．n=1，显然．假设次数≤k 的任两多项式 $f_1(x)$、$f_2(x)$不交，即对 $x\in(0，1)$，$f_1(x)\neq f_2(x)$，于是

$$xf_1(x)\neq xf_2(x)$$
$$x+(1-x)f_1(x)\neq x+(1-x)f_2(x)$$

同时对任何 $x\in(0，1)$，有

$$xf_1(x)<x<x+(1-x)f_2(x)$$
$$xf_2(x)<x<x+(1-x)f_1(x)$$

故次数≤k+1 次的任两个多项式也不交．

B1-061　当 x=-1，x=0，x=1，x=2 时，多项式 $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 取整数值．求证：对于所有的整数 x，这个多项式都取整数值．

【题说】第十四届(1988 年第三阶段)全俄数学奥林匹克九年级题 5．

【证】先将多项式 P(x)变形为

$$P(x)=6a\cdot\frac{(x-1)x(x+1)}{6}+2b\frac{x(x-1)}{2}+(a+b+c)x+d$$

由已知，d=P(0)，a+b+c+d=P(1)都是整数，因此 a+b+c 也是整数．又 P(-1)=2b · (a+b+c)+d，所以 2b 也是整数．最后，因为 P(2)=6a+2b+2(a+b+c)+d 是整数，所以 6a 也是整数．当 x 为任意整数时，数

$$\frac{(x-1)x(x+1)}{6}\text{和}\frac{x(x-1)}{2}$$

是整数，所以 P(x)是整数．

[评注]如果一个 k≤n 次多项式当自变量取 n+1 个连续整数值时都取整数值，那么在自变量取任一整数值时，这个多项式取整数值．

B1-062　设 a、b、c 是三个不同的实数，P(x)是实系数多项式．已知

(1)P(x)除以(x-a)得余数 a；

(2)P(x)除以(x-b)得余数 b；

(3)P(x)除以(x-c)得余数 c．

求多项式 P(x)除以(x-a)(x-b)(x-c)所得的余式．

【题说】1990 年意大利数学奥林匹克题 3．

【解】根据余数定理，P(x)被 x-a 除，余数为 P(a)，所以 P(a)=a．从而 P(x)-x，在 x=a 时值为 0．同理它在 x=b，c 时值为 0．所以(x-a)(x-b)(x-c)｜P(x)-x，即 P(x)除以(x-a)(x-b)(x-c)，余式为 x．

B1-063　已知多项式 $2x^3-60x^2+ax$ 在三个连续的整点处取得三个连续(同样顺序)的整数值．求这些值．

【题说】第十七届(1991 年)全俄数学奥林匹克十一年级题 1．

【解】由已知

$$2(n-1)^3-60(n-1)^2+a(n-1)=m-1 \tag{1}$$

$$2n^3-60n^2+an=m \tag{2}$$

$$2(n+1)^3-60(n+1)^2+a(n+1)=m+1 \tag{3}$$

(1)+(3)-(2)×2，并整理得

$$12n-120=0，所以 n=10$$

代入(1)、(2)得

$$2\times 9^3-60\times 9^2+9a=m-1 \tag{4}$$

$$2\times 10^3-60\times 10^2+10a=m \tag{5}$$

解得 a=599，m=1990．

所以这三个连续的整数值是 1989、1990、1991．

B1-064　设 n 是给定的自然数，求所有正数对 a、b，使得 x^2+ax+b 是 $ax^{2n}+(ax+b)^{2n}$ 的因式．

【题说】1992 年上海市赛高三二试题 3．

【解】设 $x=x_0$ 是 $x^2+ax+b=0$ 的根．

因为 b＞0，故 $x_0\neq 0$．x_0 也是 $ax^{2n}+(ax+b)^{2n}$ 的根，所以

$$ax_0^{2n}+(ax_0+b)^{2n}=ax_0^{2n}+(-x_0^2)^{2n}$$

$$=ax_0^{2n}+x_0^{4n}=0$$

从而，$a+x_0^{2n}=0$，所以，$x_0^{2n}=-a=a(\cos\pi+i\sin\pi)$．

$$x_0=\sqrt[2n]{a}\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$$

另一方面，由求根公式

$$x_0=\frac{-a\pm\sqrt{4b-a^2 i}}{2}$$

故

$$\sqrt[2n]{a}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}=-\frac{a}{2}$$

这说明$\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}<0$，$\frac{\pi}{2}+2k\pi<\frac{(2k+1)\pi}{2n}<\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，

从而 $n<2k+1<3n$．由此可见，$n=1$ 时本题无解．

$n\geq 2$ 时，

$$a=\left[-2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right]^{\frac{2n}{2n-1}}=\left[2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2}\right]^{\frac{2n}{2n-1}}$$

$$b=x_0\ \overline{x}_0=\left|x_0\right|^2=\sqrt[n]{a}=\left[2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right]^{\frac{2}{2n-1}}$$

故当 $n\geq 2$，$n\in N$ 时，所求的正数对 a、b 为

$$\begin{cases}a=\left[2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right]^{\frac{2n}{2n-1}}\\ b=\left[2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right]^{\frac{2}{2n-1}}\\ \text{其中}n<2k+1<3n,\ k\in N\end{cases}$$

$n=1$ 时无解．

B1-065　设 P(Z)是 1992 次复系数多项式，它的根各不相同，证明：存在复数 a_1，a_2，…，a_{1992}，使得 P(Z)整除多项式

$$\{\cdots[(Z-a_1)^2-a_2]^2-\cdots-a_{1991}\}^2-a_{1992}$$

【题说】第二十一届(1992 年)美国数学奥林匹克题 5．

【证】令 $n=1992$，r_1，r_2，…，r_n 为 P(z)的 n 个互不相同的根．归纳地定义非空集 S_i 与复数 a_i 如下：设

$$S_0=\{r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_n\}$$

对 $i\geq 1$，定义 a_i 为 S_{i-1} 中任两个数的平均数，(若 S_{i-1} 只含一个数，则定义 a_i 为该数)．又定义 $S_i=\{(z-a_i)^2\mid z\in S_{i-1}\}$．若 S_{i-1} 中至少含有两个数z_1、z_2，而$a_i=\frac{z_1+z_2}{2}$，则由于$(z_1-a_i)^2=(z_2-a_i)^2$，所以$|S_i|<|S_{i-1}|$．从而，至多经 n-1 次后 S_i 只含有一个元，于是 $S_n=\{0\}$．令

$$Q(z)=\{\cdots[(z-a_1)^2-a_2]^2-\cdots-a_{n-1}\}^2-a_n$$

由上面的构造方式可见，有 $(r_k-a_1)^2\in S_1$，$((r_k-a_2)^2-a_2)^2\in S_2$，…，$Q(r_k)\in S_n$

即 $Q(r_k)=0(k=1,2,\cdots,n)$，所以 $P(z)\mid Q(z)$

B1-066　设 $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$，a，b，c，d 为常数，$P(1)=1993$，$P(2)=3986$，$P(3)=5979$．试计算：$\frac{1}{4}[P(11)+P(-7)]$．

【题说】第三届(1993 年)澳门数学奥林匹克第一轮题 2．

【解】记 1993=n，且令 $Q(x)=P(x)-nx$，则有

$$Q(1)=Q(2)=Q(3)=0$$

从而

$$Q(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-r).$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}[P(11)+P(-7)]\\
&=\frac{1}{4}(Q(11)+Q(-7)+n)\\
&=\frac{1}{4}(10\times 9\times 8(8-r)+(-8)(-9)(-10)(-7-r))+n\\
&=\frac{1}{4}\times 10\times 9\times 8\times 15+1993\\
&=5233
\end{aligned}$$

B1-067　设实系数非零多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_0$$
$$g(x)=C_{n+1}x^{n+1}+c_nx^n+\cdots+c_0$$

满足 $g(x)=(x+r)f(x)$，其中 r 为一实数．若

$$a=\max(|a_n|,\cdots,|a_0|)$$
$$c=\max(|c_{n+1}|,\cdots,|c_0|)$$

求证：$a/c\le n+1$．

【题说】1993 年亚太地区数学奥林匹克题 3．

【证】若$|r|\le 1$，则

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1}c_ix^i&=(x+r)\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\\
&=a_nx^{n+1}+\sum_{i=1}^{n}(ra_i+a_{i-1})x^i+ra_0
\end{aligned}$$

即有 $c_{n+1}=a_n$，$c_k=ra_k+a_{k-1}(k=1,2,\cdots,n)$，$c_0＝ra_0$．所以 $a_n=c_{n+1}$，$a_{n-1}=-rc_{n+1}+c_n$，$a_{n-2}=(-r)^2c_{n+1}+(-r)c_n+c_{n-1}$，…，$a_0＝(-r)^nc_{n+1}+(-r)^{n-1}\cdot c_n+\cdots+c_1$．故

$$\begin{aligned}
|a|&=|a_i|\\
&=|(-r)^{n-i}c_{n+1}+\cdots+C_{i+1}|\\
&\le|c_{n+1}|+\cdots+|c_{i+1}|\\
&\le|n-i+1|c\\
&\le(n+1)c
\end{aligned}$$

若$|r|>1$，令$y=\frac{1}{x}$，代入$g(x)=(x+r)f(x)$，再利用上面所证的结论即知命题正确．

B1-068　令 $P_0(x)=x^3+313x^2-77x-8$，对整数 $n\ge 1$，定义 $P_n(x)=P_{n-1}(x-n)$．那么，$P_{20}(x)$展开式中 x 项的系数是多少？

【题说】第十一届(1993 年)美国数学邀请赛题 5．

【解】答 763．

对正整数 n，有

$$P_n(x)=P_{n-1}(x-n)=P_{n-1}(x-n-(n-1))$$
$$=P_{n-3}(x-n-(n-1)-(n-2)$$
$$=\cdots$$
$$=P_0(x-n-(n-1)-\cdots-2-1)$$
$$=P_0(x-\frac{1}{2}(n+1))$$

故 $P_{20}(x)=P_0(x-\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 21)$

$$=P_0(x-210)$$
$$=(x-210)^3+313(x-210)^2-77(x-210)-8$$

其中 x 项的系数为

$$3\cdot(210)^2-313\cdot 2\cdot 210-77=763$$

B1-069 当$a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$时，将$\sqrt{2}$表为次数最低的a的有理多项式，并证明表示式是唯一的．

【题说】1994 年日本数学奥林匹克预选赛题 2．

【解】由于$a^2=5+2\sqrt{6}$，$a^3=9a+2\sqrt{2}$，所以

$$\sqrt{2}=\frac{1}{2}a^3-\frac{9}{2}a$$

由$a^2=5+2\sqrt{6}$知，表$\sqrt{2}$的a的有理系数多项式次数不低于3次．

易知，a 是 4 次方程 $x^4-10x^2+1=0$ 的根，且在整系数范围内，x^4-10x^2+1 不可约，从而在有理系数范围内也不可约．即 a 不可能是不高于 3 次的有理系数方程的根．若$\sqrt{2}$可表为不同的关于a的3次有理式，则a必为不高于 3 次的有理系数方程的根．这不可能．故$\sqrt{2}$的表示式是唯一的．

B1-070　是否存在整系数二次三项式 P(x)，使得对于十进制的任意的全由数码 1 组成的自然数 n，该二次三项式的值 P(n)也是全由数码 1 组成的自然数．

【题说】第二十届(1994 年)全俄数学奥林匹克九年级题 3．

【解】这样的二次三项式是存在的．例如 $P(x)=90x^2+20x+1$

设$n=\underbrace{11\cdots1}_{k个1}$，则$9n+2=1\underbrace{0\cdots0}_{k-1个0}1$．

$$10n(9n+2)=\underbrace{11\cdots1}_{k个1}0\times1\underbrace{0\cdots0}_{k-1个0}1$$
$$=\underbrace{11\cdots1}_{2k个1}0$$

于是$P(n)=\underbrace{11\cdots1}_{2k+1个1}$．

B1-071　整系数多项式 P(x)满足 P(19)=P(94)=1994，求 P(x)的常数项(已知它的绝对值小于 1000)．

【题说】第二十届(1994 年)全俄数学奥林匹克十年级题 6．

【解】设 P(x)的常数项为 a_0，则

$$P(x)=x\cdot Q(x)+a_0$$

其中 Q(x)是整系数多项式，所以

$$P(19)=19n+a_0$$

$$P(94)=94m+a_0$$

其中 m、n 为整数.

由 P(19)=P(94)得 19n=94m，所以

$$n=94k，m=19k(k\text{ 为整数})$$

于是 $19\cdot 94k+a_0=1994$，由此得

$$a_0=1994-1786k$$

因为 $|a_0|<1000$，所以 $k=1$，$a_0=208$.

这样的多项式是存在的．例如

$$-x^2+113x+208=-(x-19)(x-94)+1994$$

B1-072　求最小的正整数 n，它使得 $(xy-3x+7y-21)^n$ 的展开式经同类项合并后至少有 1996 项.

【题说】第十四届(1996 年)美国数学邀请赛题 3.

【解】$(xy-3x+7y-21)^n=(x+7)^n(y-3)^n$

$(x+7)^n$ 展开有 n+1 项，$(y-3)^n$ 展开也有 n+1 项，前者是 x 的幂，后者是 y 的幂，次数各不相同，所以 $(x+7)^n(y-3)^n$ 有 $(n+1)^2$ 项，这些项或 x 的次数不同，或 y 次数不同，均无法合并.

由 $(n+1)^2\geq 1996$ 得 $n\geq 44$．即所求最小的正整数为 44.

B1-073 当 $a^3-a-1=0$ 时，$a+\sqrt{2}$ 是某个整系数多项式的解，求最高次项系数为 1 的满足上述条件的次数最低的多项式.

【题说】1997 年日本数学奥林匹克预选赛题 6.

【解】设 $x=a+\sqrt{2}$，则

$$0=a^3-a-1=(x-\sqrt{2})^3-(x-\sqrt{2})-1$$

即

$$x^3+5x-1=\sqrt{2}(3x^2+1)$$

将上式两边平方并整理，即得所求的多项式为

$$f(x)=x^6-8x^4-2x^3+13x^2-10x-1$$

B1-074　证明对任意整数 n，存在一个唯一的多项式 Q(x)，系数∈{0，1，…，9}，Q(-2)＝Q(-5)＝n.

【题说】第二十六届(1997 年)美国数学奥林匹克题 3.

【解】如果多项式 f(x)与 g(x)在 x=-2 与-5 时值均相等，就记成 f(x)=g(x)，如 $x^2+7x+10=0$.

在 n∈{0，1，…，9}时，常数 n 就是满足要求的多项式 Q(x)．在 n=10 时，$Q(x)=x^3+6x^2+3x$ 满足要求，将它简记为(0，3，6，1)．一般地，$Q(x)=a_kx^k+\cdots+a_0$ 简记为$(a_0，a_1，\cdots，a_k)$.

设 $Q(x)=(a_0，a_1，\cdots，a_k)$的系数∈{0，1，2，…，9}，我们证明存在多项式 P(x)，系数∈{0，1，2，…，9}，并且 P(x)=Q(x)+1，P(x)的系数和也等于 Q(x)的系数和+1．为此，对 Q(x)的系数和 $a_0+a_1+\cdots+a_k$ 进行归纳，奠基显然．设对系数和较小的多项式结论已经成立.

若 $a_0<9$，结论显然．若 $a_0=9$，则

$$(a_0，a_1，\cdots，a_k)+1=(0，a_1，\cdots，a_k)+(0，3，6，1).$$

(i)若 $3+a_1\leq 9$，则

$(0, a_1, \cdots, a_k)+(0, 3, 6, 1)$

$=(0, a_1+3, a_2, \cdots, a_k)+(0, 0, 6, 1)$

对多项式$(a_2, a_3, \cdots, a_k)$运用归纳假设，得多项式$(a'_2, a'_3, \cdots, a'_h)=(a_2, a_3, \cdots, a_k)+1$．继续对所得多项式用归纳假设，直至得到

$$(a_2^{(6)}, \cdots, a_t^{(6)})=(a_2, a_3, \cdots, a_k)+6$$

再用归纳假设得

$$(a_2^{(6)}, a_3^{(6)}, \cdots, a_t^{(6)})+(0, 1)=(a_2^{(7)}, a_3^{(7)}, \cdots, a_r^{(7)})$$

多项式$(0, a_1+3, a_2^{(7)}, a_3^{(7)}, \cdots, a_r^{(7)})$即为所求的$P(x)$．

(ii)若$3+a_1\geq 10$，则令$a'_1=a_1-7$，，

$(0, a_1, \cdots, a_k)+(0, 3, 6, 1)$

$=(0, a_1', a_2, \cdots, a_k)+(0, 0, 9, 7, 1)$

在$a_2=0$时，$(0, a_1', a_2, \cdots, a_k)+(0, 0, 9, 7, 1)=(0, a_1', 9, a_3, \cdots, a_k)+(0, 0, 0, 7, 1)$，情况与(i)类似．

在$a_2\geq 1$时，令$a'_2=a_2-1$，则

$(0, a'_1, a_2, \cdots, a_k)+(0, 0, 9, 7, 1)$

$=(0, a'_1 a'_2, a_3, \cdots, a_k)+(0, 0, 10, 7, 1)$

$=(0, a'_1, a'_2, a_3, \cdots, a_k)$

最后一步利用了$10+7x+x^2=0$．

另一方面，设$Q(x)=(a_0, a_1, \cdots, a_k)$的系数$\in\{0, 1, 2, \cdots, 9\}$，可以证明存在多项式$R(x)$,系数$\in\{0,1,2,\cdots,9\}$,并且$R(x)=Q(x)-1$.这只要注意

$$Q(x)-1=Q(x)+(9, 7, 1)$$

再多次利用上面关于$Q(x)+1$的结果即得．

因此，对一切整数n，均有合乎要求的多项式$Q(x)$存在．

如果又有多项式$Q_1(x)$满足要求，设

$$Q(x)-Q_1(x)=(b_0, b_1, \cdots, b_k), b_i\in\{0, \pm 1, \cdots, \pm 9\}, \quad 0\leq i\leq k.$$

由$Q(-2)-Q_1(-2)=0$得$2\mid b_0$．同理，$5\mid b_0$，所以$10\mid b_0$．但$|b_0|<10$，所以$b_0=0$．

于是$b_k(-2)^k+\cdots+b_1(-2)=0$，从而$2^2\mid 2b_1$，$2\mid b_1$．同理$5\mid b_1$．所以$b_1=0$．

依此类推，可得$b_2=\cdots=b_k=0$．从而合乎条件的$Q(x)$是唯一的．

B1-075　观察

$$\frac{1}{1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}, \quad \frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}, \quad \frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}$$

由这些例子的启发，叙述一般规律，并加以证明．对任何大于1的n，证明存在正整数i和$j(i<j)$使得

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{i(i+1)}+\frac{1}{(i+1)(i+2)}+\cdots+\frac{1}{j(j+1)} \tag{1}$$

【题说】第五届(1973年)加拿大数学奥林匹克题 7.

【解】所给例子暗示的规律是

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$$

它等价于 $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ ·此式显然成立.

于是(1)右边等于

$$\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)+\left(\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{j}-\frac{1}{j+1}\right)-\frac{1}{i}-\frac{1}{j+1}$$

取 i=n-1，j=(n-1)n-1，则

$$\frac{1}{i}-\frac{1}{n}=\frac{1}{j+1}$$

即(1)式成立.

B1-076　设 P 是集合 S_n={1，2，…，n}的一个排列．如果 p(j)=j，元素 j∈S_n 叫做 p 的不动点．设 f_n 是没有不动点的排列的个数，g_n 是恰有一个不动点的排列的个数．证明：｜f_n-g_n｜=1.

【题说】第十四届(1982年)加拿大数学奥林匹克题 4．本题结论可加强为 $f_n-g_n=(-1)^n$.

【证】显然 $f_1=0$，$f_2=1$.

当 n≥3 时，$f_n=(n-1)(f_{n-2}+f_{n-1})$　　　　(1)

事实上，若 k(≠1)排在第一个，这时如果 1 排在第 k 个(即 1 与 k 对换)，其余 n-2 个数没有不动点的排列有 f_{n-2} 个；如果 1 不排在第 k 位，这相当于 n-1 个数都没有不动点，其排列数为 f_{n-1}．当 k 遍历 2，3，…，n 时，便得到(1)式.

对于 g_n 显然 $g_1=1$，$g_2=0$．当 n≥3 时，除某一数 k 不动外，其余数皆变动，而 k 可以是 1～n 中任一个，故得 $g_n=nf_{n-1}$.

因而　$f_n-g_n=(n-1)(f_{n-2}+f_{n-1})-nf_{n-1}$

$=(n-1)f_{n-2}-f_{n-1}=g_{n-1}-f_{n-1}$　　　　(2)

由 $f_1-g_1=-1$ 及(2)得 $f_n-g_n=(-1)^n$.

B1-077　10 名运动员参加乒乓球循环赛，每两人均赛 1 场，设第 1 个选手胜 x_1 场、负 y_1 场，第 2 个选手胜 x_2 场、负 y_2 场等等．证明：

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{10}^2$$

【题说】第二十一届(1987年)全苏数学奥林匹克八年级题 1.

【证】每个选手恰赛 9 场，所以

$$x_i+y_i=9(i=1,2,\cdots,10)$$

胜负总数相同，即

$$x_1+x_2+\cdots+x_{10}=y_1+y_2+\cdots+y_{10}$$

因为　$(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2)-(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{10}^2)$

$=(x_1^2-y_1^2)+(x_2^2-y_2^2)+\cdots+(x_{10}^2-y_{10}^2)$

$=9[(x_1-y_1)+(x_2-y_2)+\cdots+(x_{10}-y_{10})]$

$=0$

所以

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{10}^2=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{10}^2$$

B1-078　命 $P_n(k)$ 是集{1，2，…，n}的保持 k 个点不动的排列的数目，求证：$\sum_{k=0}^{n}kP_n(k)=n$！.

【题说】第二十八届(1987 年)国际数学奥林匹克题 1．本题由原联邦德国提供.

【证】保持 k 个点不动，就是其余 n-k 个点中没有一个点不动，而保持不动的 k 个点有 C_n^k 种取法，所以

$$P_n(k)=P_{n-k}(0)C_n^k$$

于是

$$\sum_{k=0}^{n}kP_n(k)=\sum_{k=0}^{n}kP_{n-k}(0)C_n^k$$

$$=n\sum_{k=1}^{n}P_{n-k}(0)C_{n-1}^{k-1}=n\sum_{k=1}^{n}P_{n-1}(k-1)$$

而 $\sum_{k=1}^{n}P_{n-1}(k-1)$ 表示 $n-1$ 点中没有点不动，或 1 点不动，…，或 $n-1$ 点都不动的排列数，也就是 n-1 点的全排列数(n-1)！，所以

$$\sum_{k=1}^{n}kP_n(k)=n(n-1)!=n!$$

B1-079　数 x、y、z 满足关系式

$$x/(y+z)+y/(z+x)+z/(x+y)=1$$

证明：$x^2/(y+z)+y^2/(z+x)+z^2/(x+y)=0$

【题说】第十六届(1990 年)全俄数学奥林匹克十年级题 1.

【证】将给定的已知等式分别乘以 x、y、z 且将所得三式相加，得

$$[x^2/(y+z)+y^2/(z+x)+z^2/(x+y)]+[xy/(y+z)+xz/(y+z)]+[xy/(z+x)$$

$$+yz/(z+x)]+[xz/(x+y)+zy/(x+y)]$$

$$=x+y+z$$

上式左边后三个括号内的数分别为 x、y、z，所以，要证的等式成立.

B1-080　设 x_1，x_2，…，x_n $(n\geq3)$ 是非负实数，且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$

证明：

$$x_1^2x_2+x_2^2x_3+\cdots+x_{n-1}^2x_n+x_n^2x_1\leq\frac{4}{27}$$

【题说】第一届(1992 年)中国台北数学奥林匹克题 3.

【证】当 n=3 时，由于不等式关于 x_1，x_2，x_3 轮换对称，不妨设 $x_1\geq x_2$，$x_1\geq x_3$.

若 $x_2<x_3$，由

$$x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_1-(x_1^2x_3+x_3^2x_2+x_2^2x_1)$$

$$=(x_1-x_3)(x_1-x_2)(x_2-x_3)\leq0$$

知

$$x_1^2x_3+x_3^2x_2+x_2^2x_1\geq x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_1$$

所以，只需就 $x_2\geq x_3$ 的情况证明．设 $x_1\geq x_2\geq x_3$．

则

$$\begin{aligned}x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_1&\leq x_1^2x_2+x_1x_2x_3+x_1x_2x_3\\&\leq(x_1+x_3)^2x_2\\&=4\cdot\frac{1}{2}(x_1+x_3)\cdot\frac{1}{2}(x_1+x_3)x_2\\&\leq4\cdot\left[\frac{\frac{1}{2}(x_1+x_3)+\frac{1}{2}(x_1+x_3)+x_2}{3}\right]^3\\&=\frac{4}{27}\end{aligned}$$

设 n=k(k≥3)时命题成立．当 n=k+1 时，设 $x_1\geq x_i$(i=2，3，…，k+1)，则

$$\begin{aligned}&x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_4+\cdots+x_k^2x_{k+1}+x_{k+1}^2x_1\\\leq&x_1^2x_2+x_1^2x_3+(x_2+x_3)^2x_4+\cdots+x_{k+1}^2x_1\\=&x_1^2(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2x_4+\cdots+x_{k+1}^2x_1\end{aligned}$$

故命题对任意 n≥3 均成立

B1-081　对任何自然数 n，求证：

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot2^k\cdot C_{n-k}^{[(n-k)/2]}=C_{2n+1}^n$$

其中$C_0^0=1$，$[(n-k)/2]$表示$(n-k)/2$的整数部分．

【题说】1994 年中国数学奥林匹克(第九届数学冬令营)题 5．

【证】下证更一般的结果，对任意 r(0≤r≤n)，成立恒等式：

$$\sum_{k=0}^{r}C_n^k2^kC_{n-k}^{[(r-k)/2]}=C_{2n+1}^r$$

右边，为从 2n+1 个元素 a_1，a_2，…，a_{2n+1} 中取 r 个的组合数．

将 2n+1 个元素分为 n+1 个子集：

$$\{a_1，a_2\}，\{a_3，a_4\}，…，\{a_{2n-1}，a_n\}\{a_{2n+1}\}$$

从 2n+1 个元素中取 r 个的组合，可以这样来取：先从 n 个二元集中选出k个，再从每个集中取一个元素，共k个元素，取法有$C_n^k\cdot2^k$种．

在剩下的$n-k$个元素中取$\left[\frac{r-k}{2}\right]$个，每个提供两个元素．若$r-k$是偶数，则$a_{2n+1}$不取．若$r-k$是奇数，则取$a_{2n+1}$．这样另$r-k$个元素的取法有$C_n^{\left[\frac{r-k}{2}\right]}$种．

故得恒等式

$$\sum_{k=0}^{r}C_n^k2^kC_{n-k}^{[(r-k)/2]}=C_{2n+1}^n$$

B1-082 证明：如果$(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1$，那么$x+y=0$．

【题说】第二十届(1994 年)全俄数学奥林匹克九年级(决赛)题 1.

【证】$x+\sqrt{x^2+1}=\dfrac{1}{y+\sqrt{y^2+1}}=\sqrt{y^2+1}-y$

所以

$$x+y=\sqrt{y^2+1}-\sqrt{x^2+1} \tag{1}$$

由 x、y 的对称性，同样有

$$x+y=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1} \tag{2}$$

(1)+(2)即得 x+y=0.

B1-083 证明恒等式

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=(n-1)f\left(\frac{1}{n}\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k}{n^2}$$

【题说】第二十届(1994 年)全俄数学奥林匹克九年级(决赛)题 5.

【证】$\dfrac{a_1}{a_2(a_1+a_2)}+\dfrac{a_2}{a_3(a_2+a_3)}+\cdots+\dfrac{a_n}{a_1(a_n+a_1)}$

$$=\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1+a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_2+a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n+a_1}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1+a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_2+a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_n+a_1}\right)$$

$$=\frac{a_2}{a_1(a_1+a_2)}+\frac{a_3}{a_2(a_2+a_3)}+\cdots+\frac{a_1}{a_n(a_n+a_1)}$$

B1-084 k 与 n 为整数，$1\le k\le n$，a_1，a_2，…，a_k 满足

$$\begin{cases}a_1+a_2+\cdots+a_k=n\\ a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2=n\\ \cdots\\ a_1^k+a_2^k+\cdots+a_k^k=n\end{cases}$$

证明：

$$\prod_{i=1}^{k}(x+a_i)=\sum_{i=0}^{k}C_n^i x^{k-i}$$

【题说】1995 年日本数学奥林匹克题 5.

【证】记$P_j=\sum_{i=1}^{k}a_i^j\sigma_j=\sum_{i\le i_1<i_2<\cdots<i_j\le k}a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_j}$

由牛顿公式

$$p_m-p_{m-1}\sigma_1+p_{m-2}\sigma_2-\cdots+(-1)^{m-1}+p_1\sigma_{m-1}+(-1)^m m\sigma_m=0$$

其中 $1\le m\le k$，由于 $p_j=n(1\le j\le k)$，所以令 m=j，j+1$(1\le j\le k-1)$得

$$n(1-\sigma_1+\sigma_2-\cdots+(-1)^{j-1}\sigma_{j-1})+(-1)^j j\sigma_j=0$$

$$n(1-\sigma_1+\sigma_2-\cdots+(-1)^j\sigma_j+(-1)^{j+1}(j+1)\sigma_{j+1}=0$$

两式相减得

$$j\sigma_j - n\sigma_j + (j+1)\sigma_{j+1} = 0$$

即$(j+1)\sigma_{j+1} = (n-j)\sigma_j$**．因**$\sigma_1 = p_1 = n$**，不难推得**$\sigma_j = C_n^j (j = 1, 2, \cdots, k)$**．从而结论成立．**

B2　方　　程

B2-001　如果方程 $x^2+ax+b=0$ 与 $x^2+px+q=0$ 有一个公根，求以它们的相异根为根的二次方程．

【题说】1957 年上海市赛高二复赛题 2．

【解】设公根为α，则

$$\alpha^2+a\alpha+b=0$$
$$\alpha^2+p\alpha+q=0$$

相减，得

$$(a-p)\alpha=q-b$$

所以

$$\alpha=\frac{q-b}{a-p}$$

由韦达定理，另外两个相异的根为

$$\frac{b(a-p)}{q-b}\text{与}\frac{q(a-p)}{q-b}$$

故所求方程为

$$x^2-\frac{(b+q)(a-p)}{q-b}x+\frac{bq(a-p)^2}{(q-b)^2}=0$$

【注】利用两根之和等于一次项系数的相反数求出的方程为

$$x^2+\left[a+p+\frac{2(q-b)}{a-p}\right]x+\left[ap+\frac{(a+p)(q-b)}{a-p}+\frac{(q-b)^2}{a-p}\right]=0$$

此方程与上面求出的方程仅是外形不同，事实上，a，b，p，q 有关系．

$$(b-q)^2=(aq-bp)(p-a)$$

B2-002　方程 $x^n=1(x\geq 2)$ 的 n 个根是 1，x_1，x_2，…，x_{n-1}．证明：$(1-x_1^2)(1-x_2^2)(1-{}_3^2)\cdots(1-x_{n-1}^2)$，当n为偶数时为0，n为奇数时为n．

【题说】1957 年武汉市赛决赛题 2．将原方程变形为 $(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)=0$．

【证】$x^n-1=(x-1)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$．因此，

$$(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})=x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1$$

令 $x=\pm 1$ 得

$$(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_{n-1})=n$$

$$(-1-x_1)(-1-x_2)\cdots(-1-x_{n-1})=\begin{cases}1\text{，若}n\text{为奇数}\\0\text{，若}n\text{为偶数}\end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}&(1-x_1^2)(1-x_2^2)\cdots(1-x_n^2)\\&=(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n)(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\\&=\begin{cases}n\text{，若}n\text{为奇数}\\0\text{，若}n\text{为偶数}\end{cases}\end{aligned}$$

B2-003　证明：如果整系数二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有有理根，那么 a、b、c 中至少有一个是偶数．

【题说】1958年～1959年波兰数学奥林匹克三试题2．

【证】设有有理根$\frac{p}{q}$，p、q为互质整数，代入原方程得

$$a\left(\frac{p}{q}\right)^2+b\cdot\frac{p}{q}+c=0$$

从而

$$ap^2+bpq+cq^2=0$$

若p、q均为奇数，则

$$0=ap^2+bpq+cq^2\equiv a+b+c(\mathrm{mod}2)$$

因此a、b、c中至少有一个偶数．

若p、q中有一个偶数，则另一个为奇数．不妨设p为奇数，q为偶数，则

$$0=ap^2+bpq+cq^2\equiv a(\mathrm{mod}2)$$

即a为偶数．

B2-004　证明：方程$x^5+x=10$有一正根为无理数．

【题说】1963年合肥市赛高三二试题 4．

【证】当x=0时，$x^5+x<10$．当x=10时，$x^5+x>10$，因此$x^5+x=10$必有正根(在(0，10)内)．

熟知$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0(a_i\in Z，a_n\neq 0)$的有理根$\frac{p}{q}$(p、q∈Z并且p、q 互质)满足条件$p\mid a_0$，$q\mid a_n$．因此$x^5+x-10=0$的有理根只可能是±10，±5，±2，±1．不难验证它们都不是方程的根．所以方程的正根都是无理数．

B2-005　设$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$是整系数多项式，如果P(0)与P(1)都是奇数，证明P(x)没有整数根．

【题说】第三届(1971 年)加拿大数学奥林匹克题 5．第七届(1941年)莫斯科数学奥林匹克九、十年级题8．

【证】对于整数m，若它是偶数，则P(m)与P(0)奇偶性相同；若它是奇数，P(m)与P(1)奇偶性相同，故 P(m)总是奇数，不为0．因此，P(x)没有整数根．

B2-006　二次三项式$f(x)=ax^2+bx+c$，如果方程f(x)=x无实根．证明：方程f(f(x))=x亦无实根．

【题说】第七届(1973年)全苏数学奥林匹克十年级题1．

【证】如果方程f(x)=x无实根，则对所有x的值，有

$$f(x)>x(若a>0)$$

或

$$f(x)<x(或a<0)$$

从而

$$f(f(x))>f(x)>x$$

或

$$f(f(x))<f(x)<x$$

所以f(f(x))=x，无实根．

【注】结论对所有连续函数f(x)均成立．

B2-007　设 a 和 b 为实数，且使方程

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$$

至少有一个实根，对所有这种数对(a，b)，求出 a^2+b^2 的最小可能值．

【题说】第十五届(1973 年)国际数学奥林匹克题 3．本题由瑞典提供．

【解】设实数 x 使

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$$

则

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+a\left(x+\frac{1}{x}\right)+(b-2)=0$$

从而方程

$$y^2+ay+(b-2)=0$$

有一实根，绝对值为 $\left|x+\frac{1}{x}\right|\geq 2$．所以 $a^2-4(b-2)\geq 0$．并且

$$\frac{|a|+\sqrt{a^2-4(b-2)}}{2}\geq 2$$

此式即

$$\sqrt{a^2-4(b-2)}\geq 4-|a|$$

平方整理得

$$2|a|\geq 2+b$$

从而

$$a^2+b^2\geq\frac{5}{4}\left(b+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{4}{5}$$

由此可知当 $b=-\frac{2}{5}$，$a=\pm\frac{4}{5}$ 时，a^2+b^2 取得最小值 $\frac{4}{5}$(此时 $x=\pm 2$ 是方程 $x^4+ax^3+bx^2+ax+1$ 的实根)．

B2-008　若 $P_1(x)=x^2-2$，$P_i(x)=P_1[P_{i-1}(x)]$，i=2，3，4，…．证明：对任何自然数 n，方程 $P_n(x)=x$ 的根都是不同的实根．

【题说】第十八届(1976 年)国际数学奥林匹克题 2．本题由芬兰提供．

【证】当｜x｜≥2 时，$P_1(x)\geq 2$，从而 $P_n(x)\geq 2$，故 $P_n(x)$ 的所有实根都在(-2，2)中．设 x=2cost，则

$$P_1x(t)=4\cos^2t-2=2\cos^2t$$

从而

$$P_nx(t)=2\cos 2^nt$$

取 $t=\frac{2k\pi}{2^n-1}(k=0，1，\cdots，2^{n-1}-1)$ 及 $\frac{2k\pi}{2^n+1}(k=1，2，\cdots，2^{n-1})$

即当 $2^nt=\pm t+2k\pi$，k=0，1，…时，得 $P_n(x)=x$ 的 2^n 个不同的实根，因为 $P_n(x)$ 次数是 2^n，所以它的所有根都是实根．

B2-009　已知方程 $2x^2-9x+8=0$，求作一个二次方程，使它的一个根为原方程两根和的倒数，另一根为原方程两根差的平方．

【题说】1978 年全国联赛一试题 4．

【解】设已知方程的两个根为 x_1、x_2，所求方程为 $x^2+px+q=0$，它的两个根为x_1'、x_2'，则$x_1+x_2=\frac{9}{2}$，$x_1x_2=4$.

$$x_1'=1/(x_1+x_2)=\frac{2}{9}$$

$$x_2'=(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)-4x_1x_2=\frac{17}{4}$$

所以
$$p=-(x_1'+x_2')=-\frac{161}{36}$$

$$q=x_1'x_2'=\frac{34}{36}$$

故所求方程为 $36x^2-161x+34=0$.

B2-010　设 a、b、c、d 是互不相同的四个整数，r 是方程

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)-9=0$$

的整数根，求证$r=\frac{1}{4}(a+b+c+d)$.

【题说】1979 年河南省赛一试题 7.

【证】由题意

$$(r-a),(r-b),(r-c),(r-d)$$

是互不相同的四个整数，且

$$(r-a)(r-b)(r-c)(r-d)=9$$

由整数的唯一分解定理知 r-a，r-b，r-c，r-d 只能分别是-1，1，-3，3. 所以

$$(r-a)+(r-b)+(r-c)+(r-d)=0$$

即

$$r=\frac{1}{4}(a+b+c+d)$$

B2-011　设 a、b、c 是方程 $x^3-x^2-x-1=0$ 的根.

1．证明：a、b、c 彼此不等；

2．证明：下式表示一个整数

$$\frac{b^{1982}-c^{1982}}{b-c}+\frac{c^{1982}-a^{1982}}{c-a}+\frac{a^{1982}-b^{1982}}{a-b}.$$

【题说】第十四届(1982 年)加拿大数学奥林匹克题 2．第 2 小题中，1982 换成任意自然数 n 均成立.

【证】1．由韦达定理，有

$$a+b+c=1,\ bc+ca+ab=-1,\ abc=1$$

如果 a、b、c 中有两数相等，不妨设 b=c．则有

$$a+2b=1,\ b^2+2ab=-1,\ ab^2=1$$

由前二式解得 a=-1，b=1，a=5/3，b=-1/3．但它们不满足第三式．因此，a、b、c 彼此不等.

2．令$A_n=\frac{b^n-c^n}{b-c}+\frac{c^n-a^n}{c-a}+\frac{a^n-b^n}{a-b}$，则$A_0=0$，$A_1=3$，$A_2=2$ (a+b+c)=2 都是整数，设在 $n\le k$ 时 A_n 均为整数($k\ge 2$)，则由于 $b^{k+1}=b^k+b^{k-1}+b^{k-2}$ 等，所以 $b^{k+1}-c^{k+1}=(b^k-c^k)+(b^{k-1}-c^{k-1})+(b^{k-2}-c^{k-2})$．从

而 $A_{k+1}=A_k+A_{k-1}+A_{k-2}$ 也是整数，因此一切 A_n 为整数．特别地，A_{1982} 为整数．

B2-012　已知 x_1、x_2 是方程

$$x^2+(k-2)x+(k^2+3k+5)=0 \ (k\text{为实数})$$

的两个实数根．求 $x_1^2+x_2^2$ 的最大值．

【题说】1982 年全国联赛题 1(6)．原题为选择题．

【解】由于 x_1、x_2 是实数根，所以

$$\triangle=(k-2)^2-4(k^2+3k+5)\geq 0$$

解得

$$-4\leq k\leq -\frac{4}{3}$$

另一方面，$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(k-2)^2-2(k^2+3k+5)=-(k+5)^2+19$．注意到 k 的取值范围，$x_1^2+x_2^2$ 的最大值为 18．

B2-013　已知方程 $(x-19)(x-83)=p$，有实根 r_1 和 r_2(其中 p 为实数)，求方程

$$(x-r_1)(x-r_2)=-p$$

的最小实根．

【题说】1984 年北京市赛高一题 1(4)．原题为选择题．

【解】由题意得：

$$(x-19)(x-83)-p=(x-r_1)(x-r_2)$$

可见 19 与 83 是方程 $(x-r_1)(x-r_2)=-p$ 仅有的两个实根，最小实根为 19．

B2-014　四次方程

$$x^4-18x^3+kx^2+200x-1984=0$$

的四个根中的两个根的乘积为-32，试决定 k 的值．

【题说】第十三届(1984 年)美国数学奥林匹克题 1．

【解】设方程四根为 x_1、x_2、x_3、x_4，且 $x_1x_2=-32$．由根与系数关系，有

$$x_1+x_2+x_3+x_4=18 \qquad (1)$$

$$x_1x_2+x_3x_4+(x_1+x_2)(x_3+x_4)=k \qquad (2)$$

$$x_1x_2(x_3+x_4)+x_3x_4(x_1+x_2)=-200 \qquad (3)$$

$$x_1x_2x_3x_4=-1984 \qquad (4)$$

由(4)得

$$x_3x_4=-1984/(-32)=62$$

代入(3)得

$$31(x_1+x_2)-16(x_3+x_4)=-100 \qquad (5)$$

由(1)、(5)解得

$$x_1+x_2=4，x_3+x_4=14$$

代入(2)得

$$k=-32+62+4\times 14=86$$

B2-015　方程

$$x^2+ax+b+1=0$$

的根是正整数．证明：a^2+b^2 是合数．

【题说】第二十届(1986 年)全苏数学奥林匹克八年级题 1．

【证】设 x_1、x_2 是原方程的两根，则

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2=-a \\ x_1x_2=b+1 \end{array}\right\} \tag{1}$$

由(1)式得

$$a^2+b^2=(x_1^2+1)(x_2^2+1)$$

因为 x_1、x_2 都是正整数，所以 a^2+b^2 是合数．

B2-016　a_1，a_2，…，a_{2n} 是 2n 个互不相等的整数．如果方程

$$(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{2n})+(-1)^{n-1}(n!)^2=0$$

有一个整数解 r，求证

$$r=\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2n}}{2n}$$

【题说】第二届(1987)东北三省数学邀请赛题 6．

【解】由题设可知

$$(r-a_1)(r-a_2)\cdots(r-a_{2n})=(-1)^n(n!)^2$$

2n 个整数 $r-a_1$，$r-a_2$，…，$r-a_{2n}$ 两两不等．

2n 个不同的整数 $r-a_1$，$r-a_2$，…，$r-a_{2n}$ 的积为$(-1)^n(n!)^2$，所以它们必为-n，-(n-1)，…，-1，1，2，…，n 的一个排列，从而

$$(r-a_1)+(r-a_2)+\cdots+(r-a_{2n})$$

$$=-n-(n-1)-\cdots-1+1+2+\cdots+n=0$$

所以
$$r=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2n}}{2n}$$

B2-017　证明：对每一整数 n＞1，方程

$$\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots+\frac{x^2}{2!}+\frac{x}{1!}+1=0$$

无有理根．

【题说】第三十届(1989 年)IMO 预选题 4．本题由保加利亚提供．

【证】首先证明对每一个整数 k＞0 及每个素数 p，$p^k \nmid k!$，

事实上，设 s≥0 为整数，满足 $p^s\le k\le p^{s+1}$，则满足 $p^r \mid k!$ 的最大整数为

$$r=\left[\frac{k}{p}\right]+\left[\frac{k}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{k}{p^s}\right]$$

$$\le\frac{k}{p}+\frac{k}{p^2}+\cdots+\frac{k}{p^s}=k\cdot\frac{1-\frac{1}{p^s}}{p-1}<k$$

所以

$$p^k \mid k!$$

若方程有有理根为α，则

$$\alpha^n + n\alpha^{n-1} + \cdots + \frac{n!}{k!}\alpha^k + \cdots + \frac{n!}{2!}\alpha^2 + \frac{n!}{1!}\alpha + n! = 0$$

由此，不难知，α必为整数(否则令$\alpha = \frac{c}{d}$，c、d为互质的整数，则$c^n + nc^{n-1}d + \cdots + \frac{n!}{1!}cd^{n-1} + n!d^n = 0$，从而d｜c，d必须为1)．

设p为n的素因数，则由上面的方程，$p \mid \alpha^n$，从而$p \mid \alpha$．设r为满足$p^r \mid n!$的最大整数，由于$p^k \mid \alpha^k$，$p^k \mid k!$，所以$p^{r+1} \mid \frac{n!}{k!} \cdot \alpha^k$，k = 1，2，…，n，从而得$p^{r+1} \mid n!$，矛盾．

B2-018　求方程 $x^{199}+10x-5=0$ 所有 199 个解的 199 次方的和．

【题说】1991 年日本数学奥林匹克预选赛题 2．

【解】设方程的解为 a_1，a_2，…，a_{199}，则由韦达定理知 $a_1+a_2+\cdots+a_{199}=0$，

所以

$$\sum_{i=1}^{199} a_i^{199} = \sum_{i=1}^{199}(-10a_i + 5)$$
$$= 5 \times 199 = 995$$

B2-019　求使方程 $x^2-pqx+p+q=0$ 有整数根的所有自然数 p 和 q．

【题说】第十七届(1991 年)全俄数学奥林匹克十年级题 1，

【解】设自然数 p、q，使得原方程有两根 x_1、$x_2 \in Z$，则

$$x_1x_2=p+q>0，x_1+x_2=pq>0$$

因此，这两根均为正数，且

$$(x_1-1)(x_2-1)+(p-1)(q-1)=2$$

2 表为两个非负整数之和，只有三种情况：

(1) 0+2；(2) 1+1；(3) 2+0．

由(1)得 p=3，q=2 或 p=2，q=3；由(2)得 p=q=2；由(3)得 p=1，q=5，或 p=5，q=1．

B2-020　对多少个实数 a，x 的二次方程

$$x^2+ax+6a=0$$

只有整数根？

【题说】第九届(1991 年)美国数学邀请赛题 8．

【解】设 m、n 是方程二整数根(m≤n)．则应有

$$a=-(m+n)，6a=mn$$

因此，a 也是整数，且

$$-6(m+n)=mn$$

即

$$(m+6)(n+6)=36$$

由于

$$36=2^2\cdot 3^2$$

所以(m，n)有10组解：(-42，-7)，(-24，-8)，(-18，-9)，(-15，-10)，(-12，-12)，(-5，30)，(-4，12)，(-3，6)，(-2，3)，(0，0)对应的 $a=-(m+n)$ 也有10个值：

49，32，27，25，24，-25，-8，-3，-1，0

B2-021　p为整数，试证 $x^2-2x-(10p^2+10p+2)=0$ 无整数解．

【题说】第三届(1993年)澳门数学奥林匹克第二轮题1．

【证】将原方程变形为

$$x(x-2)=2[5p(p+1)+1] \tag{1}$$

因为 $p(p+1)$ 是偶数，所以(1)式右边

$$2(5p(p+1)+1)\equiv 2 \pmod 4$$

如果x是整数，那么x必为偶数，(1)式左边

$$x(x-2)\equiv 0 \pmod 4$$

矛盾．

所以原方程无整数解．

B2-022　设 $f(x)=x^n+5x^{n-1}+3$，其中n是一个大于1的整数．求证：f(x)不能表示为两个多项式的乘积，其中每一个多项式都具有整数系数而且它们的次数都不低于一次．

【题说】第三十四届(1993年)国际数学奥林匹克题1．

【解】f(x)的有理根只可能是±1，±3．不难验证 $f(1)=8$，$f(-1)=4(-1)^{n-1}+3$，$f(3)=3^n+5\cdot 3^{n-1}+3$，$f(-3)=2(-3)^{n-1}+3$ 均不为0，所以f(x)没有一次因式．

若

$$f(x)=g(x)h(x) \tag{*}$$

其中

$$g(x)=x^p+a_{p-1}x^{p-1}+\cdots+a_1x+a_0$$
$$h(x)=x^q+b_{q-1}x^{q-1}+\cdots+b_1x+b_0$$

$p，q，a_0，a_1，\cdots，a_{p-1}，b_0，b_1，\cdots，b_{q-1}$ 都是整数并且 $p+q=n$，$p\geq 2$，$q\geq 2$，

则比较(*)式两边常数项得 $a_0b_0=3$．

不妨设 $a_0=\pm 3$，$b_0=\pm 1$．设 a_1，…，a_p 中第一个不被3整除的为 a_k，则 $k\leq p=n-q<n-1$．

比较(*)两边 x^k 的系数得

$$0=a_kb_0+a_{k-1}b_1+\cdots+a_0b_k$$

左边被3整除，右边仅 a_kb_0 不被3整除，从而右边不被3整除，矛盾．

所以f(x)不能分解为两个整系数多项式的乘积．

B2-023　x的二次方程

$$x^2+z_1x+z_2+m=0 \tag{1}$$

中，z_1、z_2、m均是复数，且

$$z_1^2 - 4z_2 = 16 + 20i \qquad (2)$$

设方程(1)二根为α，β，且$|\alpha-\beta| = 2\sqrt{7}$．求|m|的最大值和最小值．

【题说】1994 年全国联赛二试题 1．

【解】由韦达定理有

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-z_1\\ \alpha\beta=z_2+m\end{cases}$$

因为$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$$= z_1^2 - 4z_2 - 4m = 16 + 20i - 4m = 4(4 + 5i - m)$$

所以

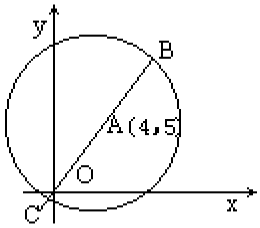
$$|m-(4+5i)|=7$$

这表明复数 m 在以 A(4，5)为圆心、以 7 为半径的圆周上．

又因 $|OA| = \sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41} < 7$

故原点在⊙A 内．

延长 OA，交圆周于 B、C 两点，则



$|OB| = |OA| + |AB| = \sqrt{41}+7$为$|m|$最大值；

$|OC| = |CA| - |AO| = 7-\sqrt{41}$为$|m|$最小值．

B2-024 已知方程 $ax^5+bx^4+c=0$ 有 3 个不同的实数根．证明：方程 $cx^5+bx+a=0$ 也有 3 个不同的实数根．

【题说】第二十届(1994 年)全俄数学奥林匹克九年级题 5．

【证】显然 x=0 不是方程 $ax^5+bx^4+c=0$ 的根，否则 c=0，方程只有两个不同的实数根，这与题设矛盾．

设x_1、x_2、x_3是方程$ax^5+bx^4+c=0$的3个不同的实数根，则$\frac{1}{x_1}$、$\frac{1}{x_2}$、$\frac{1}{x_3}$是方程$cx^5+bx+a=0$的不同的实数根．

B2-025 方程 $x^2+ax+b=0$ 有两个不同的实数根．证明：方程 $x^4+ax^3+(b-2)x^2-ax+1=0$ 有 4 个不同的实数根．

【题说】第二十届(1994 年)全俄数学奥林匹克十年级题 2．

【证】$x^4+ax^3+(b-2)x^2-ax+1=(x^2-x_1x-1)(x^2-x_2x-1)$

其中 x_1、x_2 分别是方程 $x^2+ax+b=0$ 的两个不同的实数根．

现在只须证明：方程

$$x^2-x_1x-1=0 \qquad (1)$$

及

$$x^2-x_2x-1=0$$

(2)

的实数根各不相同．由判别式

$$\triangle_1 = x_1^2 + 4 > 0$$

$$\triangle_2 = x_2^2 + 4 > 0$$

知它们分别有两个不同的实数根．

若方程(1)、(2)有公共根α，则另一根同为$-\frac{1}{\alpha}$．从而$x_1 = \alpha - \frac{1}{\alpha} = x_2$，与$x_1 \neq x_2$矛盾．所以方程(1)、(2)没有公共根．从而本题结论成立．

B2-026　求一切实数 p，使得三次方程

$$5x^3-5(p+1)x^2+(71p-1)x+1=66p \tag{1}$$

的三个根均为正整数．

【题说】1995 年全国联赛二试题 2．

【解】由观察知，x=1 是(1)的一个正整数根．所以$5x^3-5(p+1)x^2+(71p-1)x+1-66p=(x-1)Q(x)$，其中$Q(x)=5x^2-5px+66p-1$．

设正整数 u、v 是 Q(x)=0 的两个根，则

$$\begin{cases} u+v=p & (2) \\ uv=\frac{1}{5}(66p-1) & (3) \end{cases}$$

所以 p 是正整数，将(2)代入(3)，得

$$5uv=66(u+v)-1 \tag{4}$$

从而

$$5u = 66 + \frac{19 \times 229}{5v - 66}$$

因左边是 5 的倍数，19、229 又都是素数，故

$$5v-66=19 \text{ 或 } 229$$

由此求得 v=17 或 59，u=59 或 17，p=u+v=76，即当且仅当 p=76 时，方程(1)三根均是正整数：1，17，59．

B2-027　已知 f(x)、g(x)和 h(x)都是二次三项式，方程 f(g(h(x)))=0 有根为 1，2，3，4，5，6，7 和 8，这可能吗？

【题说】第二十一届(1995 年)全俄数学奥林匹克九年级题 3．

【解】设 1，2，3，4，5，6，7 和 8 是方程 f(g(h(x)))=0 的根．

如果直线 x=a 是抛物线 y=h(x)的对称轴，那么当且仅当$x_1+x_2=2a$时，$h(x_1)=h(x_2)$．

多项式 f(g(x))的根不多于 4 个，而 h(1)，h(2)，…，h(8)都是它的根，因此只能是 a=4.5，且 h(4)=h(5)，h(3)=h(6)，h(2)=h(7)，h(1)=h(8)．此外，由图像可知 h(1)，h(2)，h(3)，h(4)是单调数列．

同样地，考察二次三项式 f(x)及它的根 g(h(1))，g(h(2))，g(h(3))，g(h(4))．我们得到 h(1)+h(4)=2b，h(2)+h(3)=2b，其中直线 x=b 是方程 y=g(x)的抛物线的对称轴．

对于二次三项式$h(x)=Ax^2+Bx+c$，由 h(1)+h(4)=h(2)+h(3)，得 4A=0，即 A=0，这与 h(x)是二次三项式相矛盾，所以方程 f(g(h(x)))=0 不可能

有根1，2，3，4，5，6，7，8．

B2-028　若α、β、γ是$x^3-x-1=0$的根，计算

$$S=\frac{1+\alpha}{1-\alpha}+\frac{1+\beta}{1-\beta}+\frac{1+\gamma}{1-\gamma}$$

的值．

【题说】第二十八届(1996年)加拿大数学奥林匹克题1．

【解】设$f(x)=x^3-x-1=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

由多项式根与系数关系，有

$$\alpha+\beta+\gamma=0$$
$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1$$
$$\alpha\beta\gamma=1$$

从而

$$S=\frac{1+\alpha}{1-\alpha}+\frac{1+\beta}{1-\beta}+\frac{1+\gamma}{1-\gamma}=\frac{A}{B}$$

其中分子　$A=(1+\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)+(1+\beta)(1-\alpha)(1-\gamma)+(1+\gamma)(1-\alpha)(1-\beta)$

$$=3-(\alpha+\beta+\gamma)-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma=7$$

分母

$$B=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=f(1)=-1$$

因此所求值为$S=-7$．

B2-029　设$p(x)$是实系数多项式函数$p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$．证明：如果对任何$|x|<1$，均有$|p(x)|\le 1$，则$|a|+|b|+|c|+|d|\le 7$．

【题说】第三十七届(1996年)IMO预选题

【证】由$p(x)$为连续函数且$|x|<1$时，$|p(x)|\le 1$，故$|x|\le 1$时，$p(x)\le 1$．

分别令$x=\lambda$和$\frac{\lambda}{2}$(这里$\lambda=\pm 1$)，得

$$|\lambda a+b+\lambda c+d|\le 1$$
$$\left|\frac{\lambda}{8}a+\frac{1}{4}b+\frac{\lambda}{2}c+d\right|\le 1$$

所以　$|\lambda a+b|$

$$=\left|\frac{4}{3}(\lambda a+b+\lambda c+d)-2\left(\frac{\lambda}{8}a+\frac{1}{4}b+\frac{\lambda}{2}c+d\right)\right.$$
$$\left.+\frac{2}{3}\left(-\frac{\lambda}{8}a+\frac{1}{4}b-\frac{\lambda}{2}c+d\right)\right|$$
$$\le\frac{4}{3}|\lambda a+b+\lambda c+d|+2\left|\frac{\lambda}{8}a+\frac{1}{4}b+\frac{\lambda}{2}c+d\right|$$
$$+\frac{2}{3}\left|-\frac{\lambda}{8}a+\frac{1}{4}b-\frac{\lambda}{2}c+d\right|$$
$$\le\frac{4}{3}+2+\frac{2}{3}=4$$

故

$$|a|+|b|=\max\{|a+b|, |-a+b|\}\le 4$$

同样地，$|\lambda c+d|$

$$=\left|-\frac{1}{3}(\lambda a+b+\lambda c+d)+2\left(\frac{\lambda}{8}a+\frac{1}{4}b+\frac{\lambda}{2}c+d\right)\right.$$

$$\left.-\frac{2}{3}\left(-\frac{\lambda}{8}a+\frac{1}{4}b-\frac{\lambda}{2}+d\right)\right|$$

$$\le\frac{1}{3}|\lambda a+b+\lambda c+d|+2\left|\frac{\lambda}{8}a+\frac{1}{4}b+\frac{\lambda}{2}c+d\right|$$

$$+\frac{2}{3}\left|-\frac{\lambda}{8}a+\frac{1}{4}b-\frac{\lambda}{2}c+d\right|$$

$$\le\frac{1}{3}+2+\frac{2}{3}=3$$

故$|c|+|d|=\max\{|c+d|, |-c+d|\}\le 3$.

因此，$|a|+|b|+|c|+|d|\le 7$.

B2-030　设 a 是 $x^3-x-1=0$ 的解，求以 a^2 为其解的整系数三次方程.

【题说】1996 年日本数学奥林匹克预选赛题 4.

【解】$a^3-a=1$，两边平方得

$$a^2(a^2-1)^2=1$$

所以 a^2 是 $x(x-1)^2=1$ 的根，展开得

$$x^3-2x^2+x-1=0$$

这就是所求的方程.

B2-031　假设 $x^3+3x^2+4x-11=0$ 的根是 a，b，c，$x^3+rx^2+sx+t=0$ 的根是 a
+b，b+c，c+a，求 t.

【题说】第十四届（1996 年）美国数学邀请赛题 5.

【解】由韦达定理，

$$r=-(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$=-(-3-c)(-3-a)(-3-b)$$

$$=-((-3)^3+3(-3)^2+4(-3)-11)=23$$

B2－032　设 P 是方程 $z^6+z^4+z^3+z^2+1=0$ 的有正虚部的那些根的乘积，并设 $P=r(\cos\theta°+i\sin\theta°)$，这里 $0<r$，$0\le 6<360$．求θ．

【题说】第十四届（1996 年）美国数学邀请赛题 11.

【解】原方程即

$$z^3+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^3}=0\qquad(1)$$

令$u=z+\frac{1}{z}$，由（1）得

$$u^3-2u+1=0$$

即

$$(u-1)(u^2+u-1)=0$$

从而

$$u_1=1=2\cos 60°，u_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=2\cos 72°$$

$$u_3=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}=2\cos 144°$$

$$z=\cos 60°\pm i\sin 60°，\cos 72°\pm i\sin 72°，\cos 144°\pm i\sin 144°$$

$$\theta=60+72+144=276$$

B2－033　解方程组

$$\begin{cases}x+y+z=a\\x^2+y^2+z^2=b^2\\xy=z^2\end{cases}$$

其中 a 和 b 是已知实数，当 a 和 b 满足什么条件时，方程组的解 x、y、z 是互不相同的正数？

【题说】第三届（1961 年）国际数学奥林匹克题 1．本题由匈牙利提供．

【解】$a^2-b^2=(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)$

$=2(xy+yz+zx)$

$=2(z^2+yz+zx)=2az$

若 a=0，则 b≠0 时方程组无解；b=0 时，由 $x^2+y^2+z^2=0$ 得 x=y=z=0．

若 $a\neq 0$，则 $z=\frac{1}{2a}(a^2-b^2)$，x、y为方程

$$u^2+(z-a)u+z^2=0$$

的两个根．所以 $x=\frac{1}{4a^2}\left(a^2+b^2\pm\sqrt{(3a^2-b^2)(3b^2-a^2)}\right)$

$$y=\frac{1}{4a^2}\left(a^2+b^2\mp\sqrt{(3a^2-b^2)(3b^2-a^2)}\right)$$

x、y、z为正数时，$x+y=a-z=\frac{1}{2a}(a^2+b^2)>0$，$z>0$，所以 $a>0$，$a>|b|$．再由 $(3a^2-b^2)(3b^2-a^2)>0$ 得 $\sqrt{3}|b|>a$．反之，在 $\sqrt{3}|b|>a>b$ 时，$z>0$，x、y为不同实数，xy、x＋y均正，所以x、y＞0．

因此，当且仅当 $\sqrt{3}|b|>a>|b|$ 时，解x、y、z为不同的正数．

B2－034　一时钟在某时间 T_1，短针指在 2 与 3 之间，长针指在 4 与 5 之间，过了某段时间之后，到时间 T_2，长针指在原来短针所指的位置，而短针指在原来长针所指的位置，求原来时间 T_1 和现在时间 T_2 各为几点钟．

【题说】1963 年上海市赛高三决赛题 2．

【解】设在时间 T_1，短针的度数为 x，长针的度数为 y．因短针走过1°为2分，长针走过1°为 $\frac{1}{6}$ 分，故所求时间为

$$T_1=2\text{时}\frac{y}{6}\text{分}，T_2=4\text{时}\frac{x}{6}\text{分}$$

且有

$$\begin{cases}2\ (x-60)\ =\dfrac{1}{6}y\\ 2\ (y-120)\ =\dfrac{1}{6}x\end{cases}$$

解得，

$$x=\frac{10080}{143}，y=\frac{18000}{143}$$

故

$$T_1=2\text{时}20\frac{140}{143}\text{分（约为}2\text{时}20\text{分}59\text{秒）}$$

$$T_2=4\text{时}11\frac{107}{143}\text{分（约为}4\text{时}11\text{分}45\text{秒）}$$

B2－035　求所有能使等式

$$x_5+x_2=yx_1 \qquad (1)$$

$$x_1+x_2=yx_2 \qquad (2)$$

$$x_2+x_4=yx_3 \qquad (3)$$

$$x_3+x_5=yx_4 \qquad (4)$$

$$x_4+x_1=yx_5 \qquad (5)$$

成立的值 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，这里的 y 是一个参数．

【题说】第五届（1963 年）国际数学奥林匹克题 4．本题由原苏联提供．

【解】将五个方程相加得

$$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)\ (y-2)\ =0$$

所以 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0$ 或 y=2．

如果 y=2，那么原方程组可写成

$$x_5-x_1=x_1-x_2=x_2-x_3=x_3-x_4=x_4-x_5$$

即 $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5$=任意数是原方程组的解．如果 y≠2，那么

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \qquad (6)$$

由（3）、（2）、（4）得

$$y^2x_3=y\ (x_2+x_4)\ =\ (x_1+x_3)\ +\ (x_3+x_5)$$

由上式及（3）、（6）得

$$(y^2+y-1)x_3=x_1+x_3+x_5+x_2+x_4=0$$

因此，在 $y^2+y-1=0$ 时，$x_3=0$．同理

$$x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=0$$

它显然是原方程组的解．

在 $y^2+y-1=0$（即 $y=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$）时，由（3）得

$$x_3=\frac{1}{y}\ (x_2+x_4)$$

$$\frac{a}{a+p}+\frac{c}{c+q}\le\frac{a}{a+pq}+\frac{c}{c+1}$$

不难验证任意 x_2、x_1 及由以上三式得出的 x_3、x_4、x_5 是原方程组的解．

B2－036　已知方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0\\ a_{21}x_1+a_{11}x_2+a_{23}x_3=0\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=0\end{cases}$$

其系数满足下列条件：

（1）a_{11}、a_{22}、a_{33} 都是正的；

（2）所有其余系数都是负的；

（3）每一方程中系数之和是正的．

证明：$x_1=x_2=x_3=0$ 是已知方程组的唯一解．

【题说】第七届（1965 年）国际数学奥林匹克题 2．本题由波兰提供．

【证】设 x_1、x_2、x_3 为一组解，不妨设 $|x_1|\geq|x_2|\geq|x_3|$，则 $|a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3|\geq|a_{11}x_1|-|a_{12}x_2|-|a_{13}x_3|\geq a_{11}|x_1|+a_{12}|x_1|+a_{13}|x_1|=(a_{11}+a_{12}+a_{13})|x_1|\geq0$，等号仅在 $x_1=x_2=x_3=0$ 时成立．

B2－037　解方程组

$$\begin{cases}|a_1-a_2|x_2+|a_1-a_3|x_3+|a_1-a_4|x_4=1\\ |a_2-a_1|x_1+|a_2-a_3|x_3+|a_2-a_4|x_4=1\\ |a_3-a_1|x_1+|a_3-a_2|x_2+|a_3-a_4|x_4=1\\ |a_4-a_1|x_1+|a_4-a_2|x_2+|a_4-a_3|x_3=1\end{cases}$$

其中 a_1、a_2、a_3、a_4 是已知的两两不等的实数．

【题说】第八届（1966 年）国际数学奥林匹克题 5．本题由捷克斯洛伐克提供．

【解】在方程组中，如果将足码 i 换 j，j 换成 i，原方程组不变．不失一般性，可以假定 $a_1>a_2>a_3>a_4$，这时原方程组成为

$$(a_1-a_2)x_2+(a_1-a_3)x_3+(a_1-a_4)x_4=1 \quad (1)$$

$$(a_1-a_2)x_1+(a_2-a_3)x_3+(a_2-a_4)x_4=1 \quad (2)$$

$$(a_1-a_3)x_1+(a_2-a_3)x_2+(a_3-a_4)x_4=1 \quad (3)$$

$$(a_1-a_4)x_1+(a_2-a_4)x_2+(a_3-a_4)x_3=1 \quad (4)$$

（1）－（2）、（2）－（3）、（3）－（4），分别得

$$(a_1-a_2)(x_2+x_3+x_4-x_1)=0$$

$$(a_2-a_3)(-x_1-x_2+x_3+x_4)=0$$

$$(a_3-a_4)(-x_1-x_2-x_3+x_4)=0$$

即有

$$x_2+x_3+x_4=x_1 \quad (5)$$

$$x_1+x_2=x_3+x_4 \quad (6)$$

$$x_1+x_2+x_3=x_4 \quad (7)$$

由（5）、（6）、（7）得

$$x_2=x_3=0,\ x_1=x_4$$

代入（1）、（4）得

$$x_1=x_4=\frac{1}{a_1-a_4}$$

经检验可知，当 $a_1>a_2>a_3>a_4$ 时，

$$x_2=x_3=0，x_1=x_4=\frac{1}{a_1-a_4}$$

是原方程组的解．

一般地，当 $a_i>a_j>a_k>a_l$ 时，方程组的解为：

$$x_j=x_k=0，x_i=x_l=\frac{1}{a_i-a_l}$$

B2－038　给出关于 x_1，x_2，…，x_n 的方程组

$$\begin{cases}ax_1^2+bx_1+c=x_2\\ax_2^2+bx_2+c=x_3\\\qquad\vdots\\ax_{n-1}^2+bx_{n-1}+c=x_n\\ax_n^2+bx_n+c=x_1\end{cases}$$

其中 a、b、c 为实数，$a\neq0$，且 $\Delta=(b-1)^2-4ac$．证明：在实数范围内该方程组

（i）当 $\Delta<0$ 时无解；

（ii）当 $\Delta=0$ 时恰有一个解；

（iii）当 $\Delta>0$ 时有多于一个解．

【题说】第十届（1968 年）国际数学奥林匹克题 3．本题由保加利亚提供．

【证】将 n 个方程相加得

$$\sum_{i=1}^{n}\left(ax_i^2+(b-1)x_i+c\right)=0$$

即

$$a\sum_{i=1}^{n}\left[\left(x_i+\frac{b-1}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=0$$

所以 $\Delta<0$ 时，无实数解．

$\Delta=0$ 时，只有一个解

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=-\frac{b-1}{2a}$$

$\Delta>0$ 时，显然有两组不同的解

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{-(b-1)+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{-(b-1)-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

B2－039　已知 p 个方程 q=2p 个未知数 x_1，x_2，…，x_q 的方程组：

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1q}x_q=0$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2q}x_q=0$$

……

$$a_{p1}x_1+a_{p2}x_2+\cdots+a_{pq}x_q=0$$

其中每一个系数 a_{ij} 是集｛－1，0，1｝中一元素，i=1，2，…，p；j=1，2，…q．证明：方程组有一个解（x_1，x_2，…，x_q）使得

（i）所有 x_j（j=1，2，…，q）是整数；

（ii）至少有一个 j 值使 $x_j\neq 0$（$1\leq j\leq q$）；

（iii）$|x_j|\leq q$（j=1，2，…，q）．

【题说】第十八届（1976 年）国际数学奥林匹克题 5．本题由荷兰提供．

【证】考虑适合条件 $|y_j|\leq p$（j=1，2，…，q）的所有整数组（y_1，y_2，…，y_q），共有 $(2p+1)^q$ 个．

令 $A_i=a_{i1}y_1+\cdots+a_{iq}y_q$，i=1，2，…，p．

由于 a_{ij} 是－1，0，1 中的一个，每个 A_i 都是整数，并且

$$|A_i|\leq|y_1|+\cdots+|y_q|\leq pq$$

因此，数组（A_1，A_2，…，A_p）至多有 $(2pq+1)^p=(4p+1)^p$ 个．

因为 $(2p+1)^q=(2p+1)^{2p}=(4p^2+4p+1)^p>(4p+1)^p$，由抽屉原理，一定有两个不同的数组（$y_1$，…，$y_q$），（$y'_1$，…，$y'_q$）产生同一个数组（$A_1$，$A_2$，…，$A_p$），所以

$a_{i1}(y_1-y'_1)+\cdots+a_{iq}(y_q-y'_q)=0$（i=1，2，…，p）令 $x_j=y_j-y'_j$，j=1，2，…，q．则 x_1，…，x_q 不全为零，满足方程组且有

$$|x_j|=|y_j-y'_j|\leq|y_j|+|y'_j|\leq 2p=q$$

这说明（x_1，…，x_q）即是所要找的一个解．

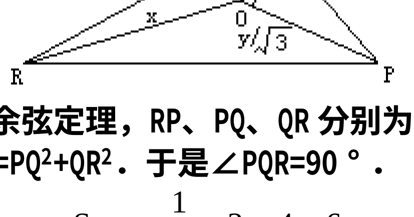
B2－040　正数 x、y、z 满足方程组

$$\begin{cases}x^2+xy+y^2/3=25\\ y^2/3+z^2=9\\ z^2+xz+x^2=16\end{cases}$$

试求 xy+2yz+3xz 的值．

【题说】第十八届（1984 年）全苏数学奥林匹克十年级题 4．

【解】考虑右图，其中∠ROP、∠POQ、∠QOR 分别为 150°，90°，120°；OR、OP、OQ分别为x，$\frac{y}{\sqrt{3}}$，z．



由已知方程组及余弦定理，RP、PQ、QR 分别为 25、9、16．

在△PQR 中，$PR^2=PQ^2+QR^2$．于是∠PQR=90°．

从而

$$S_{PQR}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4=6$$

又　$S_{PQR}=S_{POR}+S_{POQ}+S_{QOR}$

$$=\frac{1}{2}\cdot x\cdot \frac{y}{\sqrt{3}}\sin150° +\frac{1}{2}\cdot \frac{y}{\sqrt{3}}\cdot z+\frac{1}{2}\cdot x\cdot z\cdot \sin120°$$

$$=xy/4\sqrt{3}+yz/2\sqrt{3}+\sqrt{3}xz/4$$

$$=(xy+2yz+3xz)/4\sqrt{3}$$

所以　$xy+2yz+3xz=6\cdot 4\sqrt{3}=24\sqrt{3}$

B2－041　若

$$\frac{x^2}{2^2-1^2}+\frac{y^2}{2^2-3^2}+\frac{z^2}{2^2-5^2}+\frac{w^2}{2^2-7^2}=1$$

$$\frac{x^2}{4^2-1^2}+\frac{y^2}{4^2-3^2}+\frac{z^2}{4^2-5^2}+\frac{w^2}{4^2-7^2}=1$$

$$\frac{x^2}{6^2-1^2}+\frac{y^2}{6^2-3^2}+\frac{z^2}{6^2-5^2}+\frac{w^2}{6^2-7^2}=1$$

$$\frac{x^2}{8^2-1^2}+\frac{y^2}{8^2-3^2}+\frac{z^2}{8^2-5^2}+\frac{w^2}{8^2-7^2}=1$$

确定 $x^2+y^2+z^2+w^2$ 的值．

【题说】第二届（1984 年）美国数学邀请赛题 15．考虑 t 的方程

$$\frac{x^2}{t-1}+\frac{y^2}{t-9}+\frac{z^2}{t-25}+\frac{w^2}{t-49}=1 \qquad (1)$$

【解】（1）两边乘（t－1）（t－9）（t－25）（t－49），得 $x^2(t-9)(t-25)(t-49)+y^2(t-1)(t-25)(t-49)+z^2(t-1)(t-9)(t-49)+w^2(t-1)(t-9)(t-25)-(t-1)(t-9)(t-25)(t-49)=0$　(2)

它是 t 的四次方程，并有四个根 t=4，16，36，64．故（2）即方程

$$(t-4)(t-16)(t-36)(t-64)=0 \qquad (3)$$

比较（2）与（3）的系数得：

$$x^2+y^2+z^2+w^2+(1+9+25+49)$$
$$=4+16+36+64$$

从而　$x^2+y^2+z^2+w^2=36$

B2－042　求方程组的所有实数解：

$$x_1\cdot x_2\cdot x_3=x_1+x_2+x_3 \qquad (1)$$
$$x_2\cdot x_3\cdot x_4=x_2+x_3+x_4 \qquad (2)$$
$$x_3\cdot x_4\cdot x_5=x_3+x_4+x_5$$
……
$$x_{1985}\cdot x_{1986}\cdot x_{1987}=x_{1985}+x_{1986}+x_{1987}$$
$$x_{1986}\cdot x_{1987}\cdot x_{1988}=x_{1986}+x_{1987}+x_{1988}$$
$$x_{1987}\cdot x_{1988}\cdot x_{1989}=x_{1987}+x_1+x_2$$

【题说】第十三届（1987 年第三阶段）全俄数学奥林匹克九年级题 2．

【解】（1）－（2）得

$$x_2\cdot x_3(x_1-x_4)=x_1-x_4$$

于是

$$x_2 \cdot x_3=1 \text{ 或 } x_1=x_4$$

当 $x_2 \cdot x_3=1$ 时，（1）式成为 $x_2+x_3=0$，易知方程组

$$x_2 \cdot x_3=1，x_2+x_3=0$$

无实数解．所以 $x_1=x_4$．

同理，$x_2=x_5$；$x_3=x_6$；$x_{1985}=x_1$；$x_{1986}=x_2$；$x_{1987}=x_3$．

于是

$x_3=x_6=\cdots=x_{1986}=x_2=x_5=\cdots=x_{1985}=x_1=x_4=\cdots=x_{1984}=x_{1987}=x$

代入方程（1）得

$$x^3=3x$$

所以原方程组的解为：$(0，0，\cdots，0)$，$(\sqrt{3}，\sqrt{3}，\cdots，\sqrt{3})$，$(-\sqrt{3}，-\sqrt{3}，\cdots，-\sqrt{3})$．

B2－043　解方程组

$$xy+xz=8-x^2$$
$$xy+yz=12-y^2$$
$$yx+zx=-4-z^2$$

【题说】1990 年匈牙利数学奥林匹克第二轮基本水平题 1．

【解】原方程组可以改写成

$$x(x+y+z)=8$$
$$y(x+y+z)=12$$
$$z(x+y+z)=-4$$

将这三个方程相加，可以得到 $(x+y+z)^2=16$，从而 $x+y+z=\pm4$．由此可得到原方程组的解为（2，3，－1）与（2，－3，1）．

B2－044　若实数 a、b、x、y 满足 $ax+by=3$，$ax^2+by^2=7$，$ax^3+by^3=16$，$ax^4+by^4=42$，求 ax^5+by^5 的值．

【题说】第八届（1990 年）美国数学邀请赛题 15．

【解】由 $ax^3+by^3=(ax^2+by^2)(x+y)-(ax+by)xy$

得

$$16=7(x+y)-3xy \qquad (1)$$

由 $ax^4+by^4=(ax^3+by^3)(x+y)-(ax^2+by^2)xy$

得

$$42=16(x+y)-7xy \qquad (2)$$

由（1）、（2）解得 $x+y=-14$，$xy=-38$．因此，

$$ax^5+by^5=(ax^4+by^4)(x+y)-(ax^3+by^3)xy$$
$$=42\times(-14)-16\times(-38)=20$$

B2－045 解方程组 $\begin{cases} 2x+3y+z=13 & (1) \\ 4x^2+9y^2+z^2-2x+15y+3z=82 & (2) \end{cases}$

【题说】1992 年友谊杯国际数学竞赛八年级题 1．

【解】（1）+（2）得

$$(2x)^2+(3y+3)^2+(z+2)^2=108$$

（1）即

$$2x+(3y+3)+(z+2)=18 \qquad (3)$$

所以，由柯西不等式得

$$108=(2x)^2+(3y+3)^2+(z+2)^2$$

$$\geq \frac{1}{3}\left(2x+(3y+3)+(z+2)\right)^2=108$$

故有 $$2x=3y+3=z+2$$

与（3）联立，解得 x=3，y=1，z=4．

B2－046　求满足下列条件的关于 x、y 的次数最低（但不低于 1 次）的多项式 f（x，y）：

$$\begin{cases} f(x, y)+f(y, x)=0 & (1) \\ f(x, x+y)+f(y, x+y)=0 & (2) \end{cases}$$

【题说】1994 年日本数学奥林匹克预选赛题 11．

【解】将 f（x，y）表为 i 次齐次多项式之和：$f(x,y)=\sum f_i(x, y)\ (i=0, 1, 2, \cdots)$．易知，若 f（x，y）满足题设条件，则每一 f_i（x，y）也满足同样的条件．所以，所要求的 f（x，y）是一个次数最低的齐次式．由（1）知 f（y，y）=0，所以

$$f(x, y)=(x-y)h(x, y)$$

其中 h（x，y）是关于 x、y 的齐次式，且 h（x，y）=h（y，x），即 h 为对称式．

由（2）得

$$-yh(x, x+y)-xh(y, x+y)=0$$

以 y－x 代 y 得

$$-(y-x)h(x, y)-xh(y-x, y)=0$$

所以，h（x，y）被 x 整除，由对称性知，h（x，y）也被 y 整除．由此得

$$f(x, y)=(x-y)xyg(x, y)$$

其中 g（x，y）是齐次对称式，将上式代入（2）并整理，得

$$g(x, x+y)+g(y, x+y)=0 \quad (3)$$

令 y=－x，得

$$g(x, 0)+g(-x, 0)=0 \quad (4)$$

设 g（x，y）为 l 次齐次式，即

$$g(x, y)=\sum_{i=0}^{l} C_i x^i y^{l-i}$$

由（4）得

$$c_l+(-1)^l c_l=0$$

故 l 为奇数或 c_l=0．

若 c_l=0，则 g（x，y）被 y 整除，由对称性知，它也被 x 整除，所以 l≥2．若 l=2，则 g（x，y）=cxy（c≠0），不满足（3），故 l≥3．

若 c_l≠0，则 l 为奇数．若 l=1，则 g（x，y）=c（x+y）（c≠0），不满足（3），故 l≥3．

综上所述，g（x，y）是至少 3 次的齐次对称式．设

$$g(x, y)=a(x^3+y^3)+bxy(x+y)$$

代入（3）并整理，得

$$a\left((x^3+y^3)+2(x+y)^3\right)+b(x+y)\left((2x^2+xy)+(xy+2y^2)\right)=0$$

两边同除以 x+y 并整理，得

$$(3a+2b)(x^2+xy+y^2)=0$$

取 $a=2$，$b=-3$，则得所求的一个 $f(x,y)$ 为

$$f(x,y)=(x-y)xyg(x,y)$$
$$=(x-y)xy(x+y)(2x-y)(x-2y)$$

不难验证这个多项式符合要求。

B2－047　货车在 x 时 y 分从莫斯科出发，于 y 时 z 分到达萨拉托夫，途中共用了 z 小时 x 分钟，求 x 的所有可能值．

【题说】第二十一届（1995 年）全俄数学奥林匹克九年级题 1．

【解】依题意得 $z=x+y$，或 $z=x+y-60$

因为 $$x+y<24+24<60$$

所以 $$z=x+y \qquad (1)$$

设货车在途中经历了 k 昼夜，则

$$y=x+z-24k \qquad (2)$$

由（1）、（2）得 $x=12k$．因为 $0\le x<24$，所以

$$x=0 \text{ 或 } 12$$

这样的 x 值事实上是可能的，例如

$$x=0，y=z=15；或\ x=12，y=15，z=27$$

B2－048　求所有使等式

$$\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=x$$

成立的实数 x，其中 p 是一实参数．

【题说】第五届（1963 年）国际数学奥林匹克题 1．本题由捷克斯洛伐克提供．

【解】将等式移项，两边平方，化简后得

$$8(2-p)x^2=(4-p)^2 \qquad (1)$$

仅当 $p<2$ 时，方程（1）有解．正解为

【别证】 作$\angle MON=\frac{\pi}{7}$，顺次地，在OM上取OA＝1，在ON上

将（2）代入原方程，得

$$\frac{|3p-4|}{2\sqrt{2(2-p)}}+\frac{2|p|}{2\sqrt{2(2-p)}}=\frac{4-p}{2\sqrt{2(2-p)}}$$

即 $$|3p-4|+2|p|=4-p \qquad (3)$$

当且仅当$0\le p\le\frac{4}{3}$时，（3）式成立，所以当且仅当$0\le p\le\frac{4}{3}$时，原方程有解，解为

$$x=\frac{4-p}{2\sqrt{2(2-p)}}$$

B2－049　解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{xy+x}{x+y+1}=2\\ \dfrac{xz+2x}{x+z+2}=3\\ \dfrac{(y+1)(x+2)}{y+z+3}=4\end{cases}$$

【题说】1979 年江西省赛一试题 2．

【解】将原方程组两边取倒数并整理得：
$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+1}=\dfrac{1}{2} & (1)\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z+2}=\dfrac{1}{3} & (2)\\ \dfrac{1}{y+1}+\dfrac{1}{z+2}=\dfrac{1}{4} & (3)\end{cases}$$

（1）+（2）+（3）再除以 2 得
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+2}=\frac{13}{24} \qquad (4)$$

用（4）分别减去（3）、（2）及（1）式，即得：
$$\frac{1}{x}=\frac{7}{24}，\frac{1}{y+1}=\frac{5}{24}，\frac{1}{z+2}=\frac{1}{24}$$

所以
$$x=3\frac{3}{7}，y=3\frac{4}{5}，z=22$$

B2－050　对任意的实数 t，[t]表示小于或等于 t 的最大整数．试证：方程

$$[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]=12345$$

没有实数解．

【题说】第十三届（1981 年）加拿大数学奥林匹克题 1．

【解】设 $x=[x]+y$，$0\leq y<1$，则原方程即

$$63[x]+[2y]+[4y]+[8y]+[16y]+[32y]=12345$$

从而

$$63[x]\leq 12345<63[x]+1+3+7+15+31=63[x]+57$$

但 $12345=63\times 195+60$，因此上式无解．

B2－051　P（x）和 Q（x）为二实系数多项式，它们对一切实数 x 满足恒等式 P（Q（x））=Q（P（x））．若方程 P（x）=Q（x）无实数解，试证方程 P（P（x））=Q（Q（x））亦无实数解．

【题说】第十三届（1981 年）加拿大数学奥林匹克题 4．

【证】由于 P（x）=Q（x）无实数解，P（x）－Q（x）恒正或恒负；不妨设恒正，即 P（x）＞Q（x）．

如果 P（P（x））=Q（Q（x））有一实数解 x=a，则

$$\begin{aligned}P(Q(a))&>Q(Q(a))=P(P(a))\\&>Q(P(a))=P(Q(a))\end{aligned}$$

得出矛盾．故方程 P（P（x））=Q（Q（x））不可能有实数解．

B2－052　解方程

$$\cfrac{x}{2+\cfrac{x}{2+\ddots\cfrac{}{2+\cfrac{x}{1+\sqrt{1+x}}}}}=1$$

（方程左边的式子中有 1985 个 2）

【题说】第十九届（1985 年）全苏数学奥林匹克十年级题 5．

【解】因为

$$x/\left(\sqrt{x+1}+1\right)=\sqrt{x+1}-1,$$

所以当$x\geq-1$时，方程左边部分的繁分式恒等于$\sqrt{x+1}-1$，即原方程等价于

$$\sqrt{x+1}-1=1$$

解得 x=3．

B2－053　求方程的整数解

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}=\left(1+\frac{1}{1988}\right)^{1988}$$

【题说】第二十二届（1988 年）全苏数学奥林匹克九年级题 1．

【解】原方程变形为

$$\frac{1989^{1988}}{1988^{1988}}=\frac{(m+1)^{m+1}}{m^{m+1}}$$

方程的两端都是既约分数，所以有

$$m^{m+1}=1988^{1988}$$

如果 $m\geq1988$,则 $m^{m+1}>1988^{1988}$;而如果 $0<m<1988$,则 $m^{m+1}<1988^{1988}$.如果 $m<-1$ 令 $n=-(m+1)$，则得

$$1988^{1988}=n^n$$

所以 n=1988，即 m=－1989．

B2－054　求 A^2，这里 A 是下列方程所有根的绝对值之和：

$$x=\sqrt{19}+\cfrac{91}{\sqrt{19}+\cfrac{91}{\sqrt{19}+\cfrac{91}{\sqrt{19}+\cfrac{91}{\sqrt{19}+\cfrac{91}{x}}}}}$$

【题说】第九届（1991 年）美国数学邀请赛题 7．

【解】将右端的繁分式逐步化为简单的分式，所得结果一定是 x 的线性分式（分子、分母都是 x 的一次式）．因此，原方程可化为 x 的二次方程，至多有两个根．方程

$$x=\sqrt{19}+\frac{91}{x}\qquad(1)$$

的根显然都是原方程的根，而（1）即

$$x^2-\sqrt{19}x-91=0\qquad(2)$$

恰有两个根．于是原方程等价于（1）、（2），（2）的根 x_1、x_2 一正一负，所以

$$A_2=(|x_1|+|x_2|)^2=(x_1-x_2)^2=(\sqrt{19})^2-4(-91)=383$$

B2－055　解方程组$\begin{cases}5x\left(1+\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)=12\\ 5y\left(1-\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)=4\end{cases}$

【题说】第十七届（1991年）全俄数学奥林匹克十年级题7．

【解】原方程组即

$$1/(x^2+y^2)=12/5x-1 \qquad (1)$$

$$1/(x^2+y^2)=1-4/5y \qquad (2)$$

（1）+（2）再除以2得

$$1/(x^2+y^2)=6/5x-2/5y \qquad (3)$$

（1）－（2）再除以2得

$$1=6/5x+2/5y \qquad (4)$$

（3）×（4）得

$$1/(x^2+y^2)=36/25x^2-4/25y^2 \qquad (5)$$

解（5）得 $y^2=x^2/4$，代入（4）得 x=2/5 或 2，代入（3）得 y=－1/5 或 1．

所以原方程组的解为

$$\begin{cases}x=2/5\\ y=-1/5\end{cases} \text{或} \begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}$$

B2－056　设正实数 a＞1，自然数 n≥2，且方程[ax]=x 恰有 n 个不同的解．试求 a 的取值范围．（[x]表示不超过 x 的最大整数）

【题说】1992年四川省赛决赛题3．

【解】由题设可知，x 必为整数．

在 x＜0 时，[ax]＜ax＜x．所以 x≥0

令{a}=a－[a]，则原方程变为

$$x=[ax]=[a]x+[\{a\}x] \qquad (1)$$

因为[a]≥1，所以（1）式成立的充分必要条件是

$$[a]=1 \text{ 且 } \{a\}x<1 \qquad (2)$$

又因 x=0 显然满足方程，

所以，$x<\dfrac{1}{\{a\}}$恰对$n-1$个正整数$1，2，\cdots，n-1$成立．从而

$$\frac{1}{n}\le\{a\}<\frac{1}{n-1}$$

$$1+\frac{1}{n}\le a<1+\frac{1}{n-1}$$

B2－057　方程 $x^2+x+1=0$ 的解为 w，求满足等式 $w^{2k}+1+(w+1)^{2k}=0$ 的不超过100的正整数 k 的个数．

【题说】1992年日本数学奥林匹克预选赛题2．

【解】显然有 $w^3=1$，$(w+1)^2=w^4=w$．从而 $w^{2k}+1+(w+1)^{2k}=0$ 当且仅当 $w^{2k}+w^k+1=0$．

当 k=3m（m=1，2，…）时，

$$w^{2k}+w^k+1=(w^3)^{2m}+(w^3)^m+1=3$$

当 $k=3m+1$（$m=0$，1，2，…）时，

$$w^{2k}+w^k+1=w^2+w+1=0$$

当 $k=3m+2$（$m=0$，1，2，…）时，

$$w^{2k}+w^k+1=w+w^2+1=0$$

由于 1 至 100 的正整数中，被 3 整除的有 33 个，所以满足条件的正整数 k 有 100－33=67 个．

B2－058　解方程

$$x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}=3$$

【题说】第二十四届（1992 年）加拿大数学奥林匹克题 4．

【解】原方程等价于

$$0=x^4+2x^3-x^2-6x-3=(x^2+x+1)^2-4(x+1)^2$$
$$=(x^2+3x+3)(x^2-x-1)$$

于是

$$x=\frac{1}{2}(-3\pm i\sqrt{3}),\ \frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$$

又解　令 $w=x+1$，原方程变为倒数方程

$$w^2-2w-1-\frac{2}{w}+\frac{1}{w^2}=0$$

即

$$\left(w+\frac{1}{w}\right)^2-2\left(w+\frac{1}{w}\right)-3=0$$

从而

$$w+\frac{1}{w}=-1\text{或}3$$

即

$$w^2+w+1=0\text{ 或 }w^2-3w+1=0$$

于是

$$x=w-1=\frac{1}{2}(-3\pm i\sqrt{3})\text{ 或}\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$$

B2－059　n 为一正整数，试确定有多少个实数 x，满足 $1\le x<n$ 和 $x^3-[x^3]=(x-[x])^3$．其中[x]表示不超过 x 的最大整数．

【题说】1992 年澳大利亚数学奥林匹克题 2．

【解】记[x]=－a，x－[x]=r，则有 $1\le a\le n-1$，$0\le r<1$，且

$$(a+r)^3-[(a+r)^3]=r^3$$

即

$$a^3+3a^2r+3ar^2=[(a+r)^3]$$

所以 $a^3+3a^2r+3ar^2$ 是整数，且 $a^3\le a^3+3a^3r+3ar^2<a^3+3a^2+3a=(a+1)^3-1$．当 a 确定时，对任一整数 n，$a^3<n<(a+1)^3-1$，r 的二次方程 $3ar^2+3a^2r+(a^3-n)=0$ 的常数项为负，所以恰有一个正根 r．而且 $(a+1)^3-1>n=3ar^2+3a^2r+a^3$ 推出 $r<1$．在 $n=a^3$ 时，显然 r=0．所以 a 确定时，r 有 $(a+1)^3-a^3-1$ 个不同的值满足 $0\le r<1$．从而 x=a+r 的个数为 $(a+1)^3-a^3-1$．故所求 x 的个数为

$$\sum_{a=1}^{n-1}[(a+1)^3-a^3-1]=n^3-1-(n-1)=n^3-n$$

B2－060　设[x]表示不超过x的最大整数,求方程 $4x^2-20[x]+23=0$ 的所有实数根．

【题说】1993 年河北省赛一试题 4．

【解】令 k=[x]．则

$$4k^2-20k+23\le 0$$

即

$$(2k-5)^2\le 2$$

所以 k=2 或 3．将它们代入原方程，易得

$$k=2\text{时},\ x=\frac{\sqrt{17}}{2}\ ;\ k=3\text{时},\ x=\frac{\sqrt{37}}{2}$$

B2－061 求下面方程组的所有实数解，并证明你的结论：

$$\begin{cases}\dfrac{4x^2}{1+4x^2}=y\\ \dfrac{4y^2}{1+4y^2}=z\\ \dfrac{4z^2}{1+4z^2}=x\end{cases}$$

【题说】第二十八届（1996 年）加拿大数学奥林匹克题 2．

【解】（1）将三个方程相加，得

$$x+y+z=\frac{4z^2}{1+4z^2}+\frac{4x^2}{1+4x^2}+\frac{4y^2}{1+4y^2}$$

移项，整理得

$$\frac{x(2x-1)^2}{1+4x^2}+\frac{y(2y-1)^2}{1+4y^2}+\frac{z(2z-1)^2}{1+4z^2}=0$$

注意到 x、y、z 的非负性，上式左边每一项皆非负，故只能为 0．从而得

$$x=y=z=0\text{或}x=y=z=\frac{1}{2}$$

$$=\left[x-\frac{p^2-q^2+1}{2}\right]^2-\left(\frac{p^2-q^2+1}{2}\right)^2+p^2$$

$$=\left[x-\frac{p^2-q^2+1}{2}\right]^2+\frac{1}{4}[(p+q)^2-1][1-(p-q)^2]$$

于是 f（n）

$$\le\frac{1}{4}[(p+q)^2-1][1-(p-q)^2]$$

的最小值为 0，最大值为 m－1．

（2）设 M 为 r_1，r_2，…，r_m 的分母的公倍数．取 n=M－1，则

$$r_kn=r_kM-r_k$$

$$[r_kn]=r_kM-1\ (k=1,2,\cdots,m)$$

B2－062　求下列方程的整数解：$y^3-x^3=91$．

【题说】1949 年～1950 年波兰数学奥林匹克二试题 2．

【解】原方程化为

$$(y-x)\quad(y^2+xy+x^2)=13\times 7 \qquad (1)$$

因为$y^2+xy+x^2=\left(y+\frac{1}{2}x\right)^2+\frac{3}{4}x^2\geq 0$，所以$y-x>0$．只有以下几种情形：

1．$y-x=91$．$y^2+xy+x^2=1$．

这个方程组没有实数解，更没有整数解．

2．$y-x=1$，$y^2+xy+x^2=91$．

解为 $x=5$，$y=6$；$x=-6$，$y=-5$．

3．$y-x=13$，$y^2+xy+x^2=7$．

这个方程组没有实数解．

4．$y-x=7$，$y^2+xy+x^2=13$．

解为 $x=-3$，$y=4$；$x=-4$，$y=3$．

因此，方程（1）有四组整数解

$$x=5，y=6；x=-6，y=-5$$

$$x=-3，y=4；x=-4，y=3$$

B2－063　证明：对于无数多个素数 p，方程

$$x^2+x+1=py$$

有整数解（x，y）．

【题说】第二届（1968 年）全苏数学奥林匹克八年级题 8．

【证】设方程 $x^2+x+1=py$ 只对有限个素数 p_1，p_2，…，p_m 有整数解（x，y）．

令 $p=p_1p_2\cdots p_m$，则数 p^2+p+1 不被 p_1，p_2，…，p_m 中的任何一个整除．

设 q 是 p^2+p+1 的一个素因数，显然它不同于 p_1，p_2，…，p_m 中的任何一个．而方程

$$x^2+x+1=qy$$

显然有整数解$\left(p，(p^2+p+1)\cdot\frac{1}{q}\right)$，与假设冲突．

B2－064　证明：方程 $x^3+11^3=y^3$ 没有正整数解．

【题说】第四届（1972 年）加拿大数学奥林匹克题 5．

【证】将原方程变形为

$$11^3=y^3-x^3=(y-x)\quad(x^2+xy+y^2)$$

如果它有正整数解（x，y），则可能有以下四种情况

$$y-x=11^3，x^2+xy+y^2=1y-x=11^2，x^2+xy+y^2=11$$

$$y-x=11，x^2+xy+y^2=112$$

$$y-x=1，x^2+xy+y^2=113$$

因为 $x^2+xy+y^2>y^2>(y-x)^2$，故前三种情况均不可能，但若 $y-x=1$，则

$$x^2+x(x+1)+(x+1)^2=11^3$$

即

$$3x^2+3x=1330$$

但 1330 不能被 3 整除．因此，原方程不可能有正整数解．

B2－065　求方程 $2^w+2^x+2^y+2^z=20.625$ 的满足条件 $w>x>y>z$ 的整数解．

【题说】1979 年湖南省赛二试题 2．

【解】方程两端同乘 8，得

$$2^{w+3}+2^{x+3}+2^{y+3}+2^{z+3}=165 \qquad (1)$$

165 为奇数，故必有 z+3=0，即 z=－3．

（1）的两端同减去 1，再除以 4，得

$$2^{w+1}+2^{x+1}+2^{y+1}=41 \qquad (2)$$

同理 y=－1

（2）的两端同减去 1，再除以 8，得

$$2^{w-2}+2^{x-2}=5$$

于是　x=2，w=4

故所求的解为

$$w=4，x=2，y=-1，z=-3$$

【别解】将 20.625 表为 2 的整数幂的和得

$$2^w+2^x+2^y+2^z=2^4+2^2+2^{-1}+2^{-3}$$

比较指数即可得解．

B2－066　试证：1．如果正整数 n 使方程

$$x^3-3xy^2+y^3=n$$

有一组整数解（x，y），那么这个方程至少有三组整数解；

（2）当 n=2891 时，上述方程无整数解．

【题说】第二十三届（1982 年）国际数学奥林匹克题 4．

【证】1．因为

$$(y-x)^3\ (y-x)\ x^2+\ (-x)^3=x^3-3xy^2+y^3$$

所以在（x，y）为方程

$$x^3-3xy^2+y^3=n \qquad (1)$$

的整数解时，（y－x，－x）也是（1）的整数解．这时将 y－x 当作 x，－x 当作 y，则由于（－x）－（y－x）=－y，－（y－x）=x－y，所以（－y，x－y）也是（1）的整数解．

这三组解互不相同，因为任两组解相同将导出 x=y=0，与 n 为正整数矛盾．

2．如果 $x^3-3xy^2+y^3=2891$，那么

$$x^3-3xy^2+y^3\equiv 2\ (\mathrm{mod}\,9) \qquad (2)$$

从而 x、y 不能都被 3 整除，如果 x、y 中恰有一个被 3 整除，用（y－x，－x）或（－y，x－y）代替（x，y）．因此可以假定 x、y 都不被 3 整除，从而

$$x^3\equiv\pm1，y^3\equiv\pm1，-3xy^2\equiv\pm3\ (\mathrm{mod}\,9)$$

（2）不能成立，这表明当 n=2891 时，（1）无解．

B2－067 设 n 为已知的正整数．方程 $\frac{xy}{x+y}=n$ 有多少组不同的正整数解？（注：当 a≠b 时，将 x=a，y=b 与 x=b，y=a 算作不同的解．）

【题说】1985 年合肥市赛二试题 4．

【解】原方程即（x－n）（y－n）=n^2．

对 n^2 的每一个正约数 m，都可得到方程的一组正整数解：

$$x=n+m，y=n+\frac{n^2}{m}$$

并且 m 不同时解也不同．

设n的质因数分解式为 $n=p_1^{r_1}\cdot p_2^{r_2}\cdots p_k^{r_k}$．

则 $n^2=p_1^{2r_1}\cdot p_2^{2r_2}\cdots p_k^{2r_k}$

的正约数共有（$2r_1+1$）（$2r_2+1$）…（$2r_k+1$）个，所以原方程有（$2r_1+1$）（$2r_2+1$）…（$2r_k+1$）组正整数解．

B2－068　方程 $2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}=3$ 的非负整数解共有多少组？

【题说】1985 年全国联赛一试题 2（2）．原题为填空题．

【解】分以下两种情形讨论：

1．若 $x_1=1$，则必有某 $x_i=1$（i=2，3，…，10），而其余 $x_j=0$（$j\neq i$），这有 9 组解．

2．若 $x_1=0$，则 $x_2+x_3+\cdots+x_{10}=3$，它的非负整数解共

$$C_{9+3-1}^3=C_{11}^3=165\text{组}$$

综上所述，共有 174 组非负整数解．

B2－069　x、y 是满足方程 $y^2+3x^2y^2=30x^2+517$ 的整数，求 $3x^2y^2$ 的值．

【题说】第五届（1987 年）美国数学邀请赛题 5．

【解】原方程变形为

$$(y^2-10)(3x^2+1)=3\times 13^2$$

由此，$y^2-10=1$，3，13，39，169 或 507，则

$$y^2=11，13，23，49，179，517$$

仅当 $y^2=49$ 时，y=7 是正整数．因此，$y^2-10=39$，$3x^2+1=3\times 13^2/39=13$；$3x^2=12$．所以 $3x^2y^2=12\times 49=588$．

B2－070　满足 $n^2+(n+1)^2=m^4+(m+1)^4$ 的整数对（m，n）共有多少组？

【题说】1988 年北京市赛高一题 1（4）．

【解】原等式可化为：

$$n(n+1)=m(m+1)[m(m+1)+2]$$

设 k=m（m+1），则得

$$n(n+1)=k(k+2)$$

上式成立，当且仅当两边同时为 0．从而 n=0 或 n=－1，k=0 或 k=－2．

整数对（m，n）应取（0，0），（0，－1），（－1，0），（－1，－1）．

B2－071　满足方程

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y}+\frac{1}{(x+1)y}=\frac{1}{1991}$$

的正整数解（x，y）有多少组？

【题说】1991 年日本数学奥林匹克预选赛题 4．

【解】显然 x+1、y 均大于 1991．由原方程得

$$(x+1)y=1991(x+1)-1991y=1991$$

$$(x+1-1991)(y-1991)=1991\times 1992$$

$=2^3\cdot3\cdot11\cdot83\cdot181$

x+1－1991 可为上式左边的任一正因数，因此 x 的个数即为 1992·1991 的正因数的个数，即 $4\times2\times2\times2\times2=2^6=64$．

B2－072　求方程组的整数解

$$\begin{cases}xz-2yt=3\\ xt+yz=1\end{cases}$$

【题说】第二十五届（1991 年）全苏数学奥林匹克八、九年级题 1．

【解】由原方程可得

$$(xz-2yt)^2+2(xt+yz)^2=(x^2+2y^2)(z^2+2t^2)=11$$

因而 $$x^2+2y^2=1 \text{ 或 } z^2+2t^2=1$$

（1）由 $x^2+2y^2=1$ 得 y=0，x=±1．然后由第二个方程得 t=±1．从而得 z=±3．

（2）由 $z^2+2t^2=1$ 得 t=0，z=±1．从而得 y=±1，x=±3．

经检验知原方程组的整数解为 4 组它们分别是：（1，0，3，1）；（－1，0，－3，－1）；（3，1，1，0）；（－3，－1，－1，0）．

B2－073　证明方程

$$x^2+y^5=z^3 \qquad (1)$$

有无穷多个整数解，其中 xyz≠0．

【题说】第二十三届（1991 年）加拿大数学奥林匹克题 1．

【证】方程（1）一个最易发现的整数解是（3，－1，2）．对于任意 k∈N，$(3k^{15},-k^6,2k^{10})$ 也是方程（1）的整数解．因而有无穷多个解．

如果限制求（1）的正整数解，则要困难一些．但经过若干试算，还是可以发现方程（1）较小的正整数解．例如（10，3，7）是（1）的一个正整数解，从而（1）也有无穷多个正整数解 $(10k^{15},3k^6,7k^{10})$，k∈N．

【评注】如果将方程（1）中指数都换为 3，即方程 $x^3+y^3=z^3$ 就没有正整数解，它是费马大定理的一个特例．

B2－074　证明：方程

$$(x+y+z)^2+2(x+y+z)=5(xy+yz+zx)$$

的正整数解有无穷多个．

【题说】1992 年友谊杯国际数学竞赛十、十一年级题 1．

【证】显然，（1，1，1）是所给方程的一组解．

设原方程有一组正整数解（a，b，c），不妨设其中 c 最小．将原方程改写为 z 的一元二次方程

$$z^2-(3x+3y-2)z+x^2+y^2-3xy+2x+2y=0 \qquad (1)$$

在 x=a，y=b 时，由韦达定理，（1）有解 z=c 及

$$z=3a+3b-2-c$$

显然 3a+3b－2－c＞c，因此原方程又有一组新的正整数解（a，b，3a+3b－2－c）．

用这个方法，从解（1，1，1）出发，可以不断产生新的解（x，y，z），x+y+z 的值严格增加．所以原方程有无穷多组正整数解．

B2－075　是否存在整数 m，n 满足 $m^2+1954=n^2$？

【题说】第三届（1993年）澳门数学奥林匹克第三轮题1．

【解】不存在．因 $1954=(n+m)(n-m)$，右边为奇数或4的倍数，不等于左边．

B2－076　若 $0<a<b<c<d<500$，问有多少个有序的四元整数组 (a,b,c,d) 满足 $a+d=b+c$ 及 $bc-ad=93$？

【题说】第十一届（1993年）美国数学邀请赛题4．

【解】答870．

因 $a+d=b+c$，我们可以取 $(a,b,c,d)=(a,a+x,a+y,a+x+y)$，这里 x，y 为整数，且 $0<x<y$．

$$93=bc-ad=(a+x)(a+y)-a(a+x+y)=xy$$

所以，$(x,y)=(1,93)$ 或 $(x,y)=(3,31)$

第一种情形

$(a,b,c,d)=(a,a+1,a+93,a+94)$，$a=1,2,\cdots,405$

第二种情形

$(a,b,c,d)=(a,a+3,a+31,a+34)$，$a=1,2,\cdots,465$

这两组数组中无重复的，所以共有 $405+465=870$ 个四元整数组满足条件．

B2－077　求满足等式 $2x^2y^2+y^2=26x^2+1201$ 的一切正整数数组 (x,y)．

【题说】1995年日本数学奥林匹克预选赛题8．

【解】由条件得

$$(2x^2+1)(y^2-13)=1188=2^2\times3^3\times11$$

从而 $2x^2+1$ 与 y^2-13 均为 $2^2\times3^2\times11$ 的因数．又 $2x^2+1$ 是奇数，故 $2x^2+1$ 为 $3^3\times11=297$ 的因数．由下表

$2x^2+1$	0	3	9	11	27	33	99	297
x	/	1	2	/	/	7	7	/
y^2-13		396	132			36	12	
y		/	/			7	5	

可知，所求的正整数解为 $(4,7)$ 和 $(7,5)$．

B2－078　设 n 为一个固定的正整数．证明：对任何非负整数 k，下述不定方程

$$x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3=y^{3k+2}\qquad(1)$$

有无穷多个正整数解 $(x_1,x_2,\cdots,x_n;y)$

【题说】第二十七届（1995年）加拿大数学奥林匹克题4．

【证】由立方和公式

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

知，当 $k=0$ 时，$\left(1,2,\cdots,n;\frac{n(n+1)}{2}\right)$ 为（1）的一组整数解．

令 $c=n(n+1)/2$，对任意正整数 q，有

$$(c^kq^{3k+2})^3+(2c^kq^{3k+2})^3+\cdots+(nc^kq^{3k+2})^3$$
$$=c^{3k}q^{3(3k+2)}(1^3+2^3+\cdots+n^3)$$

$$= c^{3k} + 2q^{3(3k+2)}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$=c^{3k+2}q^{3(3k+2)}=(cq^3)^{3k+2}$$

因此，对任意正整数 q，（c^kq^{3k+2}，$2c^kq^{3k+2}$，…，nc^kq^{3k+2}；cq^3）都是（1）的解．

B3　不等式

B3－001　北京、上海同时制成电子计算机若干台，除本地应用外，北京可支援外地 10 台，上海可支援外地 4 台．现在决定给重庆 8 台，汉口 6 台，若每台计算机运费如右表所示（单位：百元），又上海、北京当时制造的机器完全相同．问应怎样调运，才能使总的运费最省？

终点／起点	汉口	重庆
北京	4	8
上海	3	5

【题说】1960 年上海市赛高一复赛题 6．

【解】设北京调给重庆 x 台，上海调给重庆 y 台，则

$$0\le x\le 10，0\le y\le 4$$
$$x+y=8$$

总运费为

$$8x+4（10-x）+5y+3（4-y）$$
$$=4x+2y+52=84-2y$$

当 y=4 时，总运费最小，此时，x=4，10－x=6，4－y=0．

答：北京调给重庆 4 台，调给汉口 6 台，上海调给重庆 4 台，这样总运费最省．

B3－002　x 取什么值时，不等式

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2}<2x+9$$

成立？

【题说】第二届（1960 年）国际数学奥林匹克题 2．本题由匈牙利提供．

【解】显然$x\ge -\frac{1}{2}$，$x\ne 0$．

将原不等式化简得　　$x^2(8x-45)<0$，

从而$x<\frac{45}{8}$．

因此，原不等式的解为

$$-\frac{1}{2}\le x<0\text{或}0<x<\frac{45}{8}$$

B3－003　甲队有 2m 个人，乙队有 3m 个人，现自甲队抽出（14－m）人，乙队抽出（5m－11）人，参加游戏，问甲、乙队各有多少人？参加游戏的人有几种选法？

【题说】1962 年上海市赛高三决赛题 4．

【解】抽出的人数必须满足

$$\begin{cases}0\le 14-m\le 2m\\0\le m-11\le 3m\end{cases}$$

解得 m=5．

故甲队有 2m=10 人，乙队有 3m=15 人，甲队抽出 14－m=9（人）．乙队抽出 5m－11=14（人），从而参加游戏的人共有

$$C_{10}^{9}\cdot C_{15}^{14}=150\text{种}$$

选法．

B3－004　求出所有满足不等式

$$\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\frac{1}{2}$$

的实数．

【题说】第四届（1962 年）国际数学奥林匹克题 2．本题由匈牙利提供．

【解】由题设知：$-1\leq x\leq 3$，在此范围内，x越大，则$\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}$越小，而在$x=1-\frac{\sqrt{31}}{8}$时，其值为$\frac{1}{2}$．

所以解为$-1\leq x<1-\frac{\sqrt{31}}{8}$．

B3－005 设x、y为正数．s为x、$y+\frac{1}{x}$、$\frac{1}{y}$中的最小数．找出s的最大可能值，并说明 x、y 为何值时，s 可达到最大值？

【题说】第六届（1972 年）全苏数学奥林匹克九年级题 5．

【解】根据题意

$$x\geq s,\ y+\frac{1}{x}\geq s,\ \frac{1}{y}\geq s$$

从而

$$y\leq\frac{1}{s},\ \frac{1}{x}\leq\frac{1}{s},\ s\leq y+\frac{1}{x}\leq\frac{2}{s}$$

（1）$-\frac{1}{\sqrt{3}}\leq x_i\leq\sqrt{3}$（$i=1,2,\cdots,1997$）；

（2）$x_1+x_2+\cdots+x_{1997}=-318\sqrt{3}$．

当且仅当

$$y=\frac{1}{x}=\sqrt{2}/2$$

时，s的最大值等于$\sqrt{2}$．

B3－006 正数x_1，x_2，…，x_n之和为1，设s为$\frac{x_1}{1+x_1}$,$\frac{x_2}{1+x_1+x_2}$,…，$\frac{x_n}{1+x_1+x_2+\cdots+x_n}$中的最大值．找出s的最小可能值，并说明$x_1$，$x_2$，…，$x_n$分别为何值时，s 达到最小值．

【题说】第六届（1973 年）全苏数学奥林匹克十年级题 6．

【解】

$$s\geq\frac{x_k}{1+x_1+x_2+\cdots+x_k}$$

即

$$1-s\leq\frac{1+x_1+\cdots+x_{k-1}}{1+x_1+\cdots+x_{k-1}+x_k}\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

将以上各式相乘得

$$(1-s)^{n} \leq \frac{1}{1+x_1+x_2+\cdots+x_n}=\frac{1}{2}$$

从而

$$s \geq 1-2^{-\frac{1}{n}}$$

在$x_k=2^{\frac{k}{n}}(1-2^{-\frac{1}{n}})$时，s取得最小值$1-2^{-\frac{1}{n}}$．

B3－007　设a_1，a_2，…，a_n为n个正数，且设q为一已知实数，使得$0<q<1$．求n个数b_1，b_2，…，b_n使

1．$a_k<b_k$，　k=1，2，…，n．

2．$q<\frac{b_{k+1}}{b_k}<\frac{1}{q}$，　k=1，2，…，n－1．

3．$b_1+b_2+\cdots+b_n<\frac{1+q}{1-q}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$．

【题说】第十五届（1973年）国际数学奥林匹克题6．本题由瑞典提供．

【解】设$b_k=a_1q^{k-1}+a_2q^{k-2}+\cdots+a_{k-1}q+a_k+a_{k+1}q+\cdots+a_nq^{n-k}$（k=1，2，…，n）．

1．显然$b_k>a_k$对k=1，2，…，n成立．

2．比较$b_{k+1}=q^ka_1+q^{k-1}a_2+\cdots+qa_k+a_{k+1}+\cdots+q^{n-k-1}a_n$与$qb_k=q^ka_1+\cdots+q^2a_{k-1}+qa_k+q^2a_{k+1}+\cdots+q^{n-k+1}a_n$，$qb_k$的前面k项与bk+1的前面k项相等，其余的项小于$b_{k+1}$的相应项（因为$q<1$）．因此$b_{k+1}>qb_k$．

同理$b_{k+1}<\frac{1}{q}b_k=q^{k-2}a_1+\cdots+a_{k-1}+\frac{1}{q}a_k+a_{k+1}+\cdots+q^{n-k-1}a_n$

于是$q<\frac{b_{k+1}}{b_k}<\frac{1}{q}$，k=1，2，…，n－1．

3．

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} b_k &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} q^{|h-k|}a_h \\ &= \sum_{h=1}^{n} a_h \sum_{k=1}^{n} q^{|h-k|} < \sum_{h=1}^{n} a_h(1+2q+2q^2+\cdots) \\ &= \frac{1+q}{1-q}\sum_{h=1}^{n} a_h.\end{aligned}$$

因此，b_1，b_2，…，b_n满足题目的要求．

B3－008　求满足条件：$x\geq 1$，$y\geq 1$，$z\geq 1$，xyz=10，$x^{\lg x}y^{\lg y}z^{\lg z}\geq 10$的x、y、z的值．

【题说】1979年黑龙江省赛二试题3．

【解】设lgx=u，lgy=v，lgz=w，则原题条件就变为：

$$u\geq 0，v\geq 0，w\geq 0 \tag{1}$$

$$u+v+w=1 \tag{2}$$

$$u^2+v^2+w^2\geq 1 \tag{3}$$

（2）平方得

$$u^2+v^2+w^2+2(uv+vw+wu)=1 \tag{4}$$

（4）－（3）得　　　　$uv+vw+wu\leq 0$

由（1）得　　　　$uv=vw=wu=0$　　　　（5）

由（2）及（5）得：

$$\begin{cases}u=1\\v=0\\w=0\end{cases},\ \begin{cases}u=0\\v=1\\w=0\end{cases},\ \begin{cases}u=0\\v=0\\w=1\end{cases}$$

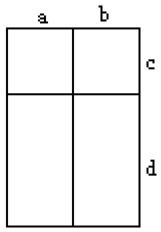
因此满足题意的解为：

$$\begin{cases}x=10\\y=1\\z=1\end{cases},\ \begin{cases}x=1\\y=10\\z=1\end{cases},\ \begin{cases}x=1\\y=1\\z=10\end{cases}$$

B3－009　长方形的一边长为 1cm 已知它被两条相互垂直的直线分成四个小长方形，其中三个的面积不小于 $1cm^2$，第四个的面积不小于 $2cm^2$．问原长方形另一边至少要多长？

【题说】第十七届（1983 年）全苏数学奥林匹克九年级题 6．【解】设小长方形的边长如图所示，则

$$\begin{cases}a+b=1\\ac\geq 1\\ad\geq 1\\bc\geq 1\\bd\geq 2\end{cases}$$



我们要求 c+d 的最小值，由题设

$$\begin{aligned}c+d&=(a+b)(c+d)\\&=ac+bd+ad+bc\\&\geq 1+2+2\sqrt{ac\cdot bd}\\&\geq 3+2\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$a=\sqrt{2}-1,\ b=2-\sqrt{2}$$

$$c=\sqrt{2}+1,\ d=2+\sqrt{2}$$

时，等号成立．所以另一边至少为 $3+2\sqrt{2}$．

B3－010　m 个互不相同的正偶数与 n 个互不相同的正奇数的总和为 1987，对于所有的这样的 m 与 n，问 3m+4n 的最大值是多少？请证明你的结论．

【题说】第二届（1987 年）全国冬令营赛题 6．

【解】$1987\geq 2+4+6+2m+1+3+\cdots+(2n-1)$

$$=m(m+1)+n^2$$

故m与n满足 $\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+n^2\leq 1987+\frac{1}{4}$

因此，由柯西不等式

$$
\begin{aligned}
3m+4n &= 3\left(m+\frac{1}{2}\right)+4n-\frac{3}{2}\\
&\leq 5\sqrt{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+n^2}-\frac{3}{2}\\
&= 5\sqrt{1987+\frac{1}{4}}-\frac{3}{2}\\
&\leq 221.40
\end{aligned}
$$

于是 221 为 3m+4n 的上界，当 m=27，n=35 时，3m+4n 取得最大值 221.

B3－011　求最大的正整数 n，使不等式

$$\frac{8}{15}<\frac{n}{n+k}<\frac{7}{13}$$

只对一个整数 k 成立.

【题说】第五届（1987 年）美国数学邀请赛题 8.

【解】原式等价于

$$\frac{7}{8}>\frac{k}{n}>\frac{6}{7} \qquad (1)$$

即 $$\frac{98}{112}>\frac{k}{n}>\frac{96}{112}$$

取 n=112，则 k 只能取唯一的整数值 97.

另一方面，在 n＞112 时，

$$\frac{7}{8}n-\frac{6}{7}n=\frac{n}{56}>2$$

从而区间$\left[\frac{6}{7}n，\frac{7}{8}n\right]$中有两个整数$k_1$、$k_2$.它们均使（1）成立.

因此满足要求的 n=112.

B3－012　非负数 a 和 d，正数 b 和 c 满足条件 b+c≥a+d，这时表达式$\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+b}$可以取怎样的最小值？

【题说】第二十二届（1988 年）全苏数学奥林匹克九年级题 7.

【证】不妨设 a+b≥c+d

因 $$\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+b}=\frac{b+c}{c+d}-c\left(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+b}\right)$$

$$b+c=\frac{1}{2}（b+c+b+c）\geq\frac{1}{2}（a+b+c+d）$$

c≤c+d

故 $$\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b+c+d}{c+d}-(c+d)\left(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+b}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b}{c+d}+\frac{c+d}{a+b}-\frac{1}{2}$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{a+b}{2(d+d)}\cdot\frac{c+d}{a+b}}-\frac{1}{2}$$

$$=\sqrt{2}-\frac{1}{2}$$

当$a=\sqrt{2}+1$，$b=\sqrt{2}-1$，$c=2$，$d=0$时，$\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+b}$取得最小值为$\sqrt{2}-\frac{1}{2}$．

B3－013　设 a_1、a_2、…、a_n 是给定不全为 0 的实数，r_1、r_2、…、r_n 是实数，如果不等式

$$r_1(x_1-a_1)+r_2(x_2-a_2)+\cdots+r_n(x_n-a_n)$$

$$\leq\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}-\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$$

对任何实数 x_1、x_2、…、x_n 成立，求，r_1、r_2、…、r_n 的值．

【题说】第三届（1988 年）全国冬令营赛题 1．

【解】取 $x_i=a_i$，$i=2$，3，…，n 代入原不等式，得

所以　$$a+\sqrt{b}=2\left(\frac{11}{2}+\sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2+11^2}\right)=11+\sqrt{605}$$

即　$$r_1(x_1-a_1)\leq\frac{(x_1+a_1)(x_1-a_1)}{\sqrt{x_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}+\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}}$$

当 $x_1>a_1$ 时，由上式得

$$r_1\leq\frac{x_1+a_1}{\sqrt{x_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}+\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}}$$

当 $x_1<a_1$ 时，上述不等式反号．令 x_1 分别从大于 a_1 与小于 a_1 的方向趋于 a_1，得到

$$r_1=a_1/\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$$

同样　$$r_i=a_1/\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

B3－014　对于 $i=1$，2，…，n，有$|x_i|<1$，又设$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|=19+|x_1+\cdots+x_n|$．那么整数 n 的最小值是多少？

【题说】第六届（1988 年）美国数学邀请赛题 4．

【解】因$|x_i|<1$，$\left|\sum_{i=1}^{n}x_i\right|\geq 0$，故

$$19=\sum_{i=1}^{n}|x_i|-\left|\sum_{i=1}^{n}x_i\right|\leq\sum_{i=1}^{n}|x_i|<n$$

另一方面，令 $x_1=x_2=\cdots=x_{10}=0.95$，$x_{11}=x_{12}=\cdots=x_{20}=-0.95$，则有

$$\sum_{i=1}^{20}|x_i|=19,\quad\left|\sum_{i=1}^{20}x_i\right|=0$$

故 n=20 即为所求最小值．

B3－015　设 m、n 为正整数，证明存在与 m、n 无关的常数 a

>1．使得当$\frac{m}{n}<\sqrt{7}$时，有$7-\frac{m^2}{n^2}\geq\frac{a}{n^2}$，问最大的a值为哪个？

【题说】1989 年瑞典数学奥林匹克题 5．

【解】 $a_{max}=3$

因为 $$m^2\equiv 0，1，2，4\ (\text{mod}7)$$

所以 $$7n^2-m^2\equiv -m^2\equiv 0，6，5，3\ (\text{mod}7)$$

若$7n^2-m^2>0$，则$7n^2-m^2\geq 3$，即$7-\frac{m^2}{n^2}\geq\frac{3}{n^2}$．

又$n=1$，$m=2$时，$7-\frac{m^2}{n^2}=\frac{3}{n^2}$，所以

$$a_{max}=3$$

B3－016 设 x、y、z＞0 且 x+y+z=1．求 1/x+4/y+9/z 的最小值．

【题说】1990 年日本第一轮选拔赛题 10．

【解】
$$1/x+4/y+9/z$$
$$=(x+y+z)(1/x+4/y+9/z)$$
$$\geq\left(\sqrt{x\cdot 1/x}+\sqrt{y\cdot 4/y}+\sqrt{z\cdot 9/z}\right)^2=36$$

当$x=\frac{1}{6}$，$y=\frac{1}{3}$，$z=\frac{1}{2}$时，上式取等号，故所求最小值为36．

B3－017 设 n 为自然数，对任意实数 x、y、z，恒有$(x^2+y^2+z^2)^2\leq n(x^4+y^4+z^4)$成立，求 n 的最小值．【题说】1990 年全国联赛一试题 2（3）．原题为填空题．

【解】
$$(x^2+y^2+z^2)^2$$
$$=x^4+y^4+z^4+2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2$$
$$\leq x^4+y^4+z^4+(x^4+y^4)+(y^4+z^4)+(z^4+x^4)$$
$$=3(x^4+y^4+z^4)$$

当 $x=y=z>0$ 时，原不等式化为 $9x^4\leq 3nx^4$，故 $n\geq 3$．

所以，n 的最小值是 3．

B3－018 满足不等式$0<m^{\frac{1}{3}}-n<10^{-3}$的正整数m，n中，n的最小值是多少？

【题说】1992 年日本数学奥林匹克预选赛题 8．

【解】由已知
$$n^3+1\leq m<(n+10^{-3})^3$$
$$=n^3+3\times 10^{-3}n^2+3\times 10^{-6}n+10^{-9}$$

所以
$$1<3\times 10^{-3}n^2+3\times 10^{-6}n+10^{-9} \qquad (*)$$

由于 $18^2=324<10^3/3=333.33\cdots<19^2=361$，所以 n=19 满足（*）式，因而
$$19^3+1<(19\times 10^{-3})^3$$

若取 $m=19^3+1$，$n=19$，则这对数满足本题所给的不等式．

又当 $n\leq 18$ 时
$$3\times 10^{-3}n^2+3\times 10^{-6}n+10^{-9}$$
$$\leq 3\times 10^{-3}\times 18^2+3\times 10^{-6}\times 18+10^{-9}<1$$

即 $n\le 18$ 时，（*）式不成立．

综上所述，n 的最小值为 19．

B3－019　a、b、c 是一个任意三角形的三边长，证明：

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\le 3abc.$$

【题说】第六届（1964 年）国际数学奥林匹克题 2．本题由匈牙利提供．

【证】不妨设 $a\le b\le c$．

$$\begin{aligned}&3abc-a^2(b+c-a)-b^2(c+a-b)-c^2(a+b-c)\\&=a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\\&\ge b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\\&\ge c(c-b)[(c-a)(b-a)]\\&=c(c-b)^2\ge 0\end{aligned}$$

B3－020　怎样的整数 a，b，c 满足不等式

$$a^2+b^2+c^2+3<ab+3b+2c?$$

【题说】1965 年匈牙利数学奥林匹克题 1．

【解】对于整数 a、b、c，所要解的不等式等价于

$$a^2+b^2+c^2+4\le ab+3b+2c$$

这个不等式可以变成

$$\left(a-\frac{b}{2}\right)+3\left(\frac{b}{2}-1\right)^2+(c-1)^2\le 0$$

由此可知，原不等式只可能有唯一的一组解 a=1，b=2，c=1．

B3－021　有限数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ $(n\ge 3)$ 满足关系式 $a_1=a_n=0$，$a_{k-1}+a_{k+1}\ge 2a_k$ $(k=2,3,\cdots,n-1)$，证明：数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中没有正数．

【题说】1966 年～1967 年波兰数学奥林匹克二试题 1．

【证】设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中，a_r 最大，s 是满足等式 $a_s=a_r$ 的最小下标．若 $n>s>1$，则 a_{s-1}；$<a_s$，$a_{s+1}\le a_s$，从而 $a_{s-1}+a_{s+1}<2a_s$，与已知条件 $a_{s-1}+a_{s+1}\ge 2a_s$ 矛盾．故只有 s=1 或 s=n，于是 $a_r=0$，数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中没有正数，

B3－022　设 a、b、c、d 是正数，证明不等式

$$a+b<c+d \quad (1)$$

$$(a+b)(c+d)<ab+cd \quad (2)$$

$$(a+b)cd<ab(c+d) \quad (3)$$

中至少有一个不正确．

【题说】第三届（1969 年）全苏数学奥林匹克九年级题 1．

【证】假定（1）、（2）、（3）都正确．则

$$\begin{aligned}(a+b)^2(c+d)&<(a+b)(ab+cd)\\&<ab(a+b)+ab(c+d)\\&<2ab(c+d)\end{aligned}$$

从而 $(a+b)^2<2ab$，矛盾．

B3－023　证明：任何正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足不等式

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\frac{a_n}{a_1+a_2}>\frac{n}{4}$$

【题说】第三届（1969 年）全苏数学奥林匹克十年级题 6．

【证】设$a_{i_1}=\max_{1\le i\le n} a_i$在以$a_{i_1}$为分子的分数的分母中，较大的加数记作$a_{i_2}$．一般地，在以$a_{i_{k-1}}$为分子的分数的分母中，较大的加数记作$a_{i_k}$．显然，最终我们可以找到$a_{i_{r+1}}=a_{i_1}$．容易知道$r\ge\frac{n}{2}$．

原不等式左端的和大于

$$
\begin{aligned}
&\frac{a_{i_1}}{2a_{i_2}}+\frac{a_{i_2}}{2a_{i_3}}+\cdots+\frac{a_{i r}}{2a_{i_1}}\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{a_{i_1}}{a_{i_2}}+\frac{a_{i_2}}{a_{i_3}}+\cdots+\frac{a_{i_r}}{a_{i_1}}\right)\\
&\ge\frac{1}{2}r\cdot r\sqrt[r]{\frac{a_{i_1}}{a_{i_2}}\cdot\frac{a_{i_2}}{a_{i_3}}\cdots\frac{a_{i_r}}{a_{i_1}}}=\frac{1}{2}r\ge\frac{n}{4}
\end{aligned}
$$

故原不等式得证．

【注】可以考虑更强的不等式

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\cdots+\frac{a_n}{a_1+a_2}\ge\frac{n}{2}$$

（1954 年美国数学家夏皮罗提出的猜测）对 n≤12 上式成立．对偶数 n≥14 与奇数 n≥27 不成立．

B3－024　证明：对所有满足条件 $x_1>0$，$x_2>0$，$x_1y_1-z_1^2>0$，$x_2y_2-z_2^2>0$的实数x_1，x_2，y_1，y_2，z_1，z_2，有不等式

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}\le\frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}$$

成立，并求出等号成立的充要条件．

【题说】第十一届（1969 年）国际数学奥林匹克题 6．本题由原苏联提供．

【证】　$$x_1y_1z_2^2+x_2y_2z_1^2\ge 2z_1z_2\sqrt{x_1x_2y_1y_2}$$

所以

$$
\begin{aligned}
&(\sqrt{x_1x_2y_1y_2}-z_1z_2)^2=x_1x_2y_1y_2+z_1^2z_2^2-2z_1z_2\sqrt{x_1x_2y_1y_2}\\
&\ge x_1x_2y_1y_2+z_1^2z_2^2-x_1y_1z_2^2-x_2y_2z_1^2=(x_1y_1-z_1^2)(x_2y_2-z_2^2)+\\
&(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2\\
&=(x_1y_1-z_1^2)+(x_2y_2-z_2^2)+(x_1y_2+x_2y_1-2z_1z_2)\\
&\ge(x_1y_1-z_1^2)+(x_2y_2-z_2^2)+2(\sqrt{x_1x_2y_1y_2}-z_1z_2)\\
&\ge(x_1y_1-z_1^2)+(x_2y_2-z_2^2)+2\sqrt{(x_1y_1-z_1^2)(x_2y_2-z_2^2)}\\
&\ge 4\sqrt{(x_1y_1-z_1^2)(x_2y_2-z_2^2)}
\end{aligned}
$$

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}\le\frac{2}{\sqrt{(x_1y_1-z_2^2)(x_2y_2-z_1^2)}}$$

$$\le\frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}$$

当且仅当 $x_1=x_2$，$y_1=y_2$，$z_1=z_2$ 时，等号成立．

B3－025　设 a、b、n 都是自然数，且 a＞1，b＞1，n＞1，A_{n-1} 和 A_n 是 a 进制数系中的数，B_{n-1} 和 B_n 是 b 进制数系中的数．A_{n-1}、A_n、B_{n-1} 和 B_n 呈如下形式：

$A_{n-1}=x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0$，$A_n=x_nx_{n-1}\cdots x_0$（a 进制的位置表示法）；

$B_{n-1}=x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0$，$B_n=x_nx_{n-1}\cdots x_0$（b 进制的位置表示法）．

其中 $x_n\neq 0$，$x_{n-1}\neq 0$．证明：当 a＞b 时，有

$$\frac{A_{n-1}}{A_n}<\frac{B_{n-1}}{B_n}$$

【题说】第十二届（1970 年）国际数学奥林匹克题 2．本题由罗马尼亚提供．

【证】由于 a＞b，故 $A_nB_{n-1}-A_{n-1}B_n=(x_na^{n-1}+A_{n-1})B_{n-1}-(x_nb^{n-1}+B_{n-1})A_{n-1}=x_n[x_{n-1}(a^{n-1}b^{n-2}-a^{n-2}b^{n-1})+\cdots+x_0(a^{n-1}-b^{n-1})]>0$

所以
$$\frac{A_{n-1}}{A_n}<\frac{B_{n-1}}{B_n}$$

B3－026　（n＞2）是自然数，证明下述论断仅对 n=3 和 n=5 成立：对任意实数 a_1，a_2，…，a_n 都有

$$(a_1-a_2)\cdot(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n)$$
$$+(a_2-a_1)\cdot(a_2-a_3)\cdots(a_2-a_n)+\cdots$$
$$+(a_n-a_1)\cdot(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})\ge 0$$

【题说】第十三届（1971 年）国际数学奥林匹克题 1．本题由匈牙利提供．1979 年湖南省赛二试题 4．

【证】不妨设 $a_1\le a_2\le a_3\le\cdots\le a_n$．

若 n 为偶数，令 $a_1<a_2=a_3=\cdots=a_n$，则左边小于 0，因而不等式不成立；

若 n=3，则左边前两项的和为

$$(a_1-a_2)^2\ge 0$$

第三项不小于 0，故不等式成立；

若 n=5，则同样可知左边前两项的和不小于 0，末两项的和也不小于 0，第三项不小于 0，因此左边总不小于 0，不等式成立；

若 n≥7，令

$$a_1=a_2=a_3<a_4<a_5=a_6=\cdots=a_n$$

则左边只有一个非零项

$$(a_4-a_1)(a_4-a_2)\cdots(a_4-a_n)<0$$

故不等式不成立．

B3－027　A=（a_{ij}）是一个元素为非负整数的矩阵，其中 i、j=1，

2，…，n．该矩阵有如下性质：如果某一 $a_{ij}=0$，那么对 i 和 j 有

$$a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}+a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{nj}\geq n$$

证明：这个矩阵所有元素的和不小于 $0.5n^2$．

【题说】第十三届（1971 年）国际数学奥林匹克题 6．本题由瑞典提供．

【证】交换 A 的两行或两列不改变题设的 A 的性质（因为行和与列和均不变、只是交换了位置），因此我们可以先通过交换两行或两列的变换，使得有尽可能大的 k 满足 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{kk}=0$．此时对于 i，j＞k 有 $a_{ij}\neq 0$．对于 i≤k，j＞k，若 $a_{ij}=0$，则 $a_{ji}\neq 0$，因若不然，交换 i，j 行，就会使 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{kk}=a_{jj}=0$，与 k 的极大性矛盾．因而对于 j＞k，仍有

$$a_{j1}+\cdots+a_{jn}+a_{1j}+\cdots+a_{nj}\geq n$$

于是

$$2\sum_{i}\sum_{j}a_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+a_{ji})\geq n^2$$

因而矩阵A的元素和不小于 $\frac{1}{2}n^2$．

B3－028　求出所有能使不等式组

$$(x_1^2-x_3x_5)(x_2^2-x_3x_5)\leq 0$$
$$(x_2^2-x_4x_1)(x_3^2-x_4x_1)\leq 0$$
$$(x_3^2-x_5x_2)(x_4^2-x_5x_2)\leq 0$$
$$(x_4^2-x_1x_3)(x_5^2-x_1x_3)\leq 0$$
$$(x_5^2-x_2x_4)(x_1^2-x_2x_4)\leq 0$$

成立的所有解（x_1，x_2，x_3，x_4，x_5），其中 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 都是正实数．

【题说】第十四届（1972 年）国际数学奥林匹克题 4．本题由荷兰提供．

【解】为方便起见，令 $x_{5+i}=x_i$，则可以把原不等式组简写为

$$(x_i^2-x_{i+2}x_{i+4})(x_{i+1}^2-x_{i+2}x_{i+4})\leq 0\ \ (1\leq i\leq 5)$$

将它们加起来得

$$\sum_{i=1}^{5}(x_i^2-x_{i+2}x_{i+4})(x_{i+1}^2-x_{i+2}x_{i+4})$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5}(x_i^2+x_{i+1}^2)(x_{i+2}-x_{i+4})^2\leq 0$$

由于

$$(x_i^2+x_{i+1}^2)\ (x_{i+2}-x_{i+4})^2\geq 0$$

上式仅当 $(x_i^2+x_{i+1}^2)\ (x_{i+2}-x_{i+4})^2$ 都为0时才成立，从而必有 $x_1=x_3=x_5=x_2=x_4$．反之，如果 x_i 都相等，原不等式组当然成立．

B3－029　证明：对于正数 a、b、c，下述不等式成立：

$$a^3+b^3+c^3+3abc$$
$$\geq ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)\qquad(1)$$

【题说】第九届（1975 年）全苏数学奥林匹克十年级题 2．

【证】不失一般性，可假定 $a \geq b \geq c$．那末

$$c(a-c)(b-c) \geq 0,\quad (a-b)^2(a+b-c) \geq 0$$

从而

$$c^3+abc \geq ac^2+bc^2 \tag{2}$$

$$a^3+b^3+2abc \geq ab(a+b)+a^2c+b^2c \tag{3}$$

（2）、（3）两式相加即得（1）式．

B3－030　已知 a_1，a_2，…，a_n 为任何两两各不相同的正整数，求证对任何正整数 n，下列不等式成立；

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

【题说】第二十届（1978 年）国际数学奥林匹克题 5．本题由法国提供．

【证】由柯西不等式

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2} \geq \left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right]^2 \tag{1}$$

因为 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$，所以由（1）得 $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$．

【别证】利用排序不等式．

B3－031　已知 $0 \leq a_1$，$0 \leq a_2$，$0 \leq a_3$，$a_1+a_2+a_3=1$，$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$．求证：下面不等式成立

$$(a_1\lambda_1+a_2\lambda_2+a_3\lambda_3)\left(\frac{a_1}{\lambda_1}+\frac{a_2}{\lambda_2}+\frac{a_3}{\lambda_3}\right) \leq \frac{(\lambda_1\lambda_3)^2}{4\lambda_1\lambda_3} \tag{1}$$

【题说】1979 年北京市赛二试题 5．本题是康托洛维奇不等式的特例．

【证】对任意正实数 x，

$$\begin{aligned}
(1)\text{式左边} &= \left(\sum\frac{a_i\lambda_i}{x}\right)\left(\sum\frac{a_i}{\lambda_i}x\right) \\
&\leq \frac{1}{4}\left(\sum\frac{a_i\lambda_i}{x}+\sum\frac{a_i}{\lambda_i}x\right)^2 \\
&\leq \frac{1}{4}\left((a_1+a_2+a_3)\left(\frac{\lambda_3}{x}+\frac{x}{\lambda_1}\right)\right)^2 \\
&\leq \frac{1}{4}\left(\frac{\lambda_3}{x}+\frac{x}{\lambda_1}\right)^2
\end{aligned}$$

令 $x=\sqrt{\lambda_1\lambda_3}$，即得（1）．

B3－032　设 a、b、c 为正实数，证明

$$a^a b^b c^c > (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$$

【题说】第三届（1974 年）美国数学奥林匹克题 2．注意：这是一个对称不等式．

【证】不失一般性，可以假定 $a \geq b \geq c > 0$．原不等式即

$$a^{2a-b-c}\cdot b^{2b-a-c}\cdot c^{2c-a-b} \geq 1 \tag{1}$$

由 $2a-b-c>0$，得

$$a^{2a-b-c}\cdot b^{2b-a-c}\geq b^{2a-b-c}\cdot b^{2b-a-c}=b^{a+b-2c}$$

所以，（1）左端$\geq b^{a+b-2c}\cdot c^{2c-a-b}=\left(\frac{b}{c}\right)^{a+b-2c}\geq 1$，其中，当且仅当 $a=b=c$ 时，等号成立．

【别证】可以利用等式

$$\begin{aligned}&a^a b^b c^c-(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}\\&=a^{\frac{a+b+c}{3}}\cdot b^{\frac{2b+2c-a}{3}}\cdot c^c\cdot\\&\left(a^{\frac{2a-b-c}{3}}\cdot b^{\frac{a-b-2c}{3}}\cdot b^{\frac{2a-b-c}{3}}\cdot c^{\frac{a+b-2c}{3}}\right)\end{aligned}$$

然后证明右端括号为正．

B3－033　设 x_i、y_i 是实数（$i=1$，…，n）．

且

$$x_1\geq x_2\geq\cdots\geq x_n$$

$$y_1\geq y_2\geq\cdots\geq y_n$$

z_1、z_2、…、z_n 是 y_1、y_2、…、y_n 的任一个排列，证明

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\leq\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2$$

【题说】第十七届（1975 年）国际数学奥林匹克题 1．本题由捷克斯洛伐克提供．

【证】由排序不等式

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2-\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\\&=2\left(\sum_{i=1}^{n}x_iz_i-\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)\geq 0\end{aligned}$$

所以原式成立．

B3－034　有 n 个数 a_1，a_2，…，a_n．假设

$$b_k=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

$$C=(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2$$

$$D=(a_1-b_n)^2+(a_2-b_n)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2$$

证明：$C\leq D\leq 2C$．

【题说】第十三届（1978 年）全苏数学奥林匹克十年级题 10．

【证】设

$$f(x)=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2$$

则

$$f(x)=n(x-b_n)^2+f(b_n)\qquad(1)$$

现在用归纳法来证明不等式 $C\leq D\leq 2C$．

当 $n=1$ 时，$C=D$，故有 $C\leq D\leq 2C$．

假设当 n 时，不等式成立，往 a_1，a_2，…，a_n 中添一个数 a_{n+1}，此时 C 增加了 $(a_{n+1}-b_{n+1})^2$，而 D 增加了 $(a_{n+1}-b_{n+1})^2+f(b_{n+1})-f(b_n)$．

在（1）式中，令 $x=bn+1$，得

$$0\leq f(b_{n+1})-f(b_n)=n(b_{n+1}-b_n)^2=\frac{1}{n}(a_{n+1}-b_{n+1})^2$$

$$\leq (a_{n+1}-b_{n+1})^2$$

这样，D 增加的值 $(a_{n+1}-b_{n+1})^2+f(b_{n+1})-f(b_n)$ 在 $(a_{n+1}-b_{n+1})^2$ 与 $2(a_{n+1}-b_{n+1})^2$ 之间，从而，对于 n+1 时，也有

$$C\leq D\leq 2C$$

所以，对一切 n，都有

$$C\leq D\leq 2C$$

B3－035　a、b、c、d、e 为整数，满足

$$1\leq a<b<c<d<e$$

证明：

$$\frac{1}{[a,b]}+\frac{1}{[b,c]}+\frac{1}{[c,d]}+\frac{1}{[d,e]}\leq\frac{15}{16}$$

其中[m，n]为 m、n 的最小公倍数．

【题说】第十一届（1979 年）加拿大数学奥林匹克题 3．

【证】更一般地，可以证明：对于 n 个整数 a_1，a_2，…，a_n，满足 $1\leq a_1<a_2<\cdots<a_n$ 时，有

$$\frac{1}{[a_1,a_2]}+\frac{1}{[a_2,a_3]}+\cdots+\frac{1}{[a_{n-1},a_n]}\leq 1-\frac{1}{2^n}\qquad(1)$$

n=2 时，(1) 显然成立．假设 n=k－1 时 (1) 成立，考虑 n=k 的情况：

若 $a_k>2^k$，则

$$\frac{1}{[a_1,a_2]}+\cdots+\frac{1}{[a_{k-2},a_{k-1}]}+\frac{1}{[a_{k-1},a_k]}$$

$$\leq 1-\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{[a_{k-1},a_k]}$$

$$\leq 1-\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^k}=1-\frac{1}{2^k}$$

若 $a_k\leq 2^k$，则

$$\sum=\frac{1}{[a_1,a_2]}+\frac{1}{[a_2,a_3]}+\cdots+\frac{1}{[a_{k-1},a_k]}$$

$$=\frac{(a_1,a_2)}{a_1a_2}+\frac{(a_2,a_3)}{a_2a_3}+\cdots+\frac{(a_{k-1},a_k)}{a_{k-1}a_k}$$

其中 (m，n) 为 m、n 的最大公约数，从而

$$\sum\leq\frac{a_2-a_1}{a_1a_2}+\frac{a_3-a_2}{a_2a_3}+\cdots+\frac{a_k-a_{k-1}}{a_{k-1}a_k}$$

$$=\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}\right)$$

$$=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_k}\leq 1-\frac{1}{2^k}$$

B3－036　S 为正奇数集$\{a_i\}$，i=1，2，…，n．没有两个差$|a_i-a_j|$相等，$1\leq i<j\leq n$．求证

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \frac{1}{3}n(n^2+2)$$

【题说】1979年英国数学奥林匹克题3．

【证】不妨设$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$，r为整数且$2 \leq r \leq n$．对于$1 \leq i, j \leq r$，有$\frac{1}{2}r(r-1)$个相异的差$|a_i - a_j|$，且这些都是偶数，因此

$$a_r - a_1 \geq 2 \cdot \frac{1}{2}r(r-1) = r(r-1)$$

所以，$$a_r \geq a_1 + r(r-1) \geq 1 + r(r-1)$$

r=1时，上式也成立，故

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{i=1}^{n} r(r-1)$$

$$= \frac{1}{3}n(n^2+2)$$

B3－037　对于n为一正整数，以p（n）表示将n表为一个或较多个正整数的和的方法数，例如p（4）=5，因为有5个不同的和，即

1+1+1+1，1+1+2

1+3，2+2，4

证明：当n＞1时，

$$p(n+1) - 2p(n) + p(n-1) \geq 0$$

【题说】1979年英国数学奥林匹克题5．

【证】将n的p（n）个不同的表达式各加上1，得到p（n）个n+1的不同表达式，每一个都包含加数1．而且，n+1的每一个含有加数1的表达式，都可由这方法得到．因此将n+1表为大于1的整数的和的方法数

$$q(n+1) = p(n+1) - p(n)$$

同样将n+1表为大于2的整数的和的方法数即q（n+1）－q（n）．显然

$$q(n+1) - q(n) \geq 0$$

因此

$$p(n+1) - 2p(n) + p(n-1) \geq 0$$

B3－038　若$0 \leq a, b, c \leq 1$，证明：

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1$$

【题说】第九届（1980年）美国数学奥林匹克题5．结论可以推广到n个数的情形．

【证】令

$$\delta = 1 - \left[\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c)\right]$$

$$= \sum_{(a,b,c)} \left[\frac{a}{a+b+c} - \frac{a}{b+c+1} - \frac{a}{a+b+c}(1-a)(1-b)(1-c)\right]$$

$$= \sum_{(a,b,c)} \frac{a(1-a)}{(a+b+c)(a+c+1)} \cdot [1-(1-b)(1-c)(1+b+c)]$$

因为 $(1-b)(1-c)(1+b+c)$

$$\le (1-b)(1-c)(1+b)(1+c)$$
$$=(1-b^2)(1-c^2)\le 1$$

（当 a、b、c 轮换时均成立）因此 $\delta\ge 0$．

B3－039 若 x 为正实数，n 为正整数．证明：

$$[nx]\ge\frac{[x]}{1}+\frac{[2x]}{2}+\frac{[3x]}{3}+\cdots+\frac{[nx]}{n} \qquad (1)$$

其中[t]表示不超过 t 的最大整数．

【题说】第十届（1981 年）美国数学奥林匹克题 5．

【证】用数学归纳法．当 n=1，2 时，（1）显然成立．假设（1）对 $n\le k-1$ 均成立．

记 $x_i=\sum_{j=1}^{i}\frac{[jx]}{j}$，$i=1,\cdots,k$ 则有

$$kx_k=kx_{k-1}+[kx]$$
$$=(k-1)x_{k-1}+x_{k-1}+[kx] \qquad (2)$$
$$(k-1)x_{k-1}=(k-2)x_{k-2}+x_{k-2}+[(k-1)x] \qquad (3)$$

…

$$2x_2=x_1+x_1+[2x] \qquad (k)$$

将（2）至（k）式相加，得

$$kx_k=x_{k-1}+x_{k-2}+\cdots+x_1+x_1+[kx]+[(k-1)x]+\cdots+[2x]$$

因此，由归纳假定，

$$kx_k\le[kx]+2([(k-1)x]+[(k-2)x]+\cdots+[x])$$

但是 $[(k-m)x]+[mx]\le[(k-m)x+mx]$ $(m<k)$，所以

$$kx_k\le[kx]+([(k-1)x)]+[x])+\cdots+([x]+[(k-1)x])$$
$$\le k[kx]$$

即 $x_k\le[kx]$．此即所欲证之（1）式．

B3－040 设 $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$，$n>2$，证明：

$$n(n+1)^a-n<S_n<n-(n-1)n^b$$

其中 a 和 b 满足 $an=1$ 和 $b(n-1)=-1$．

【题说】1982 年英国数学奥林匹克题 3．

【证】

$$n+S_n=(1+1)+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$=2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\cdots+\frac{n+1}{n}$$
$$>n\left(2\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$
$$=n(n+1)^{1/n}$$

$$n-S_n=(1-1)+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n-1}{n}$$

$$>(n-1)\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

$$=(n-1)n^{-1/(n-1)}$$

B3－041　设 a、b、c 是三角形的边长，证明：$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0$，并说明等号何时成立．

【题说】第二十四届（1983 年）国际数学奥林匹克题 6．本题由美国提供．

【证】设 a 是最大边，

原式左边$=a(b-c)^2(b+c-a)+b(a-b)(a-c)(a+b-c)$

显然上式是非负的，从而原式成立，当且仅当 a=b=c，即这三角形为正三角形时等号成立．

B3－042　证明$0\leq yz+zx+xy-2xyz\leq\frac{7}{27}$，这里x、y、z是非负实数，且 x+y+z=1．

【题说】第二十五届（1984 年）国际数学奥林匹克题 1．

【证】显然 x、y、z≤1，所以

$$yz+zx+xy-2xyz\geq yz+zx+xy-yz-zx=xy\geq 0$$

又$(1-2x)(1-2y)(1-2z)=1-2(x+y+z)+4(xy+yz+zx)$

$$-8xyz=-1+4(xy+yz+zx-2xyz)\qquad(1)$$

在 1－2x、1－2y、1－2z 均非负时，

$$(1-2x)(1-2y)(1-2z)\leq\left(\frac{1-2x+1-2y+1-2z}{3}\right)^3$$

$$=\frac{1}{27}\qquad(2)$$

由于 x+y+z=1、1－2x、1－2y、1－2z 中至多有一个小于 0，这时（2）显然成立．

于是，由（1）、（2）

$$xy+yz+zx-2xyz\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{27}+1\right)=\frac{7}{27}$$

B3－043　设 x_1，x_2，…，x_n 都是正整，求证：

$$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}+\frac{x_n^2}{x_1}\geq x_1+x_2+\cdots+x_n$$

【题说】1984 年全国联赛二试题 5．本题可用柯西不等式、数学归纳法等多种方法证明．

【证】$x_1^2/x_2+x_2\geq 2x_1$，$x_2^2/x_3+x_3\geq 2x_2$，…，$x_{n-1}^2/x_n+x_n\geq 2x_{n-1}$，$x_n^2/x_1+x_1\geq 2x_n$

将以上各式相加，即得所要证的不等式．

B3－044　设 P（x）$=a_0+a_1x+\cdots+a_kx^k$ 为整系数多项式，其中奇系数的个数由 W（P）来表示，设 Q_i（x）=（1+x）^{i}，i=0，1，…，n．如果 i_1，i_2，…，i_n 是整数，且 $0\le i_1<i_2<\cdots<i_n$，证明：

$W(Q_{i_1}+Q_{i_2}+\cdots+Q_{i_n})\ge W(Q_{i_1})$．

【题说】第二十六届（1985 年）国际数学奥林匹克题 3．本题由荷兰提供．

【证】易知 $(1+x)^{2^m}\equiv 1+x^{2^m}\pmod{2}$．

当 $i_n=1$ 时，命题显然成立．

设 $i_n>1$ 并且命题在 i_n 换为较小的数时成立．令 $k=2^m<i_n<2^{m+1}$，以 Q 表示 $Q_{i_1}+Q_{i_2}+\cdots+Q_{i_n}$，这时有两种情况：

（1）$i_1<k$．设 $i_r<k$，$i_{r+1}>k$，$Q=R+(1+x)^kS$，其中 $R=Q_{i_1}+Q_{i_2}+\cdots+Q_{i_r}$，$S=(1+x)^{-k}(Q_{i_{r+1}}+\cdots+Q_{i_n})$．R 和 S 的次数均小于 K，由（1）$(1+x)^k\equiv 1+x^k\pmod{2}$，故

$$\begin{aligned}W(Q)&=W(R+S+x^kS)\\&=W(R+S)+W(S)\\&\ge W(R)\\&\ge W(Q_{i_1})\end{aligned}$$

（2）$i_1\ge k$．令 $Q_{i_1}=(1+x)^kR$，$Q=(1+x)^kS$．则 R 和 S 的次数均小于 K．

$$\begin{aligned}W(Q)&=W(S+x^kS)\\&=2W(S)\\&\ge 2W(R)\\&=W(R+x^kR)=W((1+x^k)R)\\&=W(Q_{i_1})\end{aligned}$$

B3－045　证明：对于任意的正数 a_1，a_2，…，a_n 不等式

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_1+a_2}+\cdots+\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}<4\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$$

成立．

【题说】第二十届（1986 年）全苏数学奥林匹克十年级题 2．

【证】不妨设 $a_1\le a_2\le\cdots\le a_n$．

因为

$$\frac{2}{a_1+a_2}\le\frac{2}{a_1+a_1}=\frac{1}{a_1}$$

当 $2\le k\le(n+1)/2$ 时

$$\frac{2k-1}{a_1+a_2+\cdots a_{2k-1}}<\frac{2k}{a_k+\cdots+a_{2k-1}}\le\frac{2k}{ka_{k-1}}=\frac{2}{a_{k-1}}$$

由此得 $$\frac{2k}{a_1+a_2+\cdots+a_{2k-1}}\le\frac{2k}{a_{k+1}+\cdots+a_{2k}}\le\frac{2}{a_k}$$

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_1+a_2}+\cdots+\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$$
$$<\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\frac{2}{a_2}+\frac{2}{a_3}+\frac{2}{a_3}+\cdots$$
$$<4\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$$

【注】原不等式可加强为

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_1+a_2}+\cdots+\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$$
$$<2\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$$

B3－046　正数 a，b，c，A，B，C 满足条件

$$a+A=b+B=c+C=k$$

证明：
$$aB+bC+cA<k^2$$

【题说】第二十一届（1987 年）全苏数学奥林匹克八年级题 5．

【证】由题设

$k^3=(a+A)(b+B)(c+C)$

$=abc+ABC+aB(c+C)+bC(a+A)+cA(b+B)$

$=abc+ABC+k(aB+bC+cA)$

$>k(aB+bC+cA)$

即
$$aB+bC+cA<k^2$$

B3－047 n个实数x_1，x_2，…，x_n满足$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$，求证：对任意整数 $k\ge2$，存在 n 个不全为零的整数 a_i，$|a_i|\le k-1$，i=1，2，…，n．使

$$|a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n|\le(k-1)\sqrt{n}/(k^n-1)$$

【题说】第二十八届（1987 年）国际数学奥林匹克题 3．本题由原联邦德国提供．

【证】 不妨设 $x_i\ge0$（i=1，2，…，n），否则用$-x_i$ 代替 x_i．

由柯西不等式，

$$x_1+x_2+\cdots+x_n\le\sqrt{n}\cdot\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}=\sqrt{n}$$

所以，对一切 $a_i=0$，1，…，$k-1$（i=1，2，…，n），均有

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\le(k-1)(x_1+x_2+\cdots+x_n)\le(k-1)\sqrt{n}$$

即这k^n个$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$均在区间$[0,(k-1)\sqrt{n}]$中．

将区间$[0,(k-1)\sqrt{n}]$分成k^n-1等份，每份长为$\dfrac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}$．由抽屉原理，上述 k^n 个数中必有两个不同的，设为

$$a'_1x_1+a'_2x_2+\cdots+a'_nx_n，a''_1x_1+a''_2x_2+\cdots+a''_nx_n$$

落入同一份里．令

$$a_i=a'_i-a''_i\ (i=1,2,\cdots,n)$$

则 a_i 为整数，不全为 0，$|a_i|\le k-1$（i=1，2，…，n），并且

$$|a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n|\le\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}$$

B3－048　证明：对于任意的正整数 n，不等式

$$(2n+1)^n\ge(2n)^n+(2n-1)^n$$

成立．

【题说】第二十一届（1987 年）全苏数学奥林匹克十年级题 8．

【证】只须证明

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\ge1+\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n \quad (1)$$

由恒等式

$$(1\pm x)^n=1\pm nx+C_n^2x^2\pm C_n^3x^3+\cdots$$

得
$$(1+x)^n-(1-x)^n-2nx=2C_n^3x^2+2C_n^5x^5+\cdots \quad (2)$$

在（2）式中令 $x=\frac{1}{2n}$，即得

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n-\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n-1\ge0$$

所以（1）式成立．

B3－049　已知 a、b 为正实数，且 1/a+1/b=1．试证：对每一个 n∈N，有 $(a+b)^n-a^n-b^n\ge2^{2n}-2^{n+1}$

【题说】1988 年全国联赛一试题 5．

【证】用数学归纳法证．

（1）当 n=1 时，左边=0=右边，命题成立．

（2）假设 n=k 时，不等式成立，即

$$(a+b)^k-a^k-b^k\ge2^{2k}-2^{k+1}$$

当 n=k+1 时，

左边 $=(a+b)^{k+1}-a^{k+1}-b^{k+1}$

$=(a+b)[(a+b)^k-a^k-b^k]+a^kb+ab^k$

由于 $1/a+1/b=1$，所以 $ab=a+b=(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge4$．

从而有

$$a^kb+ab^k\ge2\sqrt{a^kbab^k}=2(ab)^{\frac{k+1}{2}}$$
$$\ge2\cdot2^{k+1}=2^{k+2}$$

所以，左边 $\ge4(2^{2k}-2^{k+1})+2^{k+2}=2^{2(k+1)}-2^{k+2}=$ 右边

由（1）及（2），对一切 n∈N，不等式成立．

B3-050　已知 $a^5-a^3+a=2$．证明：$3<a^6<4$．

【题说】第十四届（1988 年）全俄数学奥林匹克八年级题 3．

【证】由 $a^5-a^3+a=2$，变形为 (1)

$$a[(a^2-1)^2+a^2]=2 \quad (2)$$

由（2）知　$a>0$ 且 $a\ne1$

（1）÷a 得　$a^4-a^2+1=2/a$ (3)

（1）×a 得　　　　　　$a^6-a^4+a^2=2a$　　　　　　（4）

（3）+（4）得　　　　　$a^6+1=2(a+1/a)>4$　　　　　（5）

又由（1）知　　　　　　$2=(a^5+a)-a^3>2a^3-a^3=a^3$

故　　　　　　　　　　$a^3<2$　　　　　　　　　　　（6）

由（5）和（6）得 $3<a^6<4$．

B3-051　已知 a、b、c、d 是任意正数，求证：

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geq 2$$

【题说】1989 年四川省赛二试题 1．

【证】$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}$

$$=\frac{a(d+a)+c(b+c)}{(b+c)(d+a)}+\frac{b(a+b)+d(c+d)}{(c+d)(a+b)} \qquad (1)$$

由平均值不等式，

$$\frac{(a+b+c+d)^2}{4}\geq(b+c)(d+a)$$

即
$$\frac{1}{(b+c)(d+a)}\geq\frac{4}{(a+b+c+d)^2}$$

同理
$$\frac{1}{(c+d)(a+b)}\geq\frac{4}{(a+b+c+d)^2}$$

所以（1）式右边≥$\frac{4(a^2+b^2+c^2+d^2+ad+bc+ab+cd)}{(a+b+c+d)^2}$

$$=2\cdot\frac{(a+b+c+d)^2+(a-c)^2+(b-d)^2}{(a+b+c+d)^2}\geq 2$$

【别证】$\sum a(b+c)\cdot\sum\frac{a}{b+c}\geq(\sum a)^2$

（2）

$2\sum a(b+c)=2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2Zcd+2(ca+bd)$

$\leq 2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd+2a^2+c^2+b^2+d^2$

$=(a+b+c+d)^2$　　　　　　　　　　　　　　　　（3）

（2）÷（3）即得结论．

B3-052　已知 $x_i\in R$（i=1，2，…，n，n≥2），满足

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|=1,\quad \sum_{i=1}^{n}x_i=0$$

求证：
$$\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}\right|\leq\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$$

【题说】1989 年全国联赛二试题 2．

【证】设$\sum_{i=1}^{n}x_i=A+B$，$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}=a+b$，其中A、a为正项之和，B、b为负项之和．由$A+B=0$，$A-B=1$，得$A=-B=\frac{1}{2}$．

因为　　　　　　　　$A/n\leq a\leq A$，$B\leq b\leq B/n$

所以 $$B+\frac{A}{n}\leq a+b\leq A+\frac{B}{n}$$

即 $$-(\frac{1}{2}-\frac{1}{2N})\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{x}{i}\leq\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$$

B3-053　已知 a_1，a_2，…，a_n 是 n 个正数，满足 $a_1\cdot a_2\cdots a_n=1$，求证

$$(2+a_1)(2+a_2)\cdots(2+a_n)\geq 3^n$$

【题说】1989 年全国联赛一试题 3．

【证】左边 $=(1+1+a_1)(1+1+a_2)\cdots(1+1+a_n)$

$$\geq(3\sqrt[3]{a_1})(3\sqrt[3]{a_2})\cdots(3\sqrt[3]{a_n})=3^n$$

B3-054　对于任何实数 x_1，x_2，x_3，如果 $x_1+x_2+x_3=0$，那么 $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\leq 0$，请证明之．

又对于什么样的 n（$n\geq 4$），如果 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$，那么 $x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n+x_nx_1\leq 0$？

【题说】1989 年瑞典数学奥林匹克题 3．

【证】如果 $x_1+x_2+x_3=0$，则有

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{(x_1+x_2+x_3)^2-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}{2}$$

$$=-\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{2}\leq 0$$

当 n=4 时，若 $x_1+x_2+x_3+x_4=0$，则

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1=(x_1+x_3)(x_2+x_4)$$

$$\leq(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{2})^2=0$$

即 n=4 时，命题成立．

当 $n\geq 5$ 时，

令 $x_1=x_2=1$，$x_4=-2$，$x_3=x_5=x_6=\cdots=x_n=0$，则

$$x_1+x_2+x_3+x_4+\cdots+x_n=0$$

而 $$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+\cdots+x_{n-1}x_n+x_nx_1=l>0$$

所以 $n\geq 5$ 时，命题不成立．

B3-055　证明：对于任意的 x、y、z∈（0，1），不等式 $x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)<1$ 成立．

【题说】第十五届（1989 年）全俄数学奥林匹克九年级题 6．

【证】设 $f(x)=(1-y-z)x+y(1-z)+z$，它是 x 的一次函数，因此关于 x 是单调的．因为

$$f(0)=y-yz+z=(y-1)(1-z)+1<1$$

$$f(1)=1-yz<1$$

所以当 x∈（0，1）时，f（x）的最大值小于 1，即

$$x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)<1$$

B3-056　证明：若 a、b、c 为三角形三边的长，且 a+b+c=1，则

$$a^2+b^2+c^2+4abc<\frac{1}{2}$$

【题说】第二十三届（1989年）全苏数学奥林匹克九年级题2．1990年意大利数学奥林匹克题4．

【证】$0<(\frac{1}{2}-a)(\frac{1}{2}-b)(\frac{1}{2}-c)$

$$=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}(a+b+c)+\frac{1}{2}(ab+bc+ca)-abc$$

$$=-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}(1-a^2-b^2-c^2)-abc$$

$$=\frac{1}{4}(\frac{1}{2}-a^2-b^2-c^2-4abc)$$

所以

$$a^2+b^2+c^2+4abc<\frac{1}{2}$$

B3-057　已知二次函数 f（x）=ax²+bx+c，当-1≤x≤1时，有-1≤f（x）≤1

求证：当-2≤x≤2时，有-7≤f（x）≤7．

【题说】1990年南昌市赛二试题1

【证】由已知　$-1\le f(1)=a+b+c\le 1$　(1)

$-1\le f(0)=c\le 1$　(2)

$-1\le f(-1)=a-b+c\le 1$　(3)

（1）+（3）得　$-1\le a+c\le 1$　(4)

由（4）、（2）得　$-2\le a\le 2$

从而　$|4a\pm 2b+c|=|2(a\pm b+c)+2a-c|$

$\le 2|a\pm b+c|+2|a|+|c|\le 7$

即　$|f(\pm 2)|\le 7$

而　$f(x)=a(x+\frac{b}{2a})^2+c-\frac{b^2}{4a}$

（1）若$|-\frac{b}{2a}|>2$，则f（x）在[-2，2]上单调，这时，

$$|f(x)|\le 7$$

（2）若$|-\frac{b}{2a}|\le 2$，则

$$\left|f(-\frac{b}{2a})\right|=\left|c-\frac{b^2}{4a}\right|$$

$$\le|c|+\left|\frac{b}{2a}\right|\cdot\left|\frac{b}{2}\right|\le|c|+2\left|\frac{b}{2}\right|\le 2$$

所以，当|x|≤2时

$$|f(x)|\le\max(|f(2)|,|f(-2)|,|f(-\frac{b}{2a})|)\le 7$$

B3-058　证明：对于和为1的正数a_1，a_2，…，a_n，不等式

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+a_n}+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geq\frac{1}{2}$$

成立．

【题说】第二十四届（1990 年）全苏数学奥林匹克十年级题 2．

【证】因$\left(\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\right)-\left(\frac{a_2^2}{a_1+a_2}+\cdots+\frac{a_1^2}{a_n+a_1}\right)$

$$=\frac{a_1^2-a_2^2}{a_1+a_2}+\cdots+\frac{a_n^2-a_1^2}{a_n+a_1}$$

$$=(a_1-a_2)+\cdots+(a_n-a_1)=0$$

所以 $$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}=\frac{1}{2}\left(\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1+a_2}+\cdots+\frac{a_n^2+a_1^2}{a_n+a_1}\right)$$

$$\geq\frac{1}{4}[(a_1+a_2)+\cdots+(a_n+a_1)]$$

$$=\frac{1}{2}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\frac{1}{2}$$

当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=$时，上式取等号．

B3-059　设 a、b、c、d 是满足

$$ab+bc+cd+da=1$$

的非负数．试证：

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{d^3}{a+b+c}\geq\frac{1}{3}$$

【题说】第三十一届（1990 年）IMO 预选题 88．本题由泰国提供．

【证】设

$$s_3=\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{d^3}{a+b+c}$$

$$=\sum\frac{a^3}{b+c+d}$$

则由柯西不等式

$$s_3\cdot\sum a(b+c+d)^2\geq(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

熟知

$$2\sum a(b+c+d)\leq(3a^2+b^2+c^3+d^2)=6\sum a^2$$

所以

$$s_3\geq\frac{(a^2+b^2+c^2+d^2)^2}{3\sum a^2}=\frac{1}{3}\sum a^2$$

$$\geq\frac{1}{3}(ab+bc+cd+da)=\frac{1}{3}$$

B3-060　设 $a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_7\leq a_8$ 是 8 个给定的实数，且

$$x=(a_1+a_2+\cdots+a_7+a_8)/8$$

$$y=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_7^2+a_8^2)/8$$

试证： $a_8-a_1\leq4\sqrt{y-x^2}$

【题说】1991 年中国国家教委数学试验班招生数学题 3.

【证】

$$16(y-x^2)-(a_8-a_1)^2$$

$$=2(a_1^2+\cdots+a_8^2)-\frac{1}{4}(a_1+\cdots+a_8)^2-(a_8-a_1)^2$$

$$=2(a_2^2+\cdots+a_7^2)-\frac{1}{4}(a_1+\cdots+a_8)^2-(a_8-a_1)^2$$

$$=\frac{1}{4}[8(a_2^2+\cdots+a_7^2)-(a_1+\cdots+a_8)^2+4(a_8+a_1)^2]$$

$$=\frac{1}{4}[8(a_2^2+\cdots+a_7^2)+3(a_1+a_8)^2-2(a_1+a_8)(a_2+\cdots+a_7)-(a_2+\cdots+a_7)^2]$$

$$\geq\frac{1}{4}[3(a_1+a_8)^2+8\cdot\frac{(a_2+\cdots+a_7)^2}{6}-(a_2+\cdots+a_7)^2-2(a_1+a_8)(a_2+\cdots+a_7)]$$

$$=\frac{1}{4}[\sqrt{3}(a_1+a_8)-(a_2+\cdots+a_7)/\sqrt{3}]^2$$

$$\geq 0$$

并且由柯西不等式，$y\geq x^2$，所以

$$4\sqrt{y-x^2}\geq a_8-a_1$$

B3-061　已知 $0<a<1$，$x^2+y=0$，求证

$$\log_a(a^x+a^y)\leq\log_a 2+\frac{1}{8}$$

【题说】1991 年全国联赛一试题 5.

【证】 $a^x+a^y\geq 2\sqrt{a^x\cdot a^y}=2a^{(x+y)/2}$

$$\log_a(a^x+a^y)\leq\log_a(2a^{(x+y)/2})$$

$$=\log_a 2+\frac{1}{2}(x+y)$$

$$=\log_a 2+\frac{1}{2}(x-x^2)$$

$$=\log_a 2+\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{8}$$

$$\leq\log_a 2+\frac{1}{8}$$

B3-062　设 a_1，a_2，…，a_n，b_1，b_2，…，b_n 都是正实数，且 $\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}b_k$，证明：$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{a_k+b_k}\geq\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}a_k$.

【题说】1991 年亚太地区数学奥林匹克题 3.

【证】$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{a_k+b_k}\geq(\sum_{k=1}^{n}a_k)^2$

所以
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{a_k+b_k}\geq(\sum_{k=1}^{n}a_k)^2/\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}a_k$$

B3-063 已知 a_1，a_2，…，$a_n>1$（$n\geq2$），且 $|a_{k+1}-a_k|<1$，$k=1$，2，…，n-1．证明：

$$a_1/a_2+a_2/a_3+\cdots+a_{n-1}/a_n+a_n/a_1<2_{n-1}$$

【题说】第十七届（1991 年）全俄数学奥林匹克九年级题 8．

【证】若 $a_k\leq a_{k+1}$（k=1，2，…，n-1），则 $a_k/a_{k+1}\leq1$，故

$$a_1/a_2+a_2/a_3+\cdots+a_{n-1}/a_n+a_n/a_1<(n-1)+na_1/a_1$$
$$=2n-1\ (n\geq2)$$

若有 $a_k>a_{k+1}$，则由 $|a_{k+1}-a_k|<1$ 知

$$a_k/a_{k+1}<1+1/a_{k+1}<2$$

设有 p 个 k 值使 $a_k\leq a_{k+1}$，（n-1-p）个 k 值使 $a_k>a_{k+1}$，则

$$a_1/a_2+a_2/a_3+\cdots+a_{n-1}/a_n\leq p+2(n-1-p)$$

同时

$$a_n/a_1=[(a_n-a_{n-1})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1]/a_1<p+1$$

因此

$$a_1/a_2+a_2/a_3+\cdots+a_{n-1}/a_n+a_n/a_1<p+2(n-1-p)+p+1$$
$$=2n-1$$

B3-064 令

$$a=\frac{m^{m+1}+n^{n+1}}{m^m+n^n}\qquad(1)$$

其中 m，n∈N，证明 $a^m+a^n\geq m^m+n^n$

【题说】第二十届（1991 年）美国数学奥林匹克题 4．

【证】不妨设 m≥n，则

$$a\leq\frac{m^{m+1}+m\cdot n^n}{m^m+n^n}=m$$
$$a\geq\frac{n\cdot m^m+n^{n+1}}{m^m+n^n}=n$$

故 n≤a≤m，而有

$$m^m-a^m=(m-a)(m^{m-1}+m^{m-2}a+\cdots+a^{m-1})$$
$$\leq(m-a)(m^{m-1}+m^{m-1}+\cdots+a^{m-1})$$
$$=(m-a)m^m\qquad(2)$$
$$a^n-n^n=(a-n)(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+n^{n-1})$$
$$\geq(a-n)n^n$$

由（1）有 $(m-a)m^m=(a-n)n^n$ （3）

将（2）、（3）代入，即得

$$a^n-n^n\geq m^m-a^m\text{ 或 }a^m+a^n\geq m^m+n^n$$

此即所求证之式．

B3-065　设 a、b、c 是非负数，证明：

$$(a+b+c)^2/3\geq a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}$$

【题说】第二十五届（1991 年）全苏数学奥林匹克十年级题 1．

【证】$(a+b+c)^2$

$=(a^2+bc)+(b^2+ca)+(c^2+ab)$

$+\frac{1}{2}(ab+ca)+\frac{1}{2}(bc+ab)+\frac{1}{2}(ca+bc)$

$\geq 2a\sqrt{bc}+2b\sqrt{ca}+2c\sqrt{ab}+(a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab})$

$=3(a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab})$

所以原不等式成立．

B3-066　设 $a_i\geq 0$（i=1，2，…，n），$a=\min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，试证

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1+a_i}{1+a_{i+1}}\leq n+\frac{1}{(1+a)^2}\sum_{i=1}^{n}(a_i-a)^2$$

式中 $a_{n+1}=a_1$．

【题说】1992 年第七届数学冬令营题 2．

【证】$\sum_{i=1}^{n}\frac{1+a_i}{1+a_{i+1}}-n$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1+a_i}{1+a_{i+1}}-1\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i-a_{i+1}}{1+a_{i+1}}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i-a}{1+a_{i+1}}-\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{i+1}-a}{1+a_{i+1}}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i-a}{1+a_{i+1}}-\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i-a}{1+a_i}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{(a_i-a)(a_i-a_{i+1})}{(1+a_{i+1})(1+a_i)}$$

$$\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{(a_i-a)^2}{(1+a_{i+1})(1+a_i)}$$

$$\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{(a_i-a)^2}{(1+a)^2}$$

B3-067　设 n（≥2）是整数，证明

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n}{n-k}\cdot\frac{1}{2^{k-1}}<4$$

【题说】1992 年日本数学奥林匹克题 3．

【证】记$a_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n}{n-k}\cdot\frac{1}{2^{k-1}}$，则

$$
\begin{aligned}
a_{n+1}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1}{n+1-k}\cdot\frac{1}{2^{k-1}}\\
&=\frac{n+1}{n}+\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{1}{2}+\cdots+\frac{n+1}{2^{n-1}}\\
&=\frac{n+1}{n}+\frac{1}{2}\left(\frac{n}{n-1}+\cdots+\frac{n}{2^{n-2}}\right)+\frac{1}{2n}\left(\frac{n}{n-1}+\cdots+\frac{n}{2^{n-2}}\right)\\
&=\frac{n+1}{n}+\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2n}a_n
\end{aligned}
$$

即 $a_{n+1}=\frac{n+1}{2n}a_n+\frac{n+1}{n}$.

下面用归纳法证明：$a_n\leq\frac{10}{3}$.

易知$a_2=2$，$a_3=3$，$a_4=\frac{10}{3}$，假定$a_n\leq\frac{10}{3}(n\geq5)$，则

$$
\begin{aligned}
a_{n+1}&=\frac{n+1}{2n}a_n+\frac{n+1}{n}\\
&\leq\frac{n+1}{2n}\times\frac{10}{3}+\frac{n+1}{n}\\
&=\frac{8(n+1)}{3n}\leq\frac{8}{3}\times\frac{6}{5}<\frac{10}{3}
\end{aligned}
$$

故对正整数n（≥2），有$a_n\leq\frac{10}{3}<4$.

B3-068　n是正整数，证明

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n-1}>n(\sqrt[n]{2}-1)$$

【题说】1992年澳大利亚数学奥林匹克题8.

【证】因为

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\\
&=\frac{n+1}{n}+\frac{n+2}{n+1}+\cdots+\frac{2n}{2n-1}\\
&>n\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+1}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}}=n\sqrt[n]{2}
\end{aligned}
$$

所以 $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n-1}>n(\sqrt[n]{2}-1)$.

B3-069　对x、y、z≥0，证明不等式

$$x(x-z)^2+y(y-z)^2\geq(x-z)(y-z)(x+y-z)$$

等号何时成立？

【题说】第二十四届（1992年）加拿大数学奥林匹克题2.

【解】原不等式即

$$x^3+y^3+z^3+3xyz\geq x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2$$

由对称性，可设 $x\geq z\geq y$，于是

$$x(x-z)^2+y(y-z)^2\geq 0\geq (x-z)(y-z)(x+y+z)$$

B3-070　设实数 x、y、z 满足条件 $yz+zx+xy=-1$，求 $x^2+5y^2+8z^2$ 的最小值和最大值．

【题说】1992 年英国数学奥林匹克题 4．

【解】由于

$$(y-2z)^2+(x+2y+2z)^2\geq 0$$

所以

$$x^2+5y^2+8z^2\geq -4(xy+yz+zx)$$
$$=4$$

又当 $x=\frac{3}{2},y=-\frac{1}{2},z=-\frac{1}{4}$ 时，$x^2+5y^2+8z^2=4$，所以，$x^2+5y^2+8z^2$ 的最小值为 4．

另一方面，令 $z=0$，$x=-\frac{1}{y}$，则

$$x^2+5y^2+8z^2>x^2$$

当 $y\to 0$ 时，函数 $x^2+5y^2+8z^2$ 的值可趋于无穷大．

B3-071　设 A 是一个有 n 个元素的集合，A 的 m 个子集 A_1，A_2，…，A_n 两两互不包含，证明：

(1) $\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{C_n^{a}i}\leq 1$；

(2) $\sum_{i=1}^{m}C_n^{a}i\geq m^2$．

其中 a_i 为 A_i 中元素个数．

【题说】1993 年全国联赛二试题 2．

【证】A 中元素的全排列共 n！个．其中开头 a_i 个元素取自 A_i 中的，有

$$a_i!\ (n-a_i)!$$

个．由于 A_i 与 A_j（$i\neq j$）互不包含，故这些排列与开头 a_j 个元素取自 A_j 中的不同．

因此 $\sum_{i=1}^{m}a_i!\ (n-ai)!\leq n!$ 即（1）成立．

由柯西不等式，

$$\left(\sum_{i=1}^{m}C_n^{a}i\right)\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{C_n^{a}i}\right)\geq\left(\sum_{i=1}^{m}\sqrt{C_n^{a}i\cdot\frac{1}{C_n^{a}i}}\right)^2=m^2$$

结合（1）便得（2）．

B3-072　设 x_1，x_2，…，x_n 与 y_1，y_2，…，y_n 均是实数，且 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$，$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=1$．证明：存在不全为零的，取值于 $\{-1,0,1\}$ 上的数。a_1，a_2，…，a_n，使得

$$|a_1x_1y_1+a_2x_2y_2+\cdots+a_nx_ny_n|\leq\frac{1}{2^n-1}$$

【题说】1993 年第十六届哈尔滨市赛二试题 2．

【证】由柯西不等式，得

$$(|x_1|\cdot|y_1|+\cdots+|x_n|\cdot|y_n|)^2$$
$$\le(|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2)(|y_1|^2+\cdots+|y_n|^2)=1$$

故$|x_1y_1|+\cdots+|x_ny_n|\le1$

当 b_1，b_2，…，$b_n\in\{0,1\}$ 时，显然

$$0\le b_1|x_1y_1|+\cdots+b_n|x_ny_n|\le1$$

将区间[0，1]等分成2^n-1个小区间，每个小区间长度为$\frac{1}{2^n-1}$．令每个 b_i 取 0 与 1，得 2^n 个数 $b_1|x_1y_1|+\cdots+b_n|x_ny_n|$，均落在区间[0，1]中．由抽屉原理，必有两个数落在同一个小区间中，设这两个数分别为

$$b'_1|x_1y_1|+\cdots+b'_n|x_ny_n|$$

与
$$b''_1|x_1y_1|+\cdots+b''_n|x_ny_n|$$

这里$|b'_i-b''_i|$不全为 0，则有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(b'_i-b''_i)|x_iy_i|\right|\le\frac{1}{2^n-1}\qquad(1)$$

取

$$a_i=\begin{cases}b'_i-b''_i(\text{当}x_iy_i\ge0)\\ b''_i-b'_i(\text{当}x_iy_i<0)\end{cases}$$

则 $a_i\in\{-1,0,1\}$，a_i 不全为 0，且由（1）式得

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ix_iy_i\right|\le\frac{1}{2^n-1}$$

B3-073　设函数 $f:R^+\to R^+$满足条件：对任意 x、$y\in R^+$，$f(xy)\le f(x)f(y)$．

试证：对任总 x＞0，n∈N，有

$$f(x^n)\le f(x)f(x^2)^{\frac{1}{2}}\cdots f(x^n)^{1/n}\qquad(1)$$

【题说】1993 年中国数学奥林匹克（第八届数学冬令营）题 6．

【证】$f(x^2)\le f^2(x)$，所以 $f(x^2)\le f(x)f^{1/2}(x^2)$．假设有

$$f^{\frac{1}{k}}(x^k)f^{\frac{1}{k-1}}(x^{k-1})\cdots f^{\frac{1}{2}}(x^2)f(x)\ge f(x^k)\quad(k<n)$$

则

$$f^{\frac{n}{n-1}}(x^{n-1})f^{\frac{n}{n-2}}(x^{n-2})\cdots f^{\frac{n}{1}}(x)$$
$$=f(x^{n-1})f^{\frac{1}{n-1}}(x^{n-1})f^{\frac{n}{n-2}}(x^{n-2})\cdots f^n(x)$$
$$\ge f^2(x^{n-1})f^{\frac{n-1}{n-2}}(x^{n-2})\cdots f^{n-1}(x)$$
$$\ge\cdots$$
$$\ge f^2(x^{n-1})f^2(x^{n-2})\cdots f^2(x)$$
$$=(f(x^{n-1})f(x))(f(x^{n-2})f(x^2))\cdots(f(x)f(x^{n-1}))$$

$\geq f^{n-1}(x^n)$

两边开n次方然后乘以$f^{\frac{1}{n}}(x^n)$即得（1）.

所以（1）对所有的自然数 n 成立.

B3-074 设a_0，a_1，a_2，…是一个正实数序列，满足$a_{i-1}a_{i+1}\leq a_i^2$（i=1，2，…，），证明：对一切 n>1，有

$$\frac{a_0+a_1+\cdots+a_n}{n+1}\cdot\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}$$
$$\geq\frac{a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}}{n}\cdot\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

【题说】第二十二届（1993 年）美国数学奥林匹克题 5.

【证】由题给条件，有

$$\frac{a_0}{a_1}\leq\frac{a_1}{a_2}\leq\cdots\leq\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}\leq\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

于是　$a_0a_n\leq a_1a_{n-1}\leq a_2a_{n-2}\leq\cdots$　　（1）

令 $S=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$，将要证的不等式化为

$$n^2(S+a_0+a_n)S\geq(n^2-1)(S+a_0)(S+a_n)$$

去掉两边相同的项，上式等价于

$$(S+a_0)(S+a_n)\geq n^2a_0a_n \qquad (2)$$

为了证明（2），利用算术几何平均值不等式并结合（1），有

$$S=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k+a_{n-k}}{2}\geq\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{a_ka_{n-k}}\geq(n-1)\sqrt{a_0a_n}$$

再由$a_0+a_n>2\sqrt{a_0a_n}$，有

$$(S+a_0)(S+a_n)=S^2+a_0a_n+(a_0+a_n)S$$
$$\geq S^2+a_0a_n+2\sqrt{a_0a_n}S=(S+\sqrt{a_0a_n})^2$$
$$\geq n^2a_0a_n$$

B3-075　设 a、b、c、d 都是正实数，求证不等式

$$\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c}\geq\frac{2}{3}.$$

【题说】第三十四届（1993 年）IMO 预选题本题由美国提供.

【证】由柯西不等式

$$\sum a(b+2c+3d)\cdot\sum\frac{a}{b+2c+3d}\geq\left(\sum a\right)^2$$

即

$$\sum\frac{a}{b+2c+3d}\geq\frac{\left(\sum a\right)^2}{4(ab+ac+ad+bc+bd+cd)} \qquad (1)$$

又　$(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2\geq0$

故$ab+ac+ad+bc+bd+cd\leq\frac{3}{8}(a+b+c+d)^2$　　（2）

结合（1）、（2）即得结论.

B3-076　设 a_1，a_2，…，a_n 为 n 个非负实数，且 $a_1+a_2+\cdots a_n=n$．证

明：

$$\frac{a_1^2}{1+a_1^4}+\frac{a_2^2}{1+a_2^4}+\cdots+\frac{a_n^2}{1+a_n^2}$$

$$\leq\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\cdots+\frac{1}{1+a_n} \qquad (1)$$

【题说】1994 年合肥市赛题 4.

【证】由于对任何a都有$2a^2\leq 1+a^4$，故知（1）式左边$\leq\frac{n}{2}$．另一方面由柯西不等式知

$$(1)\text{式右边}\geq\frac{n^2}{(1+a_1)+(1+a_2)+\cdots+(1+a_n)}$$

$$=\frac{n^2}{2n}=\frac{n}{2}$$

B3-077　已知

$$f(z)=c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_n \qquad (1)$$

是 z 的 n 次复系数多项式．求证：存在一个复数 z_0，$|z_0|=1$，使

$$|f(z_0)|\geq|c_0|+|c_n| \qquad (2)$$

【题说】1994 年中国数学奥林匹克（第九届数学冬令营）题 4.

【证】取复数β，使|β|=1 且$\beta^n\cdot c_0$与 c_n 辐角相同，从而

$$|\beta^n c_0+c_n|=|\beta^n c_0|+|c_n|=|c_0|+|c_n|$$

再令　$\omega=e^{2\pi i/n}$，$a_k=\beta\cdot\omega^k$（$0\leq k\leq n-1$）

利用 $\omega^n=1$及$\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{rk}=0$（$1\leq r\leq n-1$），得

$$\sum_{k=0}^{n-1}f(\alpha_k)=n(\beta^n c_0+c_n)$$

因此

$$\sum_{k=0}^{n-1}|f(\alpha_k)|\geq\left|\sum_{k=0}^{n-1}f(\alpha_k)\right|=n(|c_0|+|c_n|)$$

故必有一个 k，使

$$|f(\alpha_k)|\geq|c_0|+|c_n|$$

显然，$|\alpha_k|=1$，于是α_k就是所求的 z_0。

B3-078　设 m 和 n 是正整数，a_1，a_2，…，a_m 是集合{1，2，…，n}中的不同元素，每当 $a_i+a_j\leq n$，$1\leq i\leq j\leq m$，就有某个 k，$1\leq k\leq m$，使得 $a_i+a_j=a_k$，求证：

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m}\geq\frac{n+1}{2}.$$

【题说】第三十五届（1994 年）国际数学奥林匹克题 1．本题由法国提供．

【证】不妨设 $a_1>a_2>\cdots>a_m$，

若存在某个 i，$l\leq i\leq m$，使 $a_i+a_{m+1-i}\leq n$．则

$$a_i<a_i+a_m<a_i+a_{m-1}<\cdots<a_i+a_{m+1-i}\leq n$$

由已知，得 i 元集

$$\{a_i+a_m,\ a_i+a_{m-1},\ \cdots,\ a_i+a_{m+1-i}\}\subseteq\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{i-1}\}$$

这不可能，于是对 $1\leq i\leq m$，恒有 $a_i+a_{m+1-i}\geq n+1$．从而

$$2(a_1+a_2+\cdots+a_m)=(a_1+a_m)+(a_2+a_{m-1})+\cdots+(a_m+a_1)$$
$$\geq m(n+1)$$

即 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m}\geq\dfrac{n+1}{2}$．

B3-079　设 a、b、c 为正实数且满足 abc=1，试证：

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}.$$

【题说】第三十六届（1995 年）国际数学奥林匹克题 2．

【证】因为 abc=1，所以

$$\frac{1}{a^3(b+c)}=\frac{a^2b^2c^2}{a^3(b+c)}\geq\frac{b^2c^2}{ab+ac}$$

题中的不等式等价于

$$\frac{b^2c^2}{ab+ac}+\frac{c^2a^2}{bc+ba}+\frac{a^2b^2}{ca+cb}\geq\frac{3}{2}$$

将这不等式左边记为 K，则

$$((ab+ac)+(bc+ba)+(ca+cb))\cdot K$$
$$\geq\left(\sqrt{ab+ac}\frac{bc}{\sqrt{ab+ac}}+\sqrt{bc+ba}\frac{ca}{\sqrt{bc+ba}}+\sqrt{ca+cb}\frac{ab}{\sqrt{ca+cb}}\right)^2$$
$$=(bc+ca+ab)^2$$
$$\geq 3\sqrt[3]{(bc)\cdot(ca)\cdot(ab)}\cdot(bc+ca+ab)=bc+ca+ab$$

由此立即得到 $K\geq\dfrac{3}{2}$．

B3-080　设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是满足下列条件的实数：$|x_1+x_2+\cdots+x_n|=1$ 且 $|x_i|\leq\dfrac{n+1}{2}$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$．

证明：存在 x_1，x_2，…，x_n 的一个排列 y_1，y_2，…，y_n，使得

$$|y_1+2y_2+\cdots+ny_n|\leq\frac{n+1}{2}.$$

【题说】第三十八届（1997 年）国际数学奥林匹克题 3．本题由俄罗斯提供．

【证】对于 x_1，x_2，…，x_n 的任意一个排列 $\pi=y_1$，y_2，…，y_n，记 $S(\pi)$ 为和式 $y_1+2y_2+\cdots+ny_n$ 的值．令 $r=(n+1)/2$．

令 $\pi_0=x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$，$\tilde{\pi}=x_n,\ x_{n-1},\ \cdots,\ x_1$．如果 $|S(\pi_0)|\leq r$ 或者 $|S(\tilde{\pi})|\leq r$，则结论成立．假设 $|S(\pi_0)|>r$．注意到

$$S(\pi_0)+S(\tilde{\pi})=(x_1+2x_2+\cdots+nx_n)+(x_n+2x_{n-1}+\cdots+nx_1)$$
$$=(n+1)(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$

从而 $|S(\pi_0)+S(\tilde{\pi})|=n+1=2r$．因为 $S(\pi_0)$ 和 $S(\tilde{\pi})$ 的绝

对值都大于 r，它们必然取相反的符号，一个大于 r，另一个小于-r．

从π_0开始，通过若干次交换两个相邻元素的位置，我们可以得到任意一个排列．特别地，存在一个排列的序号π_0，π_1，…，π_m，使得$\pi_m=\tilde{\pi}$，且对每个$i\in\{0, 1, \cdots, m-1\}$，排列$\pi_{i+1}$是通过交换$\pi_i$的两个相邻元素的位置得到的．设$\pi_i=y_1, y_2, \cdots, y_n$ π_{i+1}是由π_i交换y_k与y_{k+1}而得到的，则

$$
\begin{aligned}
&|S(\pi_{i+1})-S(\pi_i)|\\
&=|ky_k+(k+1)y_{k+1}-ky_k-(k+1)y_{k+1}|\\
&=|y_k-y_{k+1}|\leq|y_k|y_{k+1}|\leq 2r.
\end{aligned}
$$

这说明在序列 $S(\pi_0)$，$S(\pi_1)$，…，$S(\pi_m)$中，任意两个相邻项的距离不超过 2r．由于$S(\pi_0)$和$S(\pi_m)$均落在区间[-r，r]的外面，且分别位于该区间的两侧，所以至少有一个数$S(\pi_i)$落在该区间内，即存在置换π_i使得$|S(\pi_i)|\leq r$．

B3-081　命题：设 a、b、c 是非负实数．如果 $a^4+b^4+c^4\leq 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$，
则

$$a^2+b^2+c^2\leq 2(ab+bc+ca) \qquad (*)$$

（1）证明该命题成立；

（2）试写出该命题的逆命题，并判定其是否为真，写出理由．

【题说】1996 年北京市赛高一复试题 5．

【证】（1）不妨设 a、b、c 中 a 为最大．

因为 $2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)=(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2\geq 0$

所以

$$2ab\geq a^2+b^2-c^2$$

$$
\begin{aligned}
a^2+b^2+c^2&=(a^2+b^2-c^2)+2c^2\leq 2ab+2c^2\\
&\leq 2(ab+bc+ca)
\end{aligned}
$$

（2）(*)的逆命题：设 a、b、c 是非负实数．如果 $a^2+b^2+c^2\leq 2(ab+bc+ca)$，
则

$$a^4+b^4+c^4\leq 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

这逆命题不真，例如 a=4，b=c=1 时

$$a^2+b^2+c^2=2(ab+bc+ca)=18$$

而 $a^4+b^4+c^4=258>2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=66$

【评注】$a^4+b^4+c^4<2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$是 a、b、c 构成三角形的充分必要条件，而且在构成三角形时，设三角形面积为Δ，则

$$16\Delta^2=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-a^4-b^4-c^4>0$$

在a、b、c成三角形时，$\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$、$\sqrt{c}$也成三角形，反之不真．

B3-082　设 $n\in N$，$x_0=0$，$x_i>0$，$i=1, 2, \cdots, n$．且=1．求证

$$1\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1+x_0+x_1+\cdots+x_{i-1}}\cdot\sqrt{x_i+\cdots+x_n}}<\frac{\pi}{2}$$

【题说】1996 年中国数学奥林匹克（第十一届数学冬令营）题 5．

【证】由$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$和平均值不等式，有

$$\sqrt{1+x_0+\cdots+x_{i-1}} \cdot \sqrt{x_i+\cdots+x_n} \le \frac{1+x_0+\cdots+x_i+\cdots+x_n}{2} = 1$$

从而左边不等式已经证明.

因为 $0\le x_0+x_1+\cdots+x_i\le 1$，$i=0, 1, \cdots, n$

故可令 $\theta_i=\arcsin(x_0+x_1+\cdots+x_i)$，$i=0, 1, \cdots, n$.

且$\theta\in[0, \frac{\pi}{2}]$，$0=\theta_0<\theta_1<\cdots<\theta_n=\frac{\pi}{2}$. 从而

$$x_i = \sin\theta_i - \sin\theta_{i-1} = 2\cos\theta_{i-1}\sin\frac{\theta_i-\theta_{i-1}}{2}$$

又 $(1+x_0+x_1+\cdots x_{i-1})(x_i+x_{i+1}+\cdots+x_n)$

$=(1+\sin\theta_{i-1})(1-\sin\theta_{i-1})=1-\sin^2\theta_{i-1}=\cos^2\theta_{i-1}$

所以

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1+x_0+x_1+\cdots+x_{i-1}}\cdot\sqrt{x_i+\cdots+x_n}}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{2\cos\theta_{i-1}\sin\frac{\theta_i-\theta_{i-1}}{2}}{\cos\theta_{i-1}}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}2\sin\frac{\theta_i-\theta_{i-1}}{2}$$

$$<\sum_{i=1}^{n}(\theta_i-\theta_{i-1})(\text{因为}x\in(0, \frac{\pi}{2}]\text{时，}\sin x<x)$$

$$=\theta_n-\theta_0=\frac{\pi}{2}$$

B3-083（1）证明：

$$3-\frac{2}{(n-1)!}<\frac{2}{2!}+\frac{7}{3!}+\cdots+\frac{n^2-2}{n!}<3$$

（2）求一组自然数 a、b、c，使得对任意 $n\in N$，$n>2$，

$$b-\frac{C}{(n-2)!}<\frac{2^3-a}{2!}+\frac{3^3-a}{3!}+\cdots+\frac{n^3-a}{n!}<b$$

【题说】1996 年城市数学联赛高年级较高水平题 2.

【证】（1）对于 $n\ge 2$，令

$$d_n=3-\frac{2}{2!}-\frac{7}{3!}-\cdots-\frac{n^2-2}{n!}$$

则$d_2=\frac{4}{2!}$，$d_{n+1}=d_n-\frac{(n+1)^2-2}{(n+1)!}$. 利用数学归纳法易证$d_n=\frac{n+2}{n!}$，因此

$$0<d_n<\frac{2}{(n+1)!}$$

（2）令 a=5

$$e_n = 9 - \frac{3}{2!} - \frac{22}{3!} - \cdots - \frac{n^3-5}{n!}$$

则$e_2 = \frac{15}{2!}$，$e_{n+1} = e_n - \frac{(n+1)^3-5}{(n+1)!}$，利用数学归纳法易证$e_n = \frac{n^2+3n+5}{n!}$.

取 c=4，则在 n≥3 时，

$$\frac{c}{(n-2)!} - e_n = \frac{1}{n!}(3n^2-7n-5)$$

$$> \frac{1}{n!}[n（3×3-7）-5] > 0$$

故 a=5，b=9，c=4 满足题目要求．

【注】令$n \to +\infty$则得$b = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^3-a}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{k(k-1)(k-2)+3k(k-1)+k-a}{k!}$

$= 5e-1-a（e-2）$，其中$e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = 2.71828\cdots$是无理数，由于a、b为整数，所以必有 a=5，b=9．而 c 可为大于 3 的任一自然数．

B3-084　设 a、b、c 是正实数，并满足 abc=1．证明：

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab} + \frac{bc}{b^5+c^5+bc} + \frac{ca}{c^5+a^5+ca} \le 1,$$

并指明等号在什么条件下成立．

【题说】第三十七届（1996 年）IMO 预选题．

【证】由

$$a^5+b^5-a^2b^2（a+b）=（a^2-b^2）（a^3-b^3）\ge 0$$

得

$$a^5+b^5 \ge a^2b^2（a+b） \quad (1)$$

所以

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab} = \frac{a^2b^2c}{a^5+b^5+a^2b^2c} \le \frac{a^2b^2c}{a^2b^2(a+b)+a^2b^2c} = \frac{c}{a+b+c} \quad (2)$$

同理，

$$\frac{bc}{b^5+c^5+bc} \le \frac{a}{a+b+c} \quad (3)$$

$$\frac{ca}{c^5+a^5+ca} \le \frac{a}{a+b+c} \quad (4)$$

故

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab} + \frac{bc}{b^5+c^5+bc} + \frac{ca}{c^5+a^5+ca} \le \frac{c}{a+b+c} + \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} = 1$$

当且仅当 a=b=c=1 时，以上各式中等号均成立．

B3-085　设非负数列 a_1，a_2，…满足条件 $a_{n+m} \le a_n + a_m$，m，n∈N．求证：对任意 n≥m 均有

$$a_n \le ma_1 + （\frac{n}{m}-1）a_m$$

【题说】1997 年中国数学奥林匹克题 6．

【证】对任意 n≥m，设

$$n=qm+r，0 \le r < m$$

则

$$m \cdot a_n = ma_{qm+r}$$

$$\le m（a_{qm}+a_r）$$

$\leq m(qa_m+a_r)$

$=(n-r)a_m+ma_r$

$=(n-m)a_m+(m-r)a_m+ma_r$

$\leq(n-m)a_m+m(m-r)a_1+mra_1$

$=(n-m)a_m+m^2a_1$

从而 $$a_n\leq ma_1+(\frac{n}{m}-1)a_m$$

B3-086 证明 $\frac{1}{1999}<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{1997}{1998}<\frac{1}{44}$.

【题说】第二十九届（1997 年）加拿大数学奥林匹克题 3.

【解】$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{1997}{1998}>\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdots\frac{1997}{1998}=\frac{1}{1999}$

又 $(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{1997}{1998})^2<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{1997}{1998}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{1998}{1999}=\frac{1}{1999}<\frac{1}{1936}=(\frac{1}{44})^2$，所以

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{1997}{1998}<\frac{1}{44}$$

B3-087 证明对所有正实数 a，b，c，

$(a^3+b^3+abc)^{-1}+(b^3+c^3+abc)^{-1}+(c^3+a^3+abc)^{-1}\leq(abc)^{-1}$

【题说】第二十六届（1997 年）美国数学奥林匹克题 5.

【解】去分母并化简，原式等价于

$$a^6(b^3+c^3)+b^6(c^3+a^3)+c^6(a^3+b^3)\geq 2a^2b^2c^2(a^3+b^3+c^3) \quad (1)$$

由对称性，不妨设 $a\geq b\geq c$.

因为

$2a^2b^2c^2(a^3+b^3+c^3)\leq(a^4+b^4)c^4+(b^4+c^4)a^5+(c^4+a^4)b^5$

而

$a^6(b^3+c^3)+b^6(c^3+a^3)+c^6(a^3+b^3)-(a^4+b^4)c^5-(b^4+c^4)a^5-(c^4+a^4)b^5$

$=a^5b^3(a-b)+a^5c^3(a-c)-b^5a^3(a-b)+b^5c^3(b-c)-c^5a^3(a-c)-c^5b^3(b-c)$

$=(a-b)a^3b^3(a^2-b^2)+(a-c)a^3c^3(a^2-c^2)+(b-c)b^3c^3(b^2-c^2)\geq 0$

所以（1）成立.

B4 二项式定理、数学归纳法、概率

B4-001 求（1+x）^{3}+（1+x）^{4}+（1+x）^{5}+…+（1+x）$^{n+2}$ 展开式里的 x^2 的系数．

【题说】1963 年北京市赛高三一试题 3．

【解】因为（1+x）^{3}+（1+x）^{4}+（1+x）^{5}+…+（1+x）$^{n+2}$

$$=\frac{(1+x)^3[(1+x)^n-1]}{(1+x)-1}$$

$$=\frac{1}{x}[(1+x)^{n+3}-(1+x)^3]$$

所以展开式中 x^2 的系数为

$$C_{n+3}^3-1=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3!}-1$$

$$=\frac{n^3+6n^2+11n}{6}$$

【别解】x^2 的系数为

$$C_3^2+C_4^2+C_5^2+\cdots+C_{n+2}^2=C_{n+3}^3-C_2^2$$

B4-002 设 f 是具有下列性质的函数：

（1）f（n）对每个正整数 n 有定义；

（2）f（n）是正整数；

（3）f（2）=2；

（4）f（mn）=f（m）f（n），对一切 m，n 成立；

（5）f（m）＞f（n），当 m＞n 时．

试证：f（n）=n．

【题说】第一届（1969 年）加拿大数学奥林匹克题 8．

【证】先用数学归纳法证明 f（2^k）=2^k（k=1，2，…）．事实上，由（3），k=1 时，f（2）=2 成立．假设 k=j 成立，则由（4）f（2^{j+1}）=f（2·2^j）=f（2）f（2^j）=2·2^j=2^{j+1}．故对所有自然数 k，f（2^k）=2^k．

现考虑自然数 n=1．由（5）函数 f 的严格递增性知：f（2）=2＞f（1）．由（2），f（1）=1．

再考虑自然数 n：2^k＜n＜2^{k+1}．由（5）有 2^k=f（2^k）＜f（2^{k+1}）＜f（2^{k+2}）＜…＜f（2^{k+1}-1）＜f（2^{k+1}）=2^{k+1}，故必有 f（2^k+1）=2^k+1，f（2^k+2）=2^k+2，…，f（2^{k+1}-1）=2^{k+1}-1

综上所述，对任何正整数 n，都有 f（n）=n

B4-003 证明：对任何自然数 n，一定存在一个由 1 和 2 组成的 n 位数，能被 2^n 整除．

【题说】第五届（1971 年）全苏数学奥林匹克八年级题 1．

【证】用归纳法．

（1）当 n=1 时，取该数为 2 即可；

（2）设 A=2^nB 是一个能被 2^n 整除的 n 位数，则 2·10^n+A 和 1·10^n+A 中必有一个能被 2^{n+1} 整除．

从而，命题得证．

B4-004 假设一个随机数选择器只能从 1，2，…，9 这九个数字中

选一个，并且以等概率作这些选择，试确定在 n 次选择（n＞1）后，选出的 n 个数的乘积能被 10 整除的概率．

【题说】第一届（1972 年）美国数学奥林匹克题 3．

【解】要使 n 个数之积被 10 整除，必须有一个数是 5，有一个数是偶数．

n 次选择的方法总共有 9^n 种，其中

A．每一次均不取 5 的取法，有 8^n 种；

B．每一次均不取偶数的取法，有 5^n 种；

C．每一次均在{1，3，7，9}中取数的方法有 4^n 种，显然 C 中的取法既包含于 A，也包含于 B，所以，取 n 个数之积能被 10 整除的概率是

$$1-\frac{8^n+5^n-4^n}{9^n}$$

B4-005　一副纸牌共有 N 张，其中有三张 A，现随机地洗牌（假定纸牌一切可能的分布都有相等机会）．然后从顶上开始一张接一张地翻牌，直至翻到第二张 A 出现为止．求证：翻过的纸牌数的期望（平均）值是（N+1）/2．

【题说】第四届（1975 年）美国数学奥林匹克题 5．

【证】设三张 A 的序号分别是 x_1、x_2、x_3．若将牌序颠倒过来，则第二张 A 的序号为 $N+1-x_2$．在这两副纸牌中，第二张 A 的平均位置（即翻过的纸牌数的期望值）为

$$[x_2+(N+1)-x_2]/2=(N+1)/2$$

从而所求的期望值为 $\frac{N+1}{2}$．

【别证】由题设，除了第 1 张和最后一张外，其余各张皆可能是第 2 张 A，且是等可能的．因此第 2 张 A 所在序号的平均期望值是

$$[2+3+\cdots+(N-1)]/(N-2)=(N+1)/2.$$

B4-006　某艘渔船未经允许在 A 国领海上捕鱼．每撒一次网将使 A 国的捕鱼量蒙受一个价值固定并且相同的损失.在每次撒网期间渔船被 A 国海岸巡逻队拘留的概率等于 1/k，这里 k 是某个固定的正整数．假定在每次撒网期间由渔船被拘留或不被拘留所组成的事件是与其前的捕鱼过程无关的．若渔船被巡逻队拘留，则原先捕获的鱼全被没收，并且今后不能再来捕鱼．船长打算捕完第 n 网后离开 A 国领海．因为不能排除渔船被巡逻队拘留的可能性，所以捕鱼所得的收益是一个随机变量．求 n，使捕鱼收益的期望值达到最大．

【题说】1975 年～1976 年波兰数学奥林匹克三试题 5．

【解】渔船第一次撒网时未被拘留的概率等于 $1-\frac{1}{k}$．撒n次网而未被拘留的概率等于 $\left(1-\frac{1}{k}\right)$．因此，撒n次网收益的期望值等于

$$f(n)=\omega n\left(1-\frac{1}{k}\right)^n \qquad (1)$$

这里ω是撒一次网的收益．

由（1）可知

$$f(n+1)=\omega(n+1)\left(1-\frac{1}{k}\right)^{n+1}$$
$$=f(n)\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$=f(n)\left(1+\frac{(k-1)-n}{kn}\right)$$

因为$1+\frac{(k-1)-n}{kn}\geq 1$等价于$n\leq k-1$，所以当$n=k-1$及$n=k$时，f（n）达到最大值.

B4-007　大于7公斤的任何一种整公斤数的重量都可以用3公斤和5公斤的两种砝码来称，而用不着增添其他不同重量的砝码．试用数学归纳法加以证明.

【题说】1978年重庆市赛二试选作题1（3）.

【证】本题即是要证明：对$\forall n\in N$，当$n\geq 8$时，总存在非负整数a，b，使得n=3a+5b．事实上

（1）当n=8，9，10，11时，不难验证命题成立.

（2）设k＞11并且当8≤n＜k时，命题成立，则当n=k时，由归纳假设k-3=3l+5m，m，n为非负整数

所以　k=（k-3）+3=3l+5m+3

=3（l+1）+5m

故命题对k成立.

B4-008　给定三只相同的n面骰子，它们的对应面标上同样的任意整数．证明：如果随机投掷它们，那么向上的三个面上的数的和被3整除的概率大于或等于1/4.

【题说】第八届（1979年）美国数学奥林匹克题3.

【证】因为问题只涉及和是否被3整除，所以不妨假定，每个面上的数是被3除后的余数；0、1、2．设每个骰子上标“0”的有a个，标“1”的有b个，标“2”的有c个．这里a，b，c是适合下列条件的整数：

$$0\leq a,\ b,\ c\leq n,\quad a+b+c=n \qquad (1)$$

随机地投掷三只骰子，总共有n3种等可能情形．其中朝上三个数的和被3整除的情形有以下四种类型：

0，0，0；1，1，1；2，2，2；0，1，2

第一类共有a_3种,第二类共有b_3种,第三类有c_3种,第四类有3！abc=6abc种.

因此，原问题转化为在条件（1）下，证明不等式

$$a^3+b^3+c^3+6abc\geq\frac{1}{4}$$

即　$$4(a^3+b^3+c^3+6abc)\geq(a+b+c)^3$$

上式可化简为等价的不等式

$$a^3+b^3+c^3+6abc\geq a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b \qquad (2)$$

不妨设a≥b≥c，则

$a^3+b^3+2abc-a^2b-ab^2-a^2c-b^2c$

$=a^2(a-b)+b^2(b-a)+ac(b-a)+bc(a-b)$

$=(a-b)(a^2-b^2-ac+bc)=(a-b)^2(a+b-c)\geq 0,$ (3)

$c^3+abc-c^2a-c^2b=bc(a-c)+c^2(c-a)$

$=c(a-c)(b-c)\geq 0$ (4)

(3)、(4)相加得

$$a^3+b^3+c^3+3abc\geq a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b$$

从而(2)成立.

B4-009 抛掷一枚硬币,每次正面出现得 1 分,反面出现得 2 分.试证:恰好得到n分的概率是$[2+(-\frac{1}{2})^n]/3$.

【题说】第十二届(1980 年)加拿大数学奥林匹克题 4.

【证】令得到 n 分的概率为 P_n.因为得不到 n 分的情况只可能是:先得 n-1 分,再掷出一次反面.所以有

$$1-P_n=\frac{1}{2}\times P_{n-1}$$

由于 $P_1=1/2$

$$P_2=1-\frac{1}{2}P_1$$

$$p_3=1-\frac{1}{2}P_2$$

$$\cdots$$

$$P_n=1-\frac{1}{2}P_{n-1}$$

迭代得

$$P_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{2^n}$$

$$=\frac{2+(-\frac{1}{2})^n}{3}$$

B4-010 某个国王的 25 位骑士围坐在一张圆桌旁.他们中的三位被选派去杀一条恶龙(设三次挑选都是等可能的),令 P 是被挑到的三人中至少有两人是邻座的概率.若 P 写成一个既约分数,其分子与分母之和是多少?

【题说】第一届(1983 年)美国数学邀请赛题 7.

【解】选二相邻的骑士有 25 种方法.再随着选第三位,有 23 种,故共有 25×23 种方法.但其中三者相邻的 25 种情况重复,应减去.故

$$P=\frac{25\times 23-25}{C_{25}^3}=\frac{11}{46}$$

因此,所求之分子、分母之和为 57.

【别解】所选 3 人分两种情况:3 人皆相邻,或 2 人相邻、1 人不邻,故有 25+25×(25-4)种.

B4-011 在给定的圆周上随机地选择 A、B、C、D、E、F 六点,这些点的选择是独立的,对于弧长而言是等可能的.求 ABC、DEF 这两个三角形不相交(即没有公共点)的概率.

【题说】第十二届（1983 年）美国数学奥林匹克题 1．

【解】设圆周上给定 6 个点，从这 6 点中取 3 个点作为△ABC 的顶点，有$C_6^3=20$种方法．其中3个点相邻的有6种（确定第1种顶点后，依顺时针次序另两个点也随之确定）．因此所求概率为$\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$．

B4-012　一个园丁把三棵枫树、四棵橡树和五棵白桦树种成一行．十二棵树的排列次序是随机的，每一种排列都是等可能的．把没有两棵白桦树相邻的概率写成既约分数 m/n．试求 m+n．

【题说】第二届（1984 年）美国数学邀请赛题 11．

【解】先把三棵枫树和四棵橡树排好，有 7！种排法，中间 6 个空档和首尾共8处可选择5处栽白桦树．有P_8^5种选法，故没有两棵白桦相邻的种树法共有7！·P_8^5种．而总的种法有12！种．因此，所求概率为

$$P=\frac{7!P_8^5}{12!}=\frac{7}{99}$$

所以，m+n=106 为所求．

B4-013　设 A、B、C、D 是一个正四面体的顶点，每条棱长 1 米．一只小虫从顶点 A 出发，遵照下列规则爬行：在每一个顶点相交的三条棱中选一条（三条棱选到的可能性相等），然后从这条棱爬到另一个点．设小虫爬了 7 米路之后，又回到顶点 A 的概率为 P=m/729，求 m 的值．

【题说】第三届（1985 年）美国数学邀请赛题 12．

【解】设从 A 出发走过 n 米回到 A 点的走法为 a_n 种．由于从 A 出发走 n-1 米的走法共 3_{n-1} 种，其中 a_{n-1} 种走到 A 的，下一步一定离开 A．除去这 an-1 种，其余的每一种都可以再走 1 米到达 A 点．因此有

$$a_n=3^{n-1}-a_{n-1}$$

由此不难推出$a_n=\frac{1}{4}[3^n+3（-1）^n]$．所以

$$a_7=\frac{3^7-3}{4}=3\times 182$$

$$P=\frac{a_7}{3^7}=\frac{182}{729}，m=182$$

B4－014　某商店有 10 台电视机，排成一排．已知其中有三台是次品，如果我们对这批电视机作一次随机抽查，那么在前 5 台电视机中出现所有次品的概率是多少？

【题说】1988 年新加坡数学奥林匹克（A 组）题 9．原题为选择题．

【解】3台次品放到10个位置上的所有放法有C_{10}^3，而3台次品全部放在前5个位置上的所有放法是C_5^3，所以前面5台电视机中出现所有次品的概率是

$$\frac{C_5^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{12}$$

B4－015　把一个质地不均匀的硬币抛掷 5 次，正面朝上恰为一次的可能性不为 0，而且与正面朝上恰为二次的概率相同．令既约分数 i/j 为硬币在 5 次抛掷中有 3 次正面朝上的概率．求 i+j．

【题说】第七届（1989 年）美国数学邀请赛题 5．

【解】令 r 是掷一次硬币正面朝上的概率，则在 n 次投掷中 k 次正面朝上的概率为

$$C_n^r r^k\ (1-r)^{n-r}$$

由已知，有

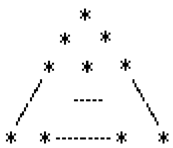
$$C_5^1 r\ (1-r)^4 = C_5^2 r^2\ (1-r)^3$$

由此得 r=0，1 或 1/3．但 r=0，1 都不可能，故 r=1/3．于是 5 次投掷 3 次正面朝上的概率为

$$i/j = C_5^3 (\frac{1}{3})^3 (\frac{2}{3})^2 = 40/243$$

因此 $$i+j=283$$

B4－016　n（n+1）/2 个不同的数随机排成一个三角阵：



设 M_k 是从上往下数第 k 行中的最大数，求 $M_1 < M_2 < \cdots < M_n$ 的概率．

【题说】第二十二届（1990 年）加拿大数学奥林匹克题 2．

【解】设所求概率为 p_n，显然 $p_1=1$，$p_2=2/3$

假设 $$p_k = 2^k/(k+1)!$$

对于 n=k+1，最大数在最下一行的概率为

$$\frac{k+1}{(k+1)(k+2)/2} = \frac{2}{k+2}$$

从而

$$p_{k+1} = \frac{2}{k+2}\ p_k\ \frac{2}{k+2}\ \frac{2^k}{(k+1)!}$$

$$= \frac{2^{k+1}}{(k+2)!}$$

因此，对所有自然数 n，都有

$$p_n = 2^n/(n+1)!$$

B4－017　在吐姆巴利亚仅有总统与发言人两名诚实的人．其它人均以概率 p（0＜P＜1）说谎．总统决定再次竞选，并告诉他身边的第一个人，这个人再告诉他身边的人，如此继续下去，直到这链上第 n 个人将总统的决定告诉发言人．发言人在这以前未听到有关总统的决定的信息，在 n=19 与 n=20 中，哪一种情况，发言人宣布的结果与总统决定相符的可能性较大？

【题说】1990 年匈牙利数学奥林匹克第二轮较高水平题 1．

【解】设发言人宣布结果与总统决定相符的概率为 Q_n，则有递推公式

$$Q_{n+1} = P\ (1-Q_n) + (1-P)\ Q_n = P + (1-2P)\ Q_n$$

将 n+1 换为 n 得

$$Q_n = P + (1-2P)\ Q_{n-1}$$

所以

$$Q_{n+1}-Q_n=(1-2P)(Q_n-Q_{n-1})$$

由于 $Q_0=1$，$Q_1=1-P$，所以

$$Q_{n+1}-Q_n=(1-2P)^n\cdot(-P)$$

由此可知，当 $p>\frac{1}{2}$ 时，$Q_{20}>Q_{19}$；当 $p=\frac{1}{2}$ 时，$Q_{20}=Q_{19}$；当 $p<\frac{1}{2}$ 时，$Q_{20}<Q_{19}$．

B4－018　某生物学家想要计算湖中鱼的数目，在 5 月 1 日他随机地捞出 60 条鱼并给它们做了记号，然后放回湖中．在 9 月 1 日他又随机捞出 70 条鱼，发现其中有 3 条有标记．他假定 5 月 1 日时湖中的鱼有 25%在 9 月 1 日时已不在湖中了（由于死亡或移居），9 月 1 日湖中 40%的鱼在 5 月 1 日时不在湖里（由于新出生或刚刚迁入湖中），并且在 9 月 1 日捞的鱼能代表整个湖中鱼的情况．问 5 月 1 日湖中有多少条鱼？

【题说】第八届（1990 年）美国数学邀请赛题 6．

【解】设 5 月 1 日湖中有 x 条鱼

$$\frac{3}{70}=\frac{60\cdot(1-25\%)}{x\cdot(1-25\%)\div(1-40\%)}=\frac{36}{x}$$

因此 x=840．

【注】题中条件 25%可改为任一百分数，不影响结果．

B4－019　用二项式定理展开 $(1+0.2)^{1000}$，有

$$(1+0.2)^{1000}=A_0+A_1+\cdots+A_{1000}$$

其中 $A_k=C_{1000}^k(0.2)^k$．问哪一个 k 使 A_k 最大？

【题说】第九届（1991 年）美国数学邀请赛题 3．比较 A_{k-1} 与 A_k．

【解】
$$A_{k-1}=\frac{1000\times999\times\cdots\times(1000-k+1)}{(k-1)!}\cdot\frac{1}{5^{k-1}}$$

$$A_k=\frac{1000\times999\times\cdots\times(1000-k)}{k!}\cdot\frac{1}{5^k}$$

可知
$$A_k=A_{k-1}\cdot\frac{1000-k}{k}\cdot\frac{1}{5}$$

求使 $\frac{1000-k}{5k}>1$ 的最大正整数 k，得 $k=166$．

B4－020　有两串字母 aaa 与 bbb 要在电讯线上传送．每一串都是一个一个字母地传送．由于设备的毛病，这些字母的每一个都以 1/3 的概率被错误地接收到，即该收到 a 的都收到 b，该收到 b 的都收到 a．但每一个字母是否被正确收到与接收其他字母的状况互相独立．以 S_a 记传送 aaa 时收到的一串 3 个字母，以 S_b 记传送 bbb 时收到的一串 3 个字母，按词典顺序，S_a 在 S_b 之前的概率记为 P，将 P 写成既约分数，它的分子是多少？

【题说】第九届（1991 年）美国数学邀请赛题 10．

【解】设 $S_a=x_1x_2x_3$，$S_b=y_1y_2y_3$．

$$P（x_1=a且y_1=b）=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

$$P（x_1=y_1）=2\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$$

$$P（x_1=y_1，x_2=a，y_2=b）=\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}=(\frac{4}{9})^2$$

$$P（x_1=y_1，x_2=y_2，x_3=a，y_3=b）=(\frac{4}{9})^2\times\frac{4}{9}=(\frac{4}{9})^3$$

因此

$$P=\frac{4}{9}+(\frac{4}{9})^2+(\frac{4}{9})^3=\frac{532}{729}$$

所求的数是 532．

B4－021　一只抽屉内装有红袜子和蓝袜子，袜子至多有 1991 只.现在的情况是：不放回地随机取两只袜子，它们都是红色或都是蓝色的概率恰为 1/2，按此情况，抽屉中红袜子的数目最多可能是几只？

【题说】第九届（1991 年）美国数学邀请赛题 13．

【解】设红、蓝袜子数分别为 x 和 y．由已知，任取两只袜子其颜色不同的概率是 1/2．故有

$$\frac{xy}{C_{x+y}^2}=\frac{1}{2}$$

即 $(x-y)^2=x+y$

令 n=x-y，则 $n^2=x+y\leq 1991$

故n最大值为44．此时$x=\frac{n^2+n}{2}=990$．

B4－022　一位网球选手的“赢率”是她赢的场数比参赛的场数．在一个周末开始时，她的赢率恰好是 0.500.在这个周末期间她比赛了四场，赢了三场，输了一场，到这个周末结束时，她的赢率大于 0.503．在这个周末开始之前，她最多可能赢几场？

【题说】第十届（1992 年）美国数学邀请赛题 3．

【解】设 W 是这网球运动员在周末开始时已赢的局数，M 是她已参加的局数.已知$\frac{W}{M}=0.500$**,而**$\frac{W+3}{M+4}>0.503$**.解此不等式得**$W<164.6$**，若 W=164，M=328，则 W/M=0.500．而（W+3）/（M+4）＞0.503．因此，在周末开始前，这运动员最多可赢 164 场．**

B4－023　在贾宪-杨辉三角形中，每一个数值是它上面的二个数值之和，这三角形开头几行如下：

第 0 行							1						
第 1 行						1		1					
第 2 行					1		2		1				
第 3 行				1		3		3		1			
第 4 行			1		4		6		4		1		
第 5 行		1		5		10		10		5		1	
第 6 行	1		6		15		20		15		6		1

在贾宪-杨辉三角形中的哪一行中会出现三个相邻的数，它们的比是

3∶4∶5？

【题说】第十届（1992 年）美国数学邀请赛题 4．

【解】杨辉三角形的第n行由二项式系数C_n^k，$k=0$，1，2，…，n 组成．如果第 n 行中有

$$\frac{C_n^{k-1}}{C_n^k}=\frac{k}{n-k+1}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{C_n^k}{C_n^{k+1}}=\frac{k+1}{n-k}=\frac{4}{5}$$

那么 $3n-7k=-3$，$4n-9k=5$

解这个联立方程组，得 k=27，n=62．即第 62 行有三个相邻的数C_{62}^{26}，C_{62}^{27}，C_{62}^{28}的比为3∶4∶5．

B4－024　从集合{1，2，3，…，1000}中随机地、不放回地取出 3 个数 a_1、a_2、a_3，然后再从剩下的 997 个数中同样随机地、不放回地取出 3 个数 b_1、b_2、b_3．令 p 为 $a_1\times a_2\times a_3$ 的砖能放在 $b_1\times b_2\times b_3$ 的盒子中的概率．若将 p 写成既约分数，那么分子和分母的和是多少？

【题说】第十一届（1993 年）美国数学邀请赛题 7．

【解】不妨设 $a_1<a_2<a_3$，$b_1<b_2<b_3$，当且仅当 $a_1<b_1$，$a_2<b_2$，$a_3<b_3$ 时砖可放入盒中．

设 $c_1<c_2<c_3<c_4<c_5<c_6$ 是从｛1，2，…，1000｝中选出的 6 个数，再从中选出 3 个有

$$C_6^3=20$$

种方法．这 3 个作为 a_1、a_2、a_3，剩下 3 个作为 b_1、b_2、b_3．符合要求的 a_1 只能是 c_1．a_2 若为 c_2，则 a_3 可为 c_3 或 c_4 或 c_5；a_2 若为 c_3，则 a_3可为c_4或c_5．所以符合要求的取法有$3+2=5$种，概率$p=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$，所求分子、分母的和为 1+4=5．

B4－025　A 和 B 轮流掷一个均匀的硬币，谁先掷出人头的一面谁获胜，他们玩了 n 次，而且前一场的输家下一场先掷．若 A 第一场先掷，他赢得第6场的概率为$\frac{m}{n}$，m，n是互质的正整数，则$m+n$的最后三个数码是什么？

【题说】第十一届（1993 年）美国数学邀请赛题 11．

【解】任一场比赛，先掷的人赢的概率为

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\cdots=\frac{2}{3}$$

后掷的人赢的概率为$1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$．

令 P_k 为 A 赢第 k 场比赛的概率，则 P_1=．对 k≥2，有

$$P_k=\frac{1}{3}P_{k-1}+\frac{2}{3}(1-P_{k-1})=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}P_{k-1}$$

所以，$P_k-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}\left(P_{k-1}-\frac{1}{2}\right)$

从而 $$P_k=\frac{1}{2}+\frac{(-1)^{k-1}}{3^{k-1}}\left(P_1-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{(-1)^{k-1}}{2\cdot 3^k}$$

当$k=6$时，概率为$\frac{364}{729}$.

所以，m+n=1093，其最后三个数码为 093.

B4－026　一种单人纸牌游戏，其规则如下：将 6 对不相同的纸牌放入一个书包中，游戏者每次随机地从书包中抽牌并放回，不过当抽到成对的牌时，就将其放到一边，如果游戏者每次总取三张牌，若抽到的三张牌中两两互不成对，游戏就结束，否则抽牌继续进行直到书包中没有纸牌为止．设书包空的概率为$\frac{p}{q}$，这里p,q为互质正整数．求$p+q$.

【题说】第十二届（1994 年）美国数学邀请赛题 9.

【解】设书包中有 n（≥2）对互不相同的牌，p（n）为按所说规则抽牌使书包空的概率．则 P（2）=1．由于前三张牌中有两张成对的概率为

$$\frac{\text{三张中有二张成对的取法数}}{\text{取三张牌的所有方法数}}=\frac{C_n^1C_{2n-2}^1}{C_{2n}^3}=\frac{3}{2n-1}$$

所以，对 n≥3，有

$$P(n)=\frac{3}{2n-1}P(n-1)$$

反复利用这个递推公式，得

$$P(n)=\frac{3}{2n-1}\cdot\frac{3}{2n-3}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{5}$$

当 n=6 时，有

$$P(6)=\frac{3^4}{11\cdot 9\cdot 7\cdot 5}=\frac{9}{385}$$

所以，p+q=9+385=394.

B4－027　质点 x 按下列规则（1），（2）在 p、q 两点之间移动：（1）x 在 q 处时，1 秒后必移到 p 处；（2）x 在 p 处时，1 秒后分别以$\frac{1}{2}$的概率留在p或移到q处，今质点x在p处，求10秒后x在 p 处的概率．

【题说】1995 年日本数学奥林匹克预选赛题 5.

【解】设 n 秒后 x 在 p 处的概率为 p_n，x 在 q 处的概率为 q_n．则

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+q_n$$
$$q_{n+1}=\frac{1}{2}p_n$$

由$p_n+q_n=1$得$p_{n+1}=1-\frac{1}{2}p_n$，所以

$$3p_{n+1}-2=\left(-\frac{1}{2}\right)(3p_n-2)$$

由此可得$p_n=\frac{1}{3}\left(2+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$．当$n=10$时，$p_{10}=\frac{683}{1024}$．

B4－028　在重复掷一枚均匀硬币的过程中，在连得 2 个反面之前连得5个正面的概率记为P，将P写成了$\frac{m}{n}$的形式，其中m、n为互质的正整数，求 m+n．

【题说】第十三届（1995 年）美国数学邀请赛题 15．

【解】设掷 k 次，不出现连续 2 个反面的情况有 b_k 种，易知 $b_1=2$，$b_2=3$，约定 $b_0=1$．

由于第一次为正面，再掷 k-1 次不出现连续 2 个反面的情况有 b_{k-1} 种．第一次为反面，第 2 次必须为正面，再掷 k-2 次不出现连续 2 个反面的情况有 b_{k-2} 种，

所以

$$b_k=b_{k-1}+b_{k-2} \qquad (1)$$

又设掷 k 次，无连续 2 个反面，而有 5 个连续正面，并且最后一次为正面的情况有 a_k 种. 这 a_k 种，倒数 1～5 次均为正面的情况有 b_{k-5} 种，倒数 1～4 次均正、第 5 次为反面的情况有 a_{k-5} 种，倒数 1～3 次均正、第 4 次为反面的情况有 a_{k-4} 种，依此类推，从而有递推关系

$$a_k=b_{k-5}+a_{k-5}+a_{k-4}+a_{k-3}+a_{k-2} \qquad (2)$$

又显然 $a_1=a_2=a_3=a_4=0$，$a_5=1$，$a_6=2$．

掷 k+2 次，最后 2 次为反面，而且在这前面已有 5 个连续正面，没有2个连续反面的概率为$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{a_k}{2^k}=\frac{a_k}{2^{k+2}}$．所以

$$P=\sum_{k=5}^{\infty}\frac{a_k}{2^{k+2}}$$

利用递推关系（2）有

$$P-\frac{P}{4}-\frac{P}{8}-\frac{P}{16}-\frac{P}{32}=\sum_{k=5}^{\infty}\frac{a_k-a_{k-2}-a_{k-3}-a_{k-4}-a_{k-5}}{2^{k+2}}$$

即

$$P=\frac{1}{17}\sum_{k=5}^{\infty}\frac{b_{k-5}}{2^k}=\frac{1}{17}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{b_{k-2}}{2^k}$$

再利用（1）

$$2P-P-\frac{P}{2}=\frac{1}{17}\left(\frac{b_0}{2}+\frac{b_1}{2^2}-\frac{b_0}{2^2}\right)=\frac{1}{17}\frac{b_0+b_1}{2^2}=\frac{b_2}{17\times4}$$

即

$$P=\frac{b_2}{34}=\frac{3}{34}$$

所以

$$m+n=3+34=37$$

B4－029　一目标在坐标平面上一步步移动．它从（0，0）出发，每一步移动一个单位长度，可以向左、向右、向上、向下，四个方向是等可能的．设 p 为该目标移动 6 步或更少的步数到达（2，2）的概率．p 可写成$\frac{m}{n}$的形式，其中m和n是互质的正整数．求m＋n．

【题说】第十三届（1995 年）美国数学邀请赛题 3．

【解】到达（2，2）需 4 步或 6 步．

4步到达需两次上，两次右，顺序不限，有$\frac{4!}{2!2!}$种，概率为

$$\frac{4!}{2!2!}\times(\frac{1}{4})^4.$$

6 步到达有两类情况，一类一下三上两右，另一类一左三右两上．概率为

$$2\times\frac{6!}{1!2!3!}\times(\frac{1}{4})^6$$

4 步到达后再走两步仍回到（2，2）的概率为

$$\frac{4!}{2!2!}\times(\frac{1}{4})^4\times4\times(\frac{1}{4})^2$$

所以

$$p=\frac{4!}{2!2!}\times(\frac{1}{4})^4+2\times\frac{6!}{1!2!3!}\times(\frac{1}{4})^6-\frac{4!}{2!2!}\times(\frac{1}{4})^4\times4\times(\frac{1}{4})^2$$

$$=\frac{3}{64}$$

B4－030　在五个队参加的比赛中，每个队与别的队都比赛一场．一场比赛中每个参加的队有 50%赢的机会（没有平局）．整个比赛既没有不败的队也没有不胜的队的概率记为$\frac{m}{n}$．这里m、n为互质的正整数．求m+n．

【题说】第十四届（1996 年）美国数学邀请赛题 6．

【解】有一个队全胜的概率为$5\times(\frac{1}{2})^4$，有一个队全败的概率也为$5\times(\frac{1}{2})^4$．既有一队全胜，又有一队全败的概率为$2C_5^2\times(\frac{1}{2})^7$．

所求概率为

$$1-5\times(\frac{1}{2})^4-5\times(\frac{1}{2})^4+2C_5^2\times(\frac{1}{2})^7=\frac{17}{32}$$

所以

$$m+n=17+32=49$$

B5　函数

B5－001　设 a 是大于 0 的实数，f（x）是定义在全体实数 x 上的一个实函数，并且对每一实数 x 满足条件：

$$f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}$$

1．试证明：函数 f（x）是周期函数，也就是，存在一个实数 b＞0，使得对每一 x 都有

$$f(x+b)=f(x)$$

2．就 a=1 举出一个这种函数 f（x）的例子，但 f（x）不能是常数．

【题说】第十届（1968 年）国际数学奥林匹克题 5．本题由原民主德国提供．

【证】1．f（x+2a）=f[（x+a）+a]

$$=\frac{1}{2}+\{f(x+a)-[f(x+a)]^2\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}+\{\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}$$

$$-\{\frac{1}{4}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2}+f(x)-[f(x)]^2\}\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}+\{\frac{1}{4}-f(x)+[f(x)]^2\}^{\frac{1}{2}}$$

由于

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x-a)-[f(x-a)]^2}\geq\frac{1}{2}$$

所以，由（1）可得

$$f(x+2a)=\frac{1}{2}+f(x)-\frac{1}{2}=f(x)$$

即 f（x）是周期函数，周期 b=2a．

2．不难验证 $f(x)=\frac{1}{2}(1+|\cos\frac{\pi x}{2}|)$ 满足要求．

B5－002　设 f 和 g 为对 x 和 y 的所有实值定义的实函数，且对所有 x、y 满足方程

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)g(y)$$

证明：如果 f（x）不恒为 0，且如果|f（x）|≤1 对所有 x 都成立，则|g（y）|≤1 对所有 y 都成立．

【题说】第十四届（1972 年）国际数学奥林匹克题 5．本题由保加利亚提供．

【证】因为|f（x）|有界，它有一上确界 M，又因为 f 不恒为 0，所以 M＞0．

现在假定不等式|g（y）|≤1 不是对所有 y 都成立．则有一点 y_0 使得 $|g(y_0)|>1$．

于是　$2|f(x)||g(y_0)|=|f(x+y_0)+f(x+y_0)|$

$$\leq|f(x+y_0)|+|f(x-y_0)|\leq 2M$$

因此 $$|f(x)|\le\frac{M}{g(y_0)}<M$$

这与 M 为|f（x）|的上确界矛盾，所以|g（y）|≤1 对所有 y 都成立．

【别证】设 M 是|f（x）|上确界，应有 M＞0．取正数δ，0＜δ＜M，总可以找到 x，使

$$|f(x)|>M-\delta$$

此时对任意实数 y，总有

$$\begin{aligned}2M&\ge|f(x+y)|+|f(x-y)|\\&\ge|f(x+y)+f(x-y)|\\&=2|f(x)||g(y)|>2(M-\delta)|g(y)|\end{aligned}$$

于是

$$|g(y)|<\frac{M}{M-\delta}=1+\frac{M}{M-\delta}$$

因为δ可以任意小，令δ→0，即有|g（y）|≤1．

B5－003　确定下列和式的取值范围：

$$S=\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{b+c+d}+\frac{d}{a+c+d}$$

其中 a、b、c、d 是任意正实数．

【题说】第十六届（1974 年）国际数学奥林匹克题 5．本题由荷兰提供．

【解】由于 $\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{a+b+c}<\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}=1$

$$\frac{c}{b+c+d}+\frac{d}{a+c+d}<\frac{c}{c+d}+\frac{d}{c+d}=1$$

故 $$S<2$$

又 $S>\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{a+b+c}\frac{c}{b+c+d}+\frac{d}{a+c+d}=1$，

所以 S 的值均在开区间（1，2）内．

对区间（1，2）内的任一个值 1+t（0＜t＜1），令 a=c=1，则 S=1+t，即

$$\frac{2}{1+b+d}-\frac{2}{b+2}+\frac{d}{d+2}=t \qquad (1)$$

取b足够小，使得 $\frac{2}{(b+1)(b+2)}>t>\frac{b}{b+2}$，则d的二次函数

$f(d)=(1+b+d)(d+2)\left(\frac{2}{1+b+d}-\frac{2}{b+2}+\frac{d}{d+2}-t\right)$ 的值在 $d=0$ 时为正，在 $d\to+\infty$ 时为负．因此必有d使 $f(d)=0$，即有 b、d 使（1）成立．

于是 S 的取值范围为开区间（1，2）．

B5－004　函数 f 是在有理数集上定义的且仅取有理数值．证明：对于一切有理数 x 与 y，如

$$f(x+f(y))=f(x)f(y) \qquad (1)$$

则 f 为一常数．

【题说】1979 年英国数学奥林匹克题 4．

【证】f_0与f_1显然满足（1）．因为对于一切有理数 x，如果 f（x）c，则由（1），$c=c^2$，从而 c=0 或 c=1．下面证明对于任何其它类的函数均不满足（1）．

若对于某-y 有 f（y）=0，则由（1）对一切 x 有 f（x）=0．设对一切 y 都有 f（y）≠0．令 x=y-f（y），（1）变成

$$f(y)=f(y-f(y))f(y)$$

所以
$$f(y-f(y))=1$$

因此有 r∈Q，使 f（r）=1．

对于任何 x，由（1）

$$f(x+f(r))=f(x)f(r)$$

即
$$f(x+1)=f(x)$$

由归纳法可得

$$f(x+n)=f(x) \quad (2)$$

对于一切整数 n 与一切有理数 x 均成立．

由（1），利用归纳法易证：对于正整数 n，

$$f(nf(n))=f(0)[f(y)]^n$$

设 f（y）=p/q，其中 p、q 均为整数，且 q＞0，则 f（p）=f（qf（y））=f（0）$[f(y)]^q$．由（2）得 f（p）=f（0）≠0，故 f（y）=±1．但如果 f（y）=-1，则由（1），f（x-1）=-f（x），结合（2）得 f（x）=0，矛盾．故对一切 y，f（y）=1．

B5－005　对一切非负整数 x、y，函数 f（x，y）满足

（1）f（0，y）=y+1；　　(1)

（2）f（x+1，0）=f（x，1）；　　(2)

（3）（x+1，y+1）=f（x，f（x+1，y））．　　(3)

试确定 f（4，1981）．

【题说】第二十二届（1981 年）国际数学奥林匹克题 6．

【解】　令 x=0，由（2）与（1）得 f（1，0）=f（0，1）=2．

在（3）中令 x=0，y=n-1，并利用（1）及前式，有

$$f(1,n)=f(0,f(1,n-1))=f(1,n-1)+1$$
$$=n+f(1,0)=n+2 \quad (4)$$

由（3）、（4）得 $f(2,n)=f(1,f(2,n-1))$
$$=f(2,n-1)+2=2n+f(2,0)$$

又　$f(2,0)=f(1,1)=1+2=3$

所以　$f(2,n)=2n+3$ (5)

由（3）、（5）得 $f(3,n)+3=f(2,f(3,n-1))+3$
$$=2f(3,n-1)+6$$
$$=2[f(3,n-1)+3]=\cdots=2^{n+3}$$

所以　$f(3,n)=2^{n+3}-3$　　(6)

由（3）、（6）得 $f(4,n)+3=f(3,f(4,n-1))+3$

$$=2f(4,n-1)+3=\cdots=2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^{f(4,0)+3}}}}}$$（共有 n 个 2）

由于　$f(4,0)+3=f(3,1)+3=2^4$

所以　$f(4,n)=3+2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$（n+3 个 2）

故 f（4，1981）=-3+ $2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$ （1984 个 2）

B5-106 函数 f（x）在[1，1]上有定义，f（0）=f（1）．如果对于任意不同的 x_1、x_2∈[0，1]，都有|f（x_2）-f（x_1）|＜|x_2-x_1|．

求证：$|f(x_2)-f(x_1)|<\frac{1}{2}$

【题说】1983 年全国联赛二试题 2．

【证】不妨设 0≤x_1≤x_2≤1，

（1）若 $x_2-x_1\le\frac{1}{2}$，则

$$|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|\le\frac{1}{2}$$

（2）若 $x_2-x_1>\frac{1}{2}$，由 $f(0)=f(1)$．有

$$|f(x_2)-f(x_1)|=|f(x_2)-f(1)+f(0)-f(x_1)|$$
$$\le|f(x_2)-f(1)|+|f(0)-f(x_1)|<1-(x_2-x_1)$$
$$<\frac{1}{2}$$

【别证】由|f（x_2）-f（x_1）|＜1-（x_2-x）（0≤x_1＜x_2≤1），|f（x_2）-f（x_1）|＜x_2-x_1 得 2|f（x_2）-f（x_1）|＜1，即

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\frac{1}{2}$$

B5－007 求所有正实数集上定义的函数，它们取正实数值，并且满足条件：

（1）对所有正数 x、y，f（xf（y））=yf（x）；

（2）当 x→∞时，f（x）→0．

【题说】第二十四届（1983 年）国际数学奥林匹克题 1．本题由英国提供．

【解】在（1）中令 $y=\frac{1}{f(x)}$，得 $f(xf(y))=1$．这表明 1 是 f 可取的值．再令 y 满足 f（y）=1，则由（1）得 f（x）=yf（x），从而 y=1．于是 f（1）=1．

对任一正实数 x，令 xf（x）=a，则在（1）中取 y=x 得 f（a）=a．

若 a＞1，则 f（a^2）=f（a（a））=af（a）（由（1））=a^2，用归纳法易知 f（a^{2}π）=a^2→+∞，与（2）矛盾．

若 a＜1，则 $1=f(1)=f(\frac{1}{a}f(a)=af(\frac{1}{a})$，即 $f(\frac{1}{a})=\frac{1}{a}$，而 $\frac{1}{a}>1$，由上面的讨论（将 a 换为 1/a）知道这也是不可能的．

于是恒有 $a=1$ 即 $f(x)=\frac{1}{x}$．不难验证它满足条件．

B5－008 若 a＞0，a≠1，F（x）是一奇函数，求下式的奇偶性：G（x）=F（x）．[1/（a^x-1）+1/2]

【题说】1984 年全国联赛一试题 1（5）．原题为选择题．

【解】 $\frac{1}{a^{-x}-1}+\frac{1}{2}=\frac{a^{x}}{1-a^{x}}+\frac{1}{2}=-(1+\frac{1}{a^{x}-1})+\frac{1}{2}$

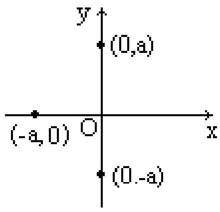
$$=-(\frac{1}{a^{x}-1}+\frac{1}{2})$$

所以，$\frac{1}{a^{x}-1}+\frac{1}{2}$为奇函数，G（x）为偶函数．

B5－009　函数 y=f（x）定义在整个实数轴上，它的图像绕坐标原点旋转$\frac{1}{2}$π后，变为自身．

1．证明：方程 f（x）=x 恰有一解．

2．举出这样函数的例子．



【题说】第二十一届（1987 年）全苏数学奥林匹克十年级题 6．

【证】1．设 f（0）=a．即 f（x）的图像过点（0，a）．将 f（x）绕原点连续旋转两个$\frac{\pi}{2}$，得f（0）= -a．但图像不变，所以a= -a，即 a=0，故 f（0）=0．于是 x=0 是方程 f（x）=x 的一个解．

又设 x=b 是 f（x）=x 的一个解，即点（b，b）在 f（x）图像上．将 f（x）图像绕原点连续旋转3个$\frac{1}{2}$π后，点（b，b）变为点（b，-b），该点仍在 f（x）图像上，即 b=f（b）=-b，所以 b=0．从而 f（x）只有一个解 x=0．

2．设

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ -\frac{1}{2}x, & 4^{k}\leq|x|<2\cdot 4^{k}\quad(k\in Z)\\ 2x, & 2\cdot 4^{k-1}\leq|x|<4^{k}\end{cases}$$

它为满足要求的函数（并非唯一）．

B5－010　求证：不存在这样一个函数 f：$N_0\to N_0$，N_0={0，1，2，3，…，n，…}，使得对于任何 n∈N_0，f[f（n）]=n+1987．

【题说】第二十八届（1987 年）国际数学奥林匹克题 4．本题由越南提供．

【证】假设存在这样的函数 f，则有

f（n+1987）=f[f[f（n）]]=f（n）+1987

用归纳法可得　f（n+1987m）=f（n）+1987m（m∈Z）．

令 i，j∈{0，1，2，…，1986}=M．

若 f（i）≡j（mod 1987）．设 j=f（i）+1987k，则有

f（j）=f[f（i）+1987k]≡f[f（i）]≡i（mod 1987）

因 M 的元素个数为奇数，故总存在 n∈N，使

$$f(n)\equiv n \pmod{1987}$$

设 $f(n)=n+1987k\ (k\in Z)$，则

$$f[f(n)]=f(n+1987k)=f(n)+1987k$$
$$=n+1987\cdot 2k\ (k\in Z)$$

由题设 $f[f(n)]=n+1987$，所以 $2k=1$．矛盾．

B5－011　设 $f(x)$ 是定义在 R 上的函数，

$$M=\{x|f(x)=x\},\ N=\{x|f(f(x))=x\}$$

1．求证：$M\subseteq N$；

2．若 $f(x)$ 在 R 上是增函数，判断 M=N 是否成立，并证明你的结论．

【题说】第一届（1989 年）浙江省数学夏令营一试题 4．

【解】1．对任-$x\in M$，$f(x)=x$，于是 $f(f(x))=f(x)=x$，即 $x\in N$，故 $M\subseteq N$．

2．成立．设 $f(x)$ 为增函数，若 $x\notin M$，则 $f(x)>x$ 或 $f(x)<x$，前者导出

$$f(f(x))>f(x)>x$$

后者导出 $f(f(x))<f(x)<x$．总有 $x\notin N$．因此 $N\subseteq M$．结合 1．得

$$M=N$$

B5－012　假设 a、b、c 是已知的自然数且 $a<b<c$．

1．证明函数 $f:N\to N$ 是唯一的，f 是由下列规则定义

$$f(n)=\begin{cases}n-a & \text{若}n>c\\ f(f(n+b)) & \text{若}n\le c\end{cases}$$

2．找出至少有一个不动点（即 $f(x)=x$）的充分必要条件．

3．用 a、b、c 来表示这样的一个不动点．

【题说】1990 年中国队测试题 11．

【解】我们可以逐步求出 $f(x)$ 的表达式．

在 $n>c$ 时，

$$f(n)=n-a$$

在 $c\ge n>c-(b-a)$ 时，

$$f(n)=f(f(n+b))=f(n+b-a)$$
$$=n+(b-a)-a$$

在 $c-(b-a)\ge n>c-2(b-a)$ 时，

$$f(n)=f(f(n+b))=f(n+2(b-a))$$
$$=n+2(b-a)-a$$

…

一般地，在

$$c-k(b-a)\ge n>c-(k+1)(b-a)$$

时，

$$f(n)=n+(k+1)(b-a)-a,\ k=0,1,\cdots,q$$

这里 $q\in N$，满足

$$q(b-a)\le c<(q+1)(b-a)$$

因此，$f(n)$ 是唯一的．若 f 有不动点 n，则

$$n=n+k(b-a)-a$$

即 $(b-a)|a$

上式不但是必要条件，而且也是充分条件．事实上，在这一条件成立时，设 $a=k(b-a)$，则满足

$$c-(k-1)(b-a)\geq n>c-k(b-a)$$

的自然数 n 都是不动点．

B5－013　f 为 N→N 的函数，

$$f(1)=1$$
$$f(2n+1)=f(2n)+1$$
$$f(2n)=3f(n)$$

求 f 的值集．

【题说】1990 年中国集训队测试题 18．

【解】设 n 的二进制表示为 $n=(a_sa_{s-1}\cdots a_0)_2$，则

$$f(n)=(a_sa_{s-1}\cdots a_0)_3$$

归纳证明如下：

（i）n=1 时，显然成立．

（ii）设 $n<k$（$k\geq 2$）时，命题成立，则对 n=k 时，k 可为奇数或偶数．

若 k 为奇数，设 $k=(a_sa_{s-1}\cdots a_11)_2$，$k-1=(a_sa_{s-1}\cdots a_10)_2$，那么

$$f(k)=f(k-1)+1=(a_sa_{s-1}\cdots a_10)_3+1$$
$$=(a_sa_{s-1}\cdots a_s1)_3$$

命题成立．

若 k 为偶数，设 $k=(a_sa_{s-1}\cdots a_10)_2$，则 $k/2=(a_sa_{s-1}\cdots a_1)_2$．那么

$$f(k)=3f(k/2)=3\cdot(a_sa_{s-1}\cdots a_1)_3$$
$$=(a_sa_{s-1}\cdots a_10)_3$$

命题成立．

综上所述，结论成立．

f（n）的值集是由 0 和 1 在三进制下组成的数集．

B5－014　已知集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，f 是 A 到自身的一一映射，令 $f_0(x)=f(x)$，$f_{k+1}(x)=f_k(f(x))$，k=0，1，2，…．试证一定存在自然数 m，使 $f_m(x)=x$ 对所有 $x\in A$ 成立．

【题说】1993 年江苏省赛一试题 5．

【证】$f_0(a_1)$，$f_1(a_1)$，$f_2(a_1)$，…，$f_n(a_1)$ 中必有两个相同，设 $f_i(a_1)=f_j(a_1)$（$0\leq i<j\leq n$）则由于 f 是一一对应，所以 $f_{i-1}(a_1)=f_{j-1}(a_1)$，…，$a_1=f_{j-i}(a_1)$ 即有 k_1 使 $f_{k1}(a_1)=a_1$，同理必存在正整数 k_2，k_3，…，k_n，使

$f_{k_2}(a_2)=a_2$，$f_{k_3}(a_3)=a_3$，…，$f_{k_n}(a_n)=a_n$．取 k_1，k_2，…，k_n 的最小公倍数 m，则 $f_m(x)=x$ 对所有 $x\in A$ 成立．

【别证】令 $f_0(x)=x$，作数表

$$a_1,a_2,\cdots,a_n$$
$$f_1(a_1),f_1(a_2),\cdots f_1(a_n)$$
$$f_2(a_1),f2(a_2),\cdots f_2(a_n)$$

…

$f_k(a_1)$，$f_k(a_2)$，…，$f_k(a_n)$

…

$f_{n!}(a_1)$，$f_{n!}(a_2)$，…，$f_{n!}(a_n)$

在上述 n！+1 行中，每行均是集合 A 中 n 个元素的一个排列，故必有两行相同，即有 $0\le k<r\le n!$ 使 $f_k(x)=f_r(x)$（$x\in A$）．由于 f 是一一对应，所以 $f_{r-k}(x)=x$（$x\in A$）成立．

B5－015 设 $f(x)=2+\log_x 25-\log_x^2 64-\log_x^3 8$，试确定 x 的取值范围，分别使 f（x）大于零，小于零，等于零．

【题说】1994 年江苏省赛题 3．

【解】由对数性质计算可得 $f(x)=2\log_x\frac{5x}{4}$，其中 $x>0$ 且 $x\ne 1$，故

$f(x)>0$ 的解是 $x>1$ 或 $0<x<\frac{4}{5}$；

$f(x)<0$ 的解是 $\frac{4}{5}<x<1$；

$f(x)=0$ 的解是 $x=\frac{4}{5}$．

B5－016　设 X 是一个非零的有限集合，f 是 X 到 X 的一个映射，满足条件

$$f^{(p)}(x)=x,\ x\in X$$

其中 p 是素数 $f^{(k)}(x)=f(f^{(k-1)}(x))$，$f^{(0)}(x)=x$．设 $Y=\{x|x\in X$ 且 $f(x)\ne x\}$，$|Y|$表示 Y 的元数．证明：$p||Y|$．

【题说】伊朗第十届数学奥林匹克第二阶段题 6．

【证】对任意 $x\in Y$．设 j 为使 $f^{(i)}(x)=x$ 的最小正整数，则 $1<j\le p$．由带余除法 $p=aj+r$，q、r 为非负整数并且 $r<j$，因为 $f^{(r)}(x)=f^{(r)}(f^{(qj)}(x))=f^{(p)}(x)=x$，所以由 j 的最小性，r=0．从而 p=aj，但 p 为素数，$j>1$，所以必有 j=p．因此 x，f（x），$f^{(2)}(x)$，…，$f^{(p-1)}(x)$ 这 p 个数互不相同．称 $B(x)=\{x, f(x), \cdots, f^{(p-1)}(x)\}$ 为 x 的轨道．

如果 x、$y\in y$，并且 $B(x)\cap B(y)\ne\varnothing$，那么有 $f^{(l)}(x)=f^{(m)}(y)$（$0\le l, m\le p-1$），从而 $f^{(m)}(y)$，$f^{(m+1)}(y)=f^{(l+1)}(x)$，…，$f^{(m+p-1)}(y)=f^{(l+p-1)}(x)$ 全在 B（x）中，而 m，m+1，…，m+p-1 跑遍 mod p 的完全剩余系，因此 y，f（y），…，$f^{(p-1)}(y)$ 全在 B（x）中，即 B（x）=B（y）．

于是 Y 被分为若干个互不相交的轨道，每个的长为 p．所以 $p||Y|$．

B5－017　证明：定义在整个实数轴上的任意函数，总可以表为两个函数的和，这两个函数中的每一个的图像都是有对称轴的．

【题说】第二十一届（1995 年）全俄数学奥林匹克十一年级题 2．

【证】设 f（x）是给定的函数，我们证明 f（x）可表为函数图像是以直线 x=0 为对称轴的函数 $f_1(x)$ 及函数图像是以直线 x=a（$a>0$）为对称轴的函数 $f_2(x)$ 的和．

首先确定在区间[-a，a]上 f_1 和 f_2 的函数值，然后依次确定在区间[a，3a]，[-3a，-a]，[3a，5a]，…上 f_1 和 f_2 的函数值．

在[-a，a]上，令 $f_1(x)=0$（事实上，可取在[-a，a]上是偶函数且在区间两端点处函数值为 0 的任一函数为 $f_1(x)$），在该区间上 $f_2(x)=f(x)-f_1(x)=f(x)$．

在[a，3a]上，$f_2(x)=f_2(2a-x)$．$f_1(x)=f(x)-f_2(x)$．

在[-3a，-a]上，令 $f_1(x)=f_1(-x)$，而 $f_2(x)=f(x)-f_1(x)$；在[3a，5a]上，定义 $f_2(x)=f_2(2a-x)$，而 $f_1(x)=f(x)-f_2(x)$ 等等．

B5－018　设函数 $f:R\to R$ 适合条件：

$$f(x^3+y^3)=(x+y)\left((f(x))^2-f(x)f(y)+(f(y))^2\right)\qquad(1)$$

x、y∈R．试证：对一切 x∈R，都有

$$f(1996x)=1996f(x)$$

【题说】1996 年中国数学奥林匹克（第十一届数学冬令营）题 3．

【证】在（1）中令 x=y=0，得 f（0）=0．

在（1）中令 y=0，得

$$f(x^3)=x(f(x))^2,\ x\in R\qquad(2)$$

或

$$f(x)=x^{\frac{1}{3}}\left(f(x^{\frac{1}{3}})\right)^2,\ x\in R\qquad(2)'$$

因此，当 x≥0 时，f（x）≥0；x≤0 时，f（x）≤0．

令 $S=\{a|a>0,\ f(ax)=af(x),\ x\in R\}$

显然 1∈S．下面证明：若 a∈S，则 $a^{\frac{1}{3}}\in S$．

由（2）及 S 定义，有

$$ax(f(x))^2=af(x^3)=f(ax^3)=f\left((a^{\frac{1}{3}}x)^3\right)$$
$$=a^{\frac{1}{3}}x(f(a^{\frac{1}{3}}x))^2$$

从而

$$a^{\frac{1}{3}}f(x)=f(a^{\frac{1}{3}}x)\qquad(3)$$

这表明 $a^{\frac{1}{3}}\in S$．

再证：若 a、b∈s，则 a+b∈S．

利用（1）～（3），有

$$f((a+b)x)=f((a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})^3+(b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})^3)$$
$$=(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})x\{(f(a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}))^2-f(a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})\cdot f(b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})+(f(b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}))^2\}$$
$$=(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})x^{\frac{1}{3}}(f(x^{\frac{1}{3}}))^2$$
$$=(a+b)f(x),\ x\in R$$

因为 1∈S，故 1+1=2∈S，由此推知，任何正整数 n∈S，特别地 n=1996∈S．从而

$$f(1996x)=1996f(x),\ x\in R$$

B5-019　设 f 是一个从实数集 R 映射到自身的函数，并且对任何 $x\in R$ 均有 $|f(x)|\leq 1$，以及 $f(x+\frac{13}{42})+f(x)=f(x+\frac{1}{6})+f(x+\frac{1}{7})$．

证明：f 是周期函数，即存在一个非零实数 c，使得对任何 $x\in R$，成立 $f(x+c)=f(x)$．

【题说】第三十七届（1996 年）IMO 预选题．

【证】因为对任何 $x\in R$，有

$$f(x+\frac{13}{42})+f(x)=f(x+\frac{7}{42})+f(x+\frac{6}{42})$$

故 $f(x+\frac{7}{42})-f(x)=f(x+\frac{13}{42})-f(x+\frac{6}{42})$

$$=f(x+\frac{19}{42})-f(x+\frac{12}{42})$$

$$=\cdots=f(x+\frac{49}{42})-f(x+\frac{42}{42})$$

即

$$f(x+\frac{42}{42})-f(x)=f(x+\frac{49}{42})-f(x+\frac{7}{42}) \qquad (1)$$

同样，有

$$f(x+\frac{7}{42})-f(x+\frac{1}{42})=f(x+\frac{14}{42})-f(x+\frac{8}{42})$$

$$=f(x+\frac{21}{42})-f(x+\frac{15}{42})$$

$$=\cdots=f(x+\frac{49}{42})-f(x+\frac{43}{42})$$

即

$$f(x+\frac{49}{42})-f(x+\frac{7}{42})=f(x+\frac{43}{42})-f(x) \qquad (2)$$

由（1）、（2）得

$$f(x+\frac{42}{42})-f(x)=f(x+\frac{43}{42})-f(x+\frac{1}{42})$$

$$=f(x+\frac{44}{42})-f(x+\frac{2}{42})$$

$$=\cdots=f(x+\frac{84}{42})-f(x+\frac{42}{42})$$

即　$f(x+1)-f(x)=f(x+2)-f(x+1)$

因此，$f(x+n)=f(x)+n(f(x+1)-f(x))$ 对所有 $n\in N$ 成立．

又因对所有 $x\in R$，$|f(x)|\leq 1$，即 $f(x)$ 有界，

故只有

$$f(x+1)-f(x)=0$$

即对所有 $x\in R$，$f(x+1)=f(x)$，所以 $f(x)$ 为周期函数．

B5－020　设集合 A={1，2，3，4，5}．满足下列条件的映射 f：A→A 有多少个：

$$f(f(f(x)))=x，对任意 x\in A$$

【题说】1997 年日本数学奥林匹克预选赛题 4．

【解】当 f 不是恒等映射时，存在 $a\in A$，使得 $f(a)\neq a$．

设$b=f(a)$，$c=f(b)=f(f(a))$，则$f(c)=a$．$c\notin\{a,b\}$，因为若 c=a，则 f（c）=f（a），与 b≠a 矛盾，若 c=b．则 a=f（c）=f（b）=c，也与 b=a 矛盾．所以，a、b、c 是 A 中三个相异的元素．

除了以上三个元素外，A 中还有两个元素 d、e．由 f（f（f（d）））=d 知 f（d）≠a，b，c．从而 f（d）=d 或 f（d）=e．如果 f（d）≠d，则用上面的推理，d、f（d）、f（（d））是 A 中三个相异元素，并且 d、f（d）、f（f（d））与 a、b、c 均相异．这与|A|=5 矛盾，从而 f（d）=d．同理 f（e）=e．

因此，非恒等映射 f 由 A 中的三个元素 a、b=f（a）、c=f（f（a））确定．但 a、b、C 轮换时所确定的 f 是相同的．因而，非恒等映射 f 的个数即为从五个元素中取三个元素的圆周排列的个数，即$\frac{5\times4\times3}{3}=$20．加上恒等映射，所求的映射数是 21．

B5－021　设 f、g 是定义在正整数集 Z_+上并取正整数值的严格递增函数，如果它们满足：

（i）$f(Z_+)\cup g(Z_+)=Z_+$，

（ii）$f(Z_+)\cap g(Z_+)=\phi$，

（iii）g（n）=f（f（n））+1．

求 f（240）．

【题说】第二十届（1978 年）国际数学奥林匹克题 3．本题由英国提供．

【解】令 F={f（k）}，G={g（k）}，$k\in Z_+$．

则每个正整数必在 F 或 G 之一，因为当 k≠1 时，f（1）小于 g（k）和 f（k），故 f（1）=1．

又按题意，第 n 个不在 F 中的整数是 g（n）=f（f（n））+1，故在自然数片断|1，g（n）|中有 n 个值在 G 中，有 f（n）个值在 F 中，因此有

$$f(n)+n=g(n)$$

或

$$f(f(n))=f(n)+n-1$$

由此递推公式及 f（1），可计算出：

f（1）=1，g（1）=2，f（2）=3
f（f（2））=f（3）=f（2）+2－1=4
f（f（3））=f（4）=f（3）+3－1=6
f（f（4））=f（6）=f（4）+4－1=9
f（f（6））=f（9）=f（6）+6－1=14
f（f（9））=f（14）=f（9）+9－1=22
f（f（14））=f（22）=f（14）+14－1=35
f（f（22））=f（35）=f（22）+22－1=56
f（f（35））=f（56）=f（35）+35－1=90
g（35）=f（f（35））+1=91
f（57）=92
f（f（57））=f（92）=f（57）+57－1=148
f（f（92））=f（148）=f（92）+92－1=239

$f(f(148))=f(239)=f(148)+148-1=386$

$g(148)=f(f(148))+1=f(239)+1=387$

故 $f(240)=388$.

[注] 这两个函数的表达式非常复杂：

$$f(n)=\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}n\right],\ g(n)=\left[\frac{\sqrt{5}+3}{2}n\right]$$

这里的[x]表示不超过 x 的最大整数.

本问题是以下定理的特例：

Beatty定理 若两个无理数α，β均大于1，且满足$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$，则函数 $f(n)=[n\alpha]$，$g(n)=[n\beta]$满足

(1) $f(n)$，$g(n)$，$Z_+\to Z_+$为递增函数；(2) $f(Z_+)\cup g(Z_+)=Z_+$；

(3) $f(Z_+)\cap g(Z_+)=\phi$.

本题中$\alpha=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，$\beta=\frac{\sqrt{5}+3}{2}$.

B5－022 函数 f（n）是定义在正整数集上，并取非负整数值，且对所有 m、n，有

$$f(m+n)-f(m)-f(n)=0 \text{ 或 } 1$$

以及 $f(2)=0$，$f(3)>0$，$f(9999)=3333$．求 $f(1982)$．

【题说】第二十三届（1982 年）国际数学奥林匹克题 1.

【解】令 m=n=1，则 $f(2)=2f(1)+(0$ 或 $1)$．

因 $f(2)=0$，$f(1)$ 是非负整数，故 $f(1)=0$.

令 m=2，n=1，则 $f(3)=f(2)+f(1)+(0$ 或 $1)$．

由 $f(3)>0$，$f(2)=0$，$f(1)=0$ 得 $f(3)=1$.

下面我们先证，对于 $k<3333$ 时，有 $f(3k)=k$.

因为 $$f(m+n)\geq f(m)+f(n)$$

所以 $f(3k)\geq f[3(k-1)]+f(3)\geq f[3(k-2)]+2f(3)\geq\cdots\geq kf(3)=k$

若 $f(3k)>k$，则 $f(3k)\geq k+1$，

$$f(9999)\geq f(9999-3k)+f(3k)$$
$$\geq 3333-k+k+1>3333$$

这与题设矛盾，所以 $f(3k)=k$.

于是 $$1982=f(3\times 1982)\geq 3f(1982)$$

即 $$f(1982)\leq\frac{1982}{3}<661$$

又 $$f(1982)\geq f(3\times 660)+f(2)=660$$

所以 $$f(1982)=660$$

B5－023 已知函数 $f(x)=ax^2-c$，满足：

$$-4\leq f(1)\leq -1,\ -1\leq f(2)\leq 5$$

求 $f(3)$ 的范围.

【题说】1983 年全国联赛题 1（5），原题为选择题.

【解】由 $f(1)=a-c$，$f(2)=4a-c$ 得

$$a=\frac{1}{3}[f(2)-f(1)],\quad c=\frac{1}{3}[f(2)-4f(1)]$$

所以 $$f(3)=9a-c=\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1)$$

$$\frac{8}{3}\times(-1)-\frac{5}{3}\times(-1)\leq f(3)\leq\frac{8}{3}\times 5-\frac{5}{3}\times(-4)$$

即 $$-1\leq f(3)\leq 20$$

B5－024 函数 f 定义在整数集上，且满足

$$f(n)=\begin{cases}n-3 & 若\ n\geq 1000\\ f[f(n+5)] & 若\ n<1000\end{cases}$$

求 f（84）.

【题说】第二届（1984 年）美国数学邀请赛题 7.

【解】由 f 的性质，

f（999）=f[f（1004）]=f（1001）=998

f（998）=f[f（1003）]=f（1000）=997

f（997）=f[f（1002）]=f（999）=998

f（996）=f[f（1001）]=f（998）=997

f（995）=f[f（1000）]=f（997）=998

因此我们推想，对 n＜1000，有

$$f(n)=\begin{cases}997 & (n为偶数)\\ 1998 & (n为奇数)\end{cases}\qquad (1)$$

对 n =999 至 995，（1）已经证得.

假设对大于 m 且小于 1000 的 n，（1）成立.

当 m 是偶数时，m+5 是奇数，此时有

f（m）=f[f（m+5）]=f（998）=997

当 m 是奇数时，m+5 是偶数，此时有

f（m）=f[f（m+5）]=f（997）=998

因此，对于 m＜1000，（1）式成立．特别地，f（84）=997.

B5－025 函数 f 的定义域是正整数集合，且有：

（a）对于每个正整数 n，f（f（n））=4n－3；

（b）对于每个非负整数 k，f（2^k）=2^{k+1}－1．求 f（1985）的值.

【题说】1985 年匈牙利阿拉尼·丹尼尔数学竞赛（16 年龄组）题 1.

【解】设数列 n_0，n_1，n_2，…，除了 f（n_0）=n_1 之外，满足 $n_{k+1}=2n_k-1$，利用（a）和归纳法容易证明，对每一个非负整数 k 有 f（n_k）=n_{k+1}．现在从 1985 往前倒推，得到数列

1985，993，497，249，125，63，32

再由（b）得 f（32）=63．所以 f（1985）=2·1985－1=3969.

B5－026 设集合 M={x|1≤x≤9，x∈Z}，

F={（a，b，c，d）|a、b、c、d∈M}

定义 F 到 Z 的映射 f：

$$(a,b,c,d)\xrightarrow{f}ab-cd$$

若 u，v，x，y 都是 M 中的元素，且满足：

$$(u, v, x, y) \xrightarrow{f} 39$$

$$(u, y, x, v) \xrightarrow{f} 66$$

试求：u +v + x +y 之值．

【题说】1986 年北京市赛高一题 2（4）．

【解】由题意得：

$$uv-xy=39 \qquad (1)$$

$$uy-xv=66 \qquad (2)$$

（1）+（2）得　　　$(u-x)(v+y)=105$

（2）－（1）得　　　$(y-v)(u+x)=27$

因式中字母都表示非零数字，可见

$$u>x，y>v，v+y<18，u+x<18$$

所以　　　$u-x=7，v+y=15，y-v=3，u+x=9$

解得　　　$x=1，y=9，u=8，v=6$

故　　　$u+v+x+y=24$

B5－027 设 $f(x)=4^x/(4^x+2)$ 那么和式

$f(1/1001)+f(2/1001)+f(3/1001)+\cdots+f(1000/1001)$

的值等于多少？

【题说】1986 年全国联赛一试题 2（3）．原题为填空题．

【解】因为 $n/1001+(1001-n)/1001=1$（n=1、2、…、500），而当 x +y =1 时，

$$f(x)+f(y)=4^x/(4^x+2)+4^y/(4^y+2)$$

$$=\frac{4^x(4^y+2)+4^y(4^x+2)}{(4^x+2)(4^y+2)}$$

$$=\frac{2\cdot 4^{x+y}+2(4^x+4^y)}{4^{x+y}+4+2(4^x+4^y)}=1$$

故所求和式的值为 500．

B5－028 对任意的正整数 k，令 $f_1(k)$ 定义为 k 的各位数字和的平方．对于 n≥2，令 $f_n(k)=f_1(f_{n-1}(k))$，求 $f_{1988}(11)$．

【题说】第六届（1988 年）美国数学邀请赛题 2．

【解】由定义知

$$f_1(11)=(1+1)^2=4$$

$$f_2(11)=f_1[f_1(11)]=f_1(4)=16$$

$$f_3(11)=f_1[f_2(11)]=f_1(16)=(1+6)^2=49$$

$$f_4(11)=f_1[f_3(11)]=f_1(49)=(4+9)^2=169$$

$$f_5(11)=f_1[f_4(11)]=f_1(169)=16^2=256$$

$$f_6(11)=f_1[f_5(11)]=f_1(256)=13^2=169$$

从而　　　$f_n(11)\ (n>6)=\begin{cases}256 & n\text{为奇数}\\169 & n\text{为偶数}\end{cases}$

因此　　　$f_{1988}(11)=169$

B5－029　N 为正整数集，在 N 上定义函数 f 如下：f（1）=1，f（3）=3，且对 n∈N，有

$f(2n)=f(n)$

$f(4n+1)=2f(2n+1)-f(n)$

$f(4n+3)=3f(2n+1)-2f(n)$

问：有多少个 $n\in N$，且 $n\leq 1988$，使得 $f(n)=n$？

【题说】第二十九届（1988 年）国际数学奥林匹克题 3．本题由英国提供．

【解】通过试验，我们发现：当 n 的二进制表示为 $(a_l a_{l-1},\cdots,a_1a_0)_2$，$a_l=1$ 时，有

$$f(n)=(a_0a_1\cdots a_{l-1}a_l)_2 \qquad (*)$$

用归纳法证明（*）式，奠基是显然的，设当 n＜k 时（*）式成立．考虑 f（k）．

（1）在 k 为偶数时，设 $k=(a_1a_2\cdots a_{l-1}0)_2$，则

$$f(k)=f[(a_1a_2\cdots a_{l-1}0)_2]=(a_{l-1}\cdots a_2a_1)_2$$
$$=(0a_{l-1}\cdots a_2a_1)_2$$

（2）在 k=4m+1 时，设 $k=(a_1a_2\cdots a_s01)_2$，则

$$f(k)=f[(a_1a_2\cdots a_s01)_2]$$
$$=2f[(a_1\cdots a_s1)_2]-f[(a_1\cdots a_s)_2]$$
$$=(1a_s\cdots a_1)_2+(1a_s\cdots a_1)_2-(a_s\cdots a_1)_2$$
$$=(10a_s\cdots a_1)_2$$

（3）在 k=4m+3 时，设 $k=(a_1\cdots a_s11)_2$，则

$$f(k)=f[(a_1\cdots a_s11)_2]$$
$$=3f[(a_1\cdots a_s1)_2]-2f[(a_1\cdots a_s)_2]$$
$$=(1a_s\cdots a_1)_2+(1a_s\cdots a_1)_2+(1a_s\cdots a_1)_2$$
$$-(a_s\cdots a_1)_2-(a_s\cdots a_1)_2$$
$$=(11a_s\cdots a_1)_2$$

于是（*）式对一切自然数 n 成立．

由（*）式，满足 f（n）=n 的 n 必须是“对称的”，即形如

$$(a_1a_2a_3\cdots a_3a_2a_1)_2$$

在 2s 位（$2^{2s-1}\leq n<2^{2s}$）或 2s－1 位（$2^{2s-2}\leq n<2^{2s-1}$）二进制的数中各有 2^{s-1} 个是对称的（首位与末位数字必须是 1，第二位至第 s 位的数字可以为 0，或 1，其余数字随之确定），易知

$$1988=(11111000100)_2\ (2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6+2^2)$$

在二进制中是 11 位数．11 位数中有

$$1+1+2+2+2^2+2^2+2^3+2^3+2^4+2^4+2^5=94$$

个是对称数，其中 $(11111111111)_2$ 与 $(11111011111)_2$ 大于 1988，且也只有这两个大于 1988（因为 1988 的二进制表示中前 5 位数字都是 1），所以本题的答案为 92．

B5－030 设函数 f(n)=k，n 是自然数，k 是无理数 π=3.1415926535…小数点后第 n 位的数字，并且规定 f（0）=3．令

$$F(n)=\underbrace{f(f(f\cdots f(f}_{10\text{重}}(n))\cdots))$$

求证：F[f（1990）+f（5）+f（13）]=F[f（1990）f（3）f（25）]

【题说】第一届（1990 年）希望杯高一二试题 3．

【证】以 $f^{[k]}$（n）表示函数 f（n）k 次迭代：

$$f^{[2]}(n)=f[f(n)],\cdots,f^{[k]}=f[f^{[k-1]}(n)]$$

现将 f（n），$f^{[2]}$（n），…，$f^{[8]}$（n）的取值列表如下：

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f^{[1]}(n)$	3	1	4	1	5	9	2	6	5	3
$f^{[2]}(n)$	1	1	5	1	9	3	4	2	9	1
$f^{[3]}(n)$	1	1	9	1	3	1	5	4	3	1
$f^{[4]}(n)$	1	1	3	1	1	1	9	5	1	1
$f^{[5]}(n)$	1	1	1	1	1	1	3	9	1	1
$f^{[6]}(n)$	1	1	1	1	1	1	1	3	1	1
$f^{[7]}(n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

可见自 k≥7 开始，$f^{[k]}$（n）≡1，即 F（n）≡1，n∈N．

故　F[f（1990）+f（5）+f（13）≡1=F[f（1990）f（3）f（25）]

B5－031 定义域为正整数的函数 f，满足：

$$f(n)=\begin{cases}n-3 & （当n\geq 1000时）\\ f(f(n+7)) & （当n<1000时）\end{cases}$$

求 f（90）．

【题说】1990 年日本第一轮选拔赛题 8．

【解】记 $f^{(m)}(n)=\underbrace{f(f\cdots(f}_{m个}(n))\cdots)$．

因为　90+7×130=1000

所以　$f(90)=f^{(2)}(97)=\cdots=f^{(131)}(1000)$

又　f（1000）=997

$f(997)=f^{(2)}(1004)=f(1001)=998$

$f(998)=f^{(2)}(1005)=f(1002)=999$

$f(999)=f^{(2)}(1006)=f(1003)=1000$

因此，$f^{(m)}$（1000）以 4 为周期，轮流取 997，998，999，1000．因为 131÷4=32 余 3，所以

$$f(90)=f^{(131)}(1000)=f^{(3)}(1000)=999$$

B5－032 设 a，b，c，x，y，z 均为实数，且 $a^2+b^2+c^2=25$，$x^2+y^2+z^2=36$，ax+ by+cz=30．求（a+b+c）/（x+y+z）的值．

【题说】1992 年友谊杯数学竞赛九年级题 1．

【解】由柯西不等式

$$25\times 36=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$$
$$\geq(ax+by+cz)^2=30^2$$

因此上述不等式等号成立．即有

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}\overset{def}{=}k$$

从而$30=k(x^2+y^2+z^2)$，$k=\frac{5}{6}$，$(a+b+c)/(x+y+z)=5/6$．

B5－033 设 f：N→N，并且对所有正整数 n，有

$$f(n+1)>f(n),\quad f(f(n))=3n$$

求 f（1992）．

【题说】1992 年英国数学奥林匹克题 5．

【解】显然，函数 f 严格增．

若 f（1）=1，则 f（f（1））=1≠3，与题设矛盾．所以 f（1）≥2．

由 3=f（f（1））≥f（2）>f（1）≥2 得

$$f(1)=2,\ f(2)=3 \qquad (1)$$

$$f(3n)=f(f(f(n)))=3f(n) \qquad (2)$$

由（1）及（2）即得

$$f(3^n)=3^n f(1)=2\cdot 3^n$$

$$f(2\cdot 3^n)=3^n f(2)=3^{n+1},\ n=0,1,2,\cdots$$

注意到 $2\cdot 3^n$ 与 3^{n+1} 之间共有 3^n-1 个自然数，而 3^n 与 $2\cdot 3^n$ 之间也恰有 3^n-1 个自然数，由 f 的严格单调性，可得

$$f(3^n+m)=2\cdot 3^n+m,\ 0\le m\le 3^n,\ n=0,1,2,\cdots$$

由上式即得

$$f(2\cdot 3^n+m)=f(f(3^n+m))=3(3^n+m)$$

于是

$$f(n)=\begin{cases}2\cdot 3^k+m，若n=3^k+m，0\le m\le 3^k\\ 3(3^k+m)，若n=2\cdot 3^k+m，0\le m\le 3^k\end{cases}$$

由于 $1992=2\cdot 3^6+534$，所以

$$f(1992)=3(3^6+534)=3789$$

B5－034 求函数$f(x)=[x]+[2x]+\left[\frac{5x}{3}\right]+[3x]+[4x]$在$0\le x\le 100$上所取的不同的整数值的个数．

【题说】1993 年亚太地区数学奥林匹克题 2．

【解】f是阶梯函数，在[0，3）上有22次跳跃，即0，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，1，$\frac{6}{5}$，$\frac{5}{4}$，$\frac{4}{3}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{5}{3}$，$\frac{7}{4}$，$\frac{9}{5}$，2，$\frac{9}{4}$，$\frac{7}{3}$，$\frac{12}{5}$，$\frac{5}{2}$，$\frac{8}{3}$，$\frac{11}{4}$．从而f在区间[0，3）上所取的值有22个．x每增加3，f（x）增加 35．所以在[3，6）上，f 又取 22 个新值，…．f 在[0，99）上取值的个数为 33×22=726．f 在[99，100）上所取的值的个数与 f 在[0，1]上所取的值的个数相同．在[0，1]上，f有8次跳跃：0，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，1．故f在[99，100]上取8个不同值．

综上所述，f 在[0，100] 上所取的值共

726+8=734 个

B5－035 设$f(x)=\frac{9^x}{9^x+3}$，计算和

$$f\left(\frac{1}{1996}\right)+f\left(\frac{2}{1996}\right)+\cdots+f\left(\frac{1995}{1996}\right)$$

【题说】第二十七届（1995 年）加拿大数学奥林匹克题 1．

【解】注意到

$$f(1-x)=\frac{9^{1-x}}{9^{1-x}+3}=\frac{9}{9+3\cdot 9^x}=\frac{3}{3+9^x}$$

从而 $f(x)+f(1-x)=\frac{9^x}{9^x+3}+\frac{3}{3+9^x}=1$

因此
$$f\left(\frac{1}{1996}\right)+f\left(\frac{1995}{1996}\right)=1$$
$$f\left(\frac{2}{1996}\right)+f\left(\frac{1994}{1996}\right)=1$$
$$\cdots$$
$$f\left(\frac{1995}{1996}\right)+f\left(\frac{1}{1996}\right)=1$$

原式$=\frac{1995}{2}=997\frac{1}{2}$

B5－036 函数 f（k）是定义在正整数集 N 上，在 N 中取值的严格增函数，并且满足条件 f（f（k））=3k．试求 f（1）+f（9）十 f（96）的值．

【题说】1996 年北京市赛高一复试题 2．

【解】对 k∈N，f（f（k））=3k　　　　(1)

所以　　f[f（f（k））]=f（3k）

又　　f[f（f（k））]=3f（k）

所以　　f（3k）=3f（k）　　　　(2)

若 f（1）=1，代入（1）得 f（1）=3，矛盾．所以 f（1）=a＞1．由 f（k）严格递增，f（1）＜f（a）=3．故只能 f（1）=2，f（2）=3．此时，f（3）=3f（1）=6，

而　　f（6）=f（3×2）=3f（2）=9

f（9）=3f（3）=18

f（18）=3f（6）=27

f（27）=3f（9）=54

f（54）=3f（18）=81

注意到，自变量由 27 变到 54，增加 27 个数，函数值相应地由 54 增至 81，也增加 27 个数，由 f 的严格递增性可知：

f（28）=55　f（29）=56　f（30）=57

f（31）=58　f（32）=59　…

从而　　f（96）=f（3×32）=3f（32）=3×59=177

f（1）十 f（9）+f（96）=2+18+177=197

B5－037　N_+为全体正整数的集合，f：$N_+\to N_+$是满足下列 3 个条件

的函数：

(1) f（xy）=f（x）+f（y）－1 对任意正整数 x、y 都成立；

(2) 满足 f（x）=1 的 x 只有有限个；

(3) f（30）=4．

求 f（14400）的值

【题说】1996 年日本数学奥林匹克预选赛题 6．

【解】由（1）与（3）得

$$
\begin{aligned}
f(14400) &= f(120)+f(120)-1\\
&=2(f(4)+f(30)-1)-1\\
&=2((2f(2)-1)+3)-1\\
&=4f(2)+3
\end{aligned}
$$

若存在正整数 n（≥2）使 f（n）=1，则对任意正整数 k，有 f（n^k）=f（n^{k-1}）=…=f（n）=1．这与条件（2）矛盾．故对 n≥2，f（n）≥2．

由（3）知

$$f(2)+f(3)+f(5)-2=4$$

所以 f（2）=f（3）=f（5）=2，从而 f（1440）=11．

B5－038 设 f（n）是一个在正整数集合 N 上定义且在 N 上取值的函数．证明：如果对每一个正整数 n，f（n+1）＞f[f（n）]都成立，则对每一个 n，f（n）=n 都成立．

【题说】第十九届（1977 年）国际数学奥林匹克题 6．本题由保加利亚提供．

【证】我们先用数学归纳法证明命题 A_n：对任意正整数 n，若 m≥n，则 f（m）≥n．

显然 A_1 真．设 A_{n-1} 真，则对任意 m≥n，f（m－1）≥n－1，故 f（m）＞f（f（m－1））≥n－1，于是 f（m）≥n，从而 A_n 真．

由此可知，f（n）≥n，f（n+1）＞f（f（n））≥f（n）．于是 f 单调增加，若有一个 n 使 f（n）＞n，则 f（n）≥n+1，f（f（n））≥f（n+1），与已知矛盾．因此只能有 f（n）=n．

B5－039 设 f（x）是定义在全体正实数上的一个函数．

1．对于任意两个正实数 x_1、x_2，f（x）满足关系式

$$f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2) \qquad (1)$$

求证：f（1）=0．

2．f（x）满足关系式

$$f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)\cdot \lg x+1 \qquad (2)$$

求 f（x）的表达式．

【题说】1979 年宁夏区赛二试题 2．

【解】1．取 x_1=1，得

$$f(x_2)=f(1)+f(x_2)$$

因而 f（1）=0．

2．用 $\frac{1}{x}$ 代替（2）式中的 x，得

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)\lg\frac{1}{x}+1=-f(x)\lg x+1 \qquad (3)$$

由（2）、（3）解得

$$f(x)=\frac{1+\lg x}{1+\lg^2 x}$$

B5－040 设Q是所有有理数的集合，求满足下列条件的从Q到Q的函数f：

（1）f（1）=2；

（2）对所有x、y∈Q，有

$$f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1$$

【题说】1980年五国国际数学竞赛题1．本题由英国提供．

【解】在（2）中令y=1即得f（x+1）=f（x）+1．又f（1）$=2$，所以对整数x有$f(x)=x+1$，对于有理数$\frac{n}{m}$，取$y=m$，则

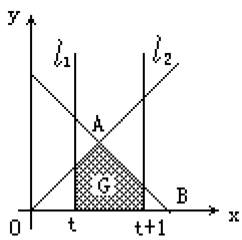
$$f(n)=f\left(\frac{n}{m}\right)(m+1)-\left(f\left(\frac{n}{m}\right)+m\right)+1$$

从而$f\left(\frac{n}{m}\right)=\frac{n}{m}+1$，即对一切$x\in Q$，$f(x)=x+1$，这函数显然合乎要求．

B5－041 在坐标平面上有两个区域M和N．M是由y≥0、y≤x和y≤2－x这三个不等式确定的．N是随t变化的区域，它由不等式t≤x≤t+1所确定的，t的取值范围是0≤t≤1，设M和N的公共面积是函数f（t），求f（t）．

【题说】1981年全国联赛题1（6）．原题为选择题．

【解】如图，M是△OAB，N是l_1与l_2所界的带形区域，二者交集为G（阴影部分）．



从而 $f(t)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot t\cdot t-\frac{1}{2}\cdot[2-(t+1)]\cdot[2-(t+1)]$

即 $$f(t)=-t^2+t+\frac{1}{2}$$

B5－042 已知二次函数f（x）满足条件：1．f（－1）=0；2．对一切x之值有$x\le f(x)\le\frac{1+x^2}{2}$成立，试求$f(x)$的解析表达式．

【题说】1982年芜湖市赛题5．

【解】设f（x）=ax^2+bx+c（a≠0）

因为 f（－1）=0，所以b=a+c．

由$x\leq f(x)\leq \frac{1}{2}(1+x^2)$知$f(1)=a+b+c=1$.

所以 $$b=a+c=\frac{1}{2} \quad (1)$$

因为对一切 x 之值有：$ax^2+bx+c\geq x$

即 $ax^2+(b-1)x+c\geq 0$，故 $a>0$：

$$\triangle=(b-1)^2-4ac\leq 0 \text{ 即 } ac>\frac{1}{16}$$

结合（1）得 $$a=c=\frac{b}{2}=\frac{1}{4}$$

所以 $$f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$$

B5－043 已知函数 $f(x)=x^2-2x+2$，$x\in[t,t+1]$ 的最小值是 $g(t)$．试写出函数 $s=g(t)$ 的解析表达式，并画出它的图像．

【题说】1982 年上海市赛二试题 1．

【解】$f(x)=(x-1)^2+1$，$x\in[t,t+1]$．

当 $t\leq 1\leq t+1$，即 $0\leq t\leq 1$ 时，$f(x)$ 在$[t,t+1]$上的最小值 $g(t)=f(1)=1$．

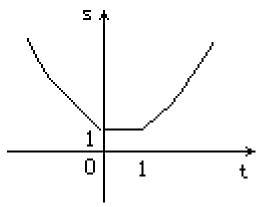
当 $1>t+1$，即 $t<0$ 时，$f(x)$ 在$[t,t+1]$上的最小值

$$g(t)=f(t+1)=t^2+1$$

当 $1<t$，即 $t>1$ 时，$f(x)$ 在$[t,t+1]$上的最小值 $g(t)=f(t)=(t-1)^2+1$．函数

$$s=g(t)=\begin{cases} t^2+1, & \text{若 } t<0 \\ 1, & \text{若 } 0\leq t\leq 1 \\ (t-1)^2+1, & \text{若 } t>1 \end{cases}$$

的图像如图所示．



B5－044 函数

$$F(x)=|\cos^2x+2\sin x\cos x-\sin^2x+Ax+B|$$

在$0\leq x\leq \frac{3}{2}\pi$上的最大值M与参数A、B有关．问A、B取什么值时M为最小？证明你的结论．

【题说】1983 年全国联赛二试题 5．

【解】 $F(x)=|\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})+Ax+B|$

若$A=B=0$，$F(x)=\sqrt{2}|\sin(2x+\frac{\pi}{4})|$．在x为$\frac{\pi}{8}$、$\frac{5\pi}{8}$、$\frac{9\pi}{8}$时，

$F(x)$取最大值$M=\sqrt{2}$．

我们证明，对任意实数A、B，$M\geq\sqrt{2}$．

如果对某一组A、B，$M<\sqrt{2}$，那么$F\left(\frac{\pi}{8}\right)$，$F\left(\frac{5\pi}{8}\right)$，$F\left(\frac{9\pi}{8}\right)$均$<\sqrt{2}$，从而

$$\sqrt{2}+\frac{\pi}{8}A+B<\sqrt{2} \quad (1)$$

$$-\sqrt{2}+\frac{5\pi}{8}A+B>-\sqrt{2} \quad (2)$$

$$\sqrt{2}+\frac{9\pi}{8}A+B<\sqrt{2} \quad (3)$$

（1）+（3）－2·（2）得 0<0，矛盾．将（1）、（2）、（3）中严格的不等式改为不严格的不等式，仍然导出矛盾，除非（1）、（2）、（3）全为等式，而（1）、（2）、（3）全为等式，即 A=B=0．

因此，$M\geq\sqrt{2}$．当且仅当$A=B=0$时，$M=\sqrt{2}$．

B5－045 f 为定义于非负实数集上的且取非负数值的函数，求所有满足下列条件的 f：

（1）f（xf（y））f（y）=f（x+y）；

（2）f（2）=0；

（3）f（x）≠0，当 0≤x<2．

【题说】第二十七届（1986 年）国际数学奥林匹克题 5．本题由英国提供．

【解】如果ω>2，那么在（1）中取 y=2，x=ω－2，就得

$$f(\omega)=f((\omega-2)f(2))\cdot f(2)=0$$

于是

$$f(x)=0\Leftrightarrow x\geq 2$$

因为 x≥0，在（1）中令 0≤y<2，则

$$f(xf(y))f(y)=0\Leftrightarrow xf(y)\geq 2$$

$$f(x+y)=0\Leftrightarrow x+y\geq 2$$

这样一来，当 0≤y<2，x>0 时，有

$$xf(y)\geq 2\Leftrightarrow x+y\geq 2$$

即

$$x\geq\frac{2}{f(y)}\Leftrightarrow x\geq 2-y$$

所以

$$f(y)=\frac{2}{2-y}$$

综合上述，所求的 f 是

$$f(x)=\begin{cases}0, & 若x\geq 2\\ \dfrac{2}{2-x} & 若0\leq x<2\end{cases}$$

不难验证这一函数满足题中条件．

B5－046 求方程 $x^2-8[x]+7=0$ 的所有解．

【题说】第十三届（1987 年）全俄数学奥林匹克十年级题 2．

【解】设 x 是原方程的解，n=[x]，则 $x^2+7=8n$，n>0，n≤x<n+1，于是 $n^2+7\leq x^2+7<(n+1)^2+7=n^2+2n+8$．从而得 $n^2+7\leq 8n<n^2+2n+8$，即

$$\begin{cases} n^2-8n+7\le 0 \\ n^2-6n+8>0 \end{cases}$$

解得 $1\le n<2$ 或 $4<n\le 7$．于是 n=1，5，6，7，相应地

$$x=1，\sqrt{33}，\sqrt{41}，7$$

B5－047 设 N 为自然数集合，k∈N．如果有一个函数 f：N→N 是严格递增的，且对每个 n∈N，都有 f（f（n））=kn．求证，对每一个 n∈N 都有

$$2kn/（k+1）\le f（n）\le \frac{1}{2}（k+1）n$$

【题说】第五届（1990 年）全国冬令营选拔赛题 1．

【证】由于 f 严格递增且取整数值，所以

$$f（n+1）\ge f（n）+1$$

从而对 m≥n，有

$$f（m）=f（n+m-n）\ge f（n）+m-n$$

取 m=f（n），得

$$f（f（n））-f（n）\ge f（n）-n$$

所以 $$f（n）\le \frac{1}{2}（n+kn）=\frac{1}{2}（k+1）n$$

又 $$kn=f（f（n））\le \frac{1}{2}（k+1）f（n）$$

故 $$f（n）\ge 2kn/（k+1）$$

B5－048 求出满足以下要求的所有 R→R 的函数 f、g、h：

$$f（x）-g（y）=（x-y）h（x+y） \quad (1)$$

对任意的 x、y∈R．

【题说】1990 年中国队测试题 6．本题也是第五届中国队选拔试题．

【解】在（1）中令 x =y，得 f（x）－g（y）=0，即

$$f（x）=g（x） \quad (2)$$

（1）式变为

$$f（x）-f（y）=（x-y）h（x+y）$$

在此式中令 y=0，得

$$f（x）=f（0）+xh（x） \quad (3)$$

代入 f（x）－f（y）=（x－y）h（x+y），有

$$xh（x）-yh（y）=（x-y）h（x+y） \quad (4)$$

在（4）式中令 y=－x，得

$$x（h（x）+h（-x））=2xh（0）$$

从而

$$h（x）+h（-x）=2h（0） \quad (5)$$

令 H（x）=h（x）－h（0），则 H（0）=0，H（－x）=－H（x），并且由（4）得

$$xH（x）-yH（y）=（x-y）H（x+y） \quad (6)$$

在（6）中将 y 换为－y 得

$$xH（x）-yH（y）=（x+y）H（x-y） \quad (7)$$

由（6）、（7）得

$$\frac{H(x+y)}{x+y}=\frac{H(x-y)}{x-y}\quad((x+y)(x-y)\neq 0)$$

这表明$\frac{H(x)}{x}$为定值，设

$$H(x)=kx\quad(x\neq 0)$$

显然上式对 x=0 也成立．因此

$$h(x)=kx+h(0)\qquad(8)$$

将（8）代入（3）得

$$f(x)=kx^2+h(0)x+f(0)\qquad(9)$$

设 h（0）=a，f（0）=b，a、b 为常数，由（8）、（9）、（2）得

$$f(x)=g(x)=kx^2+ax+b$$

$$h(x)=kx+a$$

不难验证，上面的 f（x）、g（x）、h（x）确为所求．

B5－049 求方程[x/1！]+[x/2！] +…+[x/10！]=1001 的整数解．

【题说】第二十四届（1990 年）全苏数学奥林匹克十年级题 5．

【解】显然 x 是不超过 1001 的自然数．

设 f（x）=[x/1！]+[x/2！]+…+[x/10！]，则 f（x）是在正整数集上严格递增的函数．

$$f(583)=998,\ f(584)=1001$$

所以 x=584 是原方程的唯一解．

B5－050 设 f（x，y）是二元多项式，且满足下列条件：

（1）f（1，2）=2，　　(1)

（2）yf（x，f（x，y））≡xf（f（x，y），y）

$$\equiv(f(x,y))^2.\qquad(2)$$

试确定所有这样的 f（x，y）．

【题说】1990 年中国集训队测试题 13．

【解】由条件（2）知，x、y 是 f（x，y）的因式，即

$$f(x,y)=xyg(x,y)\qquad(3)$$

g（x，y）也为二元多项式．将（3）代入（2）式并化简得

$$g(x,y)=g(x,xyg(x,y))$$

$$=g(xyg(x,y),y)$$

比较次数即知 g（x，y）中无 x，无 y，即 g（x，y）=常数，再由（1）即得 f（x，y）= xy．

B5－051 Q^+是全体正有理数所成的集合．试作一个函数 f：Q^+→Q^+，使得对任意的x，y∈Q^+，均有$f(xf(y))=\frac{f(x)}{y}$．

【题说】第三十一届（1990 年）国际数学奥林匹克题 4．本题由土耳其提供．

【解】将素数依大小（从小到大）排列为

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ \cdots$$

设 a∈Q^+，并且

$$a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\cdots p_{2k}^{\alpha_{2k}},\ \alpha_i\in Z,\ i=1,2,\cdots,2k$$

则令

$$f(a)=p_2^{-\alpha_1}p_1^{+\alpha_2}p_4^{-\alpha_3}p_3^{+\alpha_4}\cdots p_{2k-1}^{+\alpha_{2k}}$$

对于$a=p_1^{\alpha_1}p_1^{\alpha_2}\cdots p_{2k}^{\alpha_{2k}}$，$b=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_{2k}^{\beta_{2k}}$我们有

$$
\begin{aligned}
f(ab) &= f(p_1^{\alpha_1+\beta_1}p_2^{\alpha_2+\beta_2}\cdots p_{2k}^{\alpha_{2k}+\beta_{2k}} \\
&= p_2^{-(\alpha_1+\beta_1)}p_1^{+(\alpha_2+\beta_2)}\cdots p_{2k}^{-(\alpha_{2k-1}+\beta_{2k-1})}p_{2k-1}^{-(\alpha_{2k}+\beta_{2k})} \\
&= f(a)f(b)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(f(a)) &= f(p_2^{-\alpha_1}p_1^{+\alpha_2}\cdots p_{2k-1}^{-\alpha_{2k}}) \\
&= p_1^{-\alpha_1}p_2^{-\alpha_2}\cdots p_{2k}^{-\alpha_{2k}} = a^{-1}
\end{aligned}
$$

从而 $$f(xf(y))=f(x)f(f(y))=\frac{f(x)}{y}$$

B5－052 设 I=[0，1]，G={（x，y）|x∈I，y∈I}．求 G 到 I 的所有映射 f，使得对任何 x、y、z∈I，有

（1）f（f（x，y），z）=f（x，f（y，z））；

（2）f（x，1）=x，f（1，y）=y；

（3）f（zx，zy）=z^kf（x，y），其中 k 是与 x、y、z 都无关的数．

【题说】1991 年中国数学奥林匹克题 2．

【解】由（3）、（2），

$$f(zx,z)=z^kf(x,1)=z^kx \qquad (4)$$

同样，

$$f(z,zy)=z^ky \qquad (5)$$

于是（在（4）中令 u=zx，v=z；在（5）中令 u＝z，v=zy）

$$f(u,v)=\begin{cases}uv^{k-1}, & 若u\leq v\\ u^{k-1}v, & 若u>v\end{cases}$$

在 k＝1 时，f（u，v）＝min（u，v）．

在 k≥2 时，取 x=y≥z≥x^k，则

$$f(f(x,y),z)=f(x^k,z)=x^kz^{k-1}$$

$$f(x,f(y,z))=f(x,x^{k-1}z)=x^{k-1}x^{k-1}z$$

由（1）得

$$x^kz^{k-1}=x^{k-1}x^{k-1}z$$

所以 k=2，f（u，v）=uv．

易知 f（u，v）=min（u，v）（k=1）及 f（u，v）=uv（k=2）均满足条件（1）、（2）、（3）．

B5－053 长为 l 的梯子靠在竖直的墙上，梯子上有一档，距水平地面及墙的距离均为 d，求梯子靠墙点距地面的高 h，答案用 l，d 的显式表示．

【题说】1991 年英国数学奥林匹克题 7．

【解】设梯子上端距地面 h，下端距墙为 b，则

$$b^2+h^2=l^2 \qquad (1)$$

又考虑梯子、墙、地面构成的三角形的面积得

$$bh=d(b+h) \qquad (2)$$

由（1），（2）得

$$(b+h)^2-2d(b+h)=l^2$$

所以 $$b+h=d+\sqrt{l^2+d^2}$$

$$bh=d(b+h)=d^2+d\sqrt{l^2+d^2}$$

再由这两个方程解出

$$h=\frac{d+\sqrt{l^2+d^2}\pm\sqrt{l^2-2d^2\sqrt{l^2+d^2}}}{2}$$

B5－054 设 R 是全体实数的集合．试求出所有的函数 f：R→R，使得对于 R 中的一切 x 和 y，都有 $f(x^2+f(y))=y+(f(x))^2$．

【题说】第三十三届（1992 年）国际数学奥林匹克题 2．本题由印度提供．

【解】令 $t=f^2(0)$，$f^{(2)}(x)=f[f(x)]$．在函数方程

$$f(x^2+f(y))=y+(f(x))^2 \qquad (1)$$

中令 x=0，得

$$f^{(2)}(y)=y+t \qquad (2)$$

由（1）、（2）有

$$x^2+f^{(2)}(y)+t=f^{(2)}[x^2+f^{(2)}(y)]$$
$$=f[f^2(x)+f(y)]=[f^{(2)}(x)]^2+y$$

即

$$x^2+y+2t=y+(x+t)^2$$

或

$$2t=t^2+2tx$$

由于此式对任意 x∈R 都成立，故 t=0，即 f（0）=0．于是（2）成为

$$f^{(2)}(y)=y\ (y\in R) \qquad (3)$$

又对任意 x≥0，由（1）、（3）有

$$f(x+y)=f(x+f^{(2)}(y))=f(y)+f^2(\sqrt{x})$$

令 y=0，得

$$f(x)=f^2(\sqrt{2})\geq 0\quad (x\geq 0)$$

所以 $f(x+y)=f(x)+f(y)\geq f(y)\quad(x\geq 0)$

这就是说，f（x）是 R 上的非减函数，即若 x≥y，则 f（x）≥f（y）．

最后证明，对一切 x∈R，有 f（x）=x．事实上，若存在 z∈R，使 f（z）≠z．假如 z＜f（z），则 $f(z)\leq f^{(2)}(z)=z$，矛盾；假如 f（z）＜z，则 $z=f^{(2)}(z)\leq f(z)$，也矛盾．

显然，函数 f（x）=x 满足题设条件．

B5－055 求满足下列条件的所有函数 f：（1）取实数值；（2）对所有实数 $x\neq\frac{2}{3}$ 有定义；（3）对除 $\frac{2}{3}$ 外的所有 x 值满足方程

$$498x-f(x)=\frac{1}{2}\cdot f\left(\frac{2x}{3x-2}\right)$$

【题说】1992 年澳大利亚数学奥林匹克题 6．

【解】证 $u=\frac{2x}{3x-2}$，则 $x=\frac{2u}{3u-2}$，$u\neq\frac{2}{3}$．从而有

$$498u-f(u)=\frac{1}{2}f\left(\frac{2u}{3u-2}\right)$$

即有方程组

$$\begin{cases}498x-f(x)=\frac{1}{2}f\left(\frac{2x}{3x-2}\right)\\ \frac{996x}{3x-2}-f\left(\frac{2x}{3x-2}\right)=\frac{1}{2}f(x)\end{cases}$$

解得 $f(x)=\frac{1992x(1-x)}{3x-2}$.

B5－056 试求一切函数 f（x），它对任意正值 x 都取正值，并且对任何正的 x 和 y 都满足等式：$f(x^y)=f(x)^{f(y)}$.

【题说】第十九届（1993 年）全俄数学奥林匹克十一年级一试题 3.

【解】显然 f（x）≡1 是一个解．假设对某一个 a＞0，有 f（a）≠1，于是由等式 $f(a)^{f(xy)}=f(a^{xy})=f(a^x)^{f(y)}=f(a)^{f(x)\cdot f(y)}$ 得到

$$f(xy)=f(x)f(y)\quad (\text{对任意 } x、y>0) \qquad (1)$$

这时由等式 $f(a)^{f(x+y)}=f(a^{x+y})=f(a^x)\cdot f(a^y)=f(a)^{f(x)}\cdot f(a)^{f(y)}=f(a)^{f(x)+f(y)}$，得到

$$f(x+y)=f(x)+f(y)\quad (\text{对任意 } x、y>0) \qquad (2)$$

由（1）我们有 $f(1)=f(1\cdot 1)=f(1)^2$，也就是 f（1）=1．再由（2）和（1）得到

$$f(n)=f(1+\cdots+1)=f(1)+\cdots+f(1)=n$$

$$f\left(\frac{m}{n}\right)\cdot n=f\left(\frac{m}{n}\right)f(n)=f\left(\frac{m}{n}\cdot n\right)=f(m)=m$$

也就是对任何 m，n∈N，都有

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{m}{n} \qquad (3)$$

假设对于某个 x＞0，f（x）≠x，不妨设 f（x）＜x（f（x）＞x 可以类似地讨论）．取 $y=\frac{m}{n}$**，使** f（x）＜y＜x，**由**（2）**和**（3），f（x）**=f（y+（x－y））=f（y）+f（x－y）＞f（y）=y，矛盾！因此 f（x）=x 对任意 x＞0 都成立．显然 f（x）=x 符合要求．**

所以所求函数为 f（x）=1 和 f（x）=x.

B5－057 求适合以下条件的所有函数 f：[1，+∞）→（1，+∞）：

（1）f（x）≤2（x+1）；

（2）$f(x+1)=[f^2(x)-1]/x$.

【题说】1994 年中国数学奥林匹克（第九届数学冬令营）题 3.

【解】易见，函数 f（x）=x+1 满足条件．下面证明这是唯一符合要求的函数．

令 g（x）=f（x）－（x+1），由（2），有

$$|g(x+1)|=|f(x+1)-(x+2)|$$

$$=\frac{|f^2(x)-(x+1)^2|}{x}$$

$$=|g(x)|\cdot\frac{f(x)+x+1}{x}$$

因 f（x）≥1，故

$$|g(x)|=|g(x+1)|\cdot\frac{x}{f(x)+x+1}$$

$$\leq\frac{x}{x+2}|g(x+1)| \qquad (1)$$

又由 $1\leq f(x)\leq 2(x+1)$，得

$$-x\leq g(x)\leq x+1 \qquad (2)$$

代入（1），得

$$|g(x)|\leq\frac{x}{x+2}\cdot(x+2)=\frac{x(x+1)}{x+1}$$

假设 $|g(x)|\leq\frac{x(x+1)}{x+k}$

代入（1），得

$$|g(x)|\leq\frac{x(x+1)}{x+k+1}$$

因此，对任何自然数 n，都有

$$|g(x)|\leq\frac{x(x+1)}{x+n}$$

令 $n\to\infty$，就得 $g(x)=0$.

从而 $f(x)=x+1$ 是满足本题条件的唯一函数.

B5－058 设 S 表示所有大于－1 的实数组成的集合．确定所有的函数 $f:S\to S$，满足以下两个条件：

（i）对于 S 内的所有 x 和 y，有

$$f(x+f(y)+xf(y))=y+f(x)+yf(x);$$

（ii）在区间 $-1<x<0$ 与 $x>0$ 的每一个内，$\frac{f(x)}{x}$ 是严格递增的.

【题说】第三十五届（1994 年）国际数学奥林匹克题 5．本题由英国提供.

【解】在 $(-1,0)$ 内，$\frac{f(x)}{x}$ 严格递增，因而 $\frac{f(x)}{x}=1$ 至多只有一个解，$u\in(-1,0)$.

在（i）中，令 $x=y=u$，得

$$f(u^2+2u)=u^2+2u$$

因为 $-1<u<0$，$u^2+2u=(u+1)^2-1$，所以 $-1<u^2+2u<0$，利用唯一性，得 $u^2+2u=u$，从而 $u=0$ 或 -1，与 $u\in(-1,0)$ 矛盾．所以对 $(-1,0)$ 内任一数 u，必有 $f(u)\neq u$.

类似地，在 $(0,\infty)$ 内没有 u，满足 $f(u)=u$，从而 $f(u)=u$ 导致 $u=0$．在（i）中，令 $x=y$，得

$$f(x+(1+x)f(x))=x+(1+x)f(x)$$

从而

$$x+(1+x)f(x)=0$$

$$f(x)=-\frac{x}{1+x}$$

不难验证 $f(x)=-\frac{x}{1+x}$ 满足题设条件.

B5－059 函数 f（x）由满足下列关系式所确定：

$$(x-1)\ f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-f(x)=x \qquad (1)$$

其中 x≠1．求所有这样的函数．

【题说】第二十届（1994 年）全俄数学奥林匹克十一年级题 6．

【解】以$\frac{x+1}{x-1}$代关系式中的x．得

$$\frac{2}{x-1}f(x)-f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{x+1}{x-1} \qquad (2)$$

将（1）、（2）联立，消去$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$，解得

$$f(x)=1+2x$$

容易检验，所求得的函数满足方程（1），

B5－060 求出所有定义在有理数集上的实值函数 f，满足

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$$

【题说】1994 年澳大利亚数学奥林匹克一试题 4．

【解】令 x=y=0，得 f（0）=0．

令 x =n（$n\in N_+$），y=1，得

$$f(n+1)=f(n)+f(1)+2n$$

所以

$$f(n)-f(n-1)=2(n-1)+f(1)$$

$$\sum_{k=2}^{n}(f(k)-f(k-1))=\sum_{k=2}^{n}2(k-1)+(n-1)f(1)$$

故有 f（n）=n^2+（f（1）－1）n．

令 f（1）－1=c，则 f（n）=n^2+cn．

又$f\left(\frac{k+1}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}+\frac{k}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{2k}{n^2}$，所以

$$f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{2k}{n^2} \qquad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=(n-1)f\left(\frac{1}{n}\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k}{n^2}$$

故有

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\left(\frac{1}{n}\right)^2+c\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (2)$$

由（1）、（2）得，对任意正整数 m、n，有

$$\sum_{k=1}^{m-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=(m-1)f\left(\frac{1}{n}\right)+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{2k}{n^2}$$

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=\left(\frac{m}{n}\right)^2+c\left(\frac{m}{n}\right)$$

又

$$0=f\left(\frac{m}{n}-\frac{m}{n}\right)=f\left(\frac{m}{n}\right)+f\left(-\frac{m}{n}\right)-\frac{2m^2}{n^2}$$

$$f\left(-\frac{m}{n}\right)=\left(-\frac{m}{n}\right)^2+c\left(-\frac{m}{n}\right)$$

从而对任意有理数 x，f（x）=x^2+cx（其中 c 是常数）．

反之，f（x）=x^2+cx（c 为常数）显然满足题设条件，从而所求的函数即为 f（x）=x^2+cx（x∈Q，c 是常数）．

B5－061 非常值有理式 f（x）和实数 a 满足（f（x））^{2}－a=f（x^2）．求所有这样的 a 和 f（x）．其中的有理式是指可表为 x 的两个多项式的比的式子．

【题说】1995 年日本数学奥林匹克题 2．

【解】设f（x）$=\frac{h(x)}{g(x)}$**，其中**h（x）、g（x）**为多项式，**g（x）**的首项系数为 1，且（h（x），g（x））=1．则**

$$\frac{h^2(x)-ag^2(x)}{g^2(x)}=\frac{h(x^2)}{g(x^2)}$$

由于上式两边的分式是既约的有理式，且 g^2（x）与 g（x^2）均为首 1 的多项式，所以 g^2（x）=g（x^2），因而 g（x）=x^k，k 为非负整数，于是

$$h^2(x)-ax^{2k}=h(x^2) \qquad (*)$$

记 h（x）=$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$（$a_0$≠0），以下分 6 种情况讨论：

（1）a=0．此时 h^2（x）=h（x^2），从而 h（x）=x^n（n∈N_+），f（x）=x^t（t 为非零整数）；

（2）a≠0，n＜k．由（*）知无解；

（3）a≠0，n＝k．比较（*）式两边对应项系数得a_0^2－a＝a_0，$2a_0a_1=0$，…，从而 a_0≠0，$a_1=a_2=\cdots=a_k=0$，f（x）=a_0，与 f（x）不为常数相矛盾；

（4）a≠0，2k＞n＞k．由（*）知 $a_0=1$，$a_1=a_2=\cdots=a_{2n-1-2k}=0$，$a_{2n-2k}=\frac{a}{2}$，$a_{2n-2k+1}=\cdots=a_{4n-4k-1}=0$，类推可得：（2n－2k）∤i 时，$a_i=0$．若（2n－2k）∤n，则 $a_n=0$，从而（h，g）≠1，与所设矛盾．若（2n－2k）|n，则（2n－2k）|2k，从而（*）化为

$$u^2\left(x^{2(n-k)}\right)-a\left(x^{2(n-k)}\right)^{\frac{k}{n-k}}=u\left(\left(x^{2(n-k)}\right)^2\right)$$

其中u为一个多项式，次数为$\frac{n}{2n-2k}$＜$\frac{k}{n-k}$，$\frac{k}{n-k}$为非负整数．若$\frac{k}{n-k}$为奇数，则u（x）$=1+x^{\frac{k}{n-k}}$与次数＜$\frac{k}{n-k}$矛盾，所以上式无解；若$\frac{n}{n-k}$为偶数，则函数方程

$$h^2(x)-ax^{\frac{k}{n-k}}=h(x^2)$$

有使a≠0，$2\frac{k}{n-k}$＞deg（h（x））＞$\frac{k}{n-k}$的解，由递降法即得矛盾．

（5）$a\neq0$，$2k=n$．易知 $a_0=1$，$a_1=\cdots=a_{n-1}=0$，$a_n=1$，$a=2$ 是唯一解；

（6）$a\neq0$，$n>2k$．则 $a_0=1$，$a_1=\cdots=a_n=0$，与（h，g）=1 相矛盾．

综上所述，所要求的 a 和 f 为

$$a=0,\ f(x)=x^t\ (t\text{为非零整数})；$$

$$a=2,\ f(x)=x^t+\frac{1}{x^t}\ (t\text{为正整数})．$$

B5－062 设 S={0，1，2，3，…}是所有非负整数的集合．找到所有在 S 上定义、取值于 S 中的满足下面条件的函数 f：

$f(m+f(n))=f(f(m))+f(n)$，对所有 $m,n\in S$ 成立．

【题说】第三十七届（1996 年）国际数学奥林匹克题 3．本题由罗马尼亚提供．

【解】设 $f:S\to S$ 满足条件．

令 $m=n=0$，得 $f(f(0))=f(f(0))+f(0)$，所以 $f(0)=0$，令 $m=0$，得

$$f(f(n))=f(n) \qquad (1)$$

于是

$$f(m+f(n))=f(m)+f(n) \qquad (2)$$

记 f 的值域为 T．由（1）可知，T 中任一数 f（n）是 f 的不动点．而 f 的不动点，当然在 f 的值域中．因此，f 的值域就等于 f 的不动点全体．

设 $m\geq n\in T$，则 $f(m)=m$，$f(n)=n$．于是

$$f(m+n)=f(m+f(n))=f(m)+f(n)=m+n$$

从而 $m+n\in T$．又 $f(m-n)+f(n)=f(m-n+f(n))=f(m-n+n)=f(m)$，从而 $f(m-n)=f(m)-f(n)=m-n$，即 $m-n\in T$．

若 $T\neq\{0\}$，设 T 中最小的正数为 d．对任一数 $c\in T$，设 $c=kd+r$，k 为自然数，$0\leq r<d$，则 $kd\in T$，$r=c-kd\in T$．由 d 的最小性得 $r=0$．即 T 中任一数 c 都是 d 的倍数．

对任一非负整数 n，令 $n=qd+t$，q 为非负整数，$0\leq t<d$，则由上面所说，$f(t)=h_td$，h_t 为非负整数．

$$\begin{aligned}f(n)&=f(qd+t)=f((q-1)d+t)+f(d)\\&=f((q-1)d+t)+d\\&=\cdots=qd+f(t)=qd+h_td\end{aligned}$$

于是，所求函数一定是如下形式：

$$f(n)=qd+h_td$$

其中非负整数 q、t 由 $n=qd+t$，$0\leq t<d$ 定出．而 h_t（$t=1,2,\cdots,d-1$）为任意非负整数，$h_0=0$．

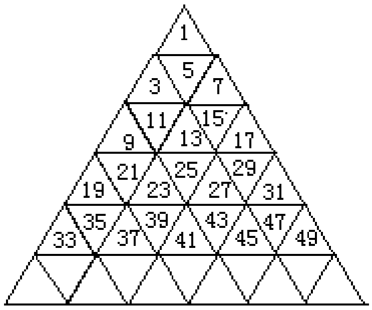
反之，设函数为上述形式，则对任意 m、$n\in S$，设 $m=qd+t$，$f(n)=kd$，则

$$\begin{aligned}f(m+f(n))&=f(qd+t+kd)=f((q+k)d+t)\\&=(q+k)d+f(t)=qd+f(t)+kd\\&=f(m)+f(n)\end{aligned}$$

即这样的函数满足要求．

B5－063 将奇数依大小顺序排成如图所示的三角形数阵，从上到下

第 m 行中从左到右的第 n 个数记为 a（m，n）．



（1）试用 m，n 的代数式表示 a（m，n）；

（2）若 a（m，n）=1997，试求 m 与 n 之值；

（3）由行的中间项 1，5，13，25，41，…构成一个数列，试求此数列前 p 项之和．

【题说】1997 年江苏省赛题 4．

【解】（1）因第一个奇数为 1，…，第 k 个奇数为 2k－1，前 k 个奇数之和为 k^2，故在三角数阵中，前 m－1 行共有 $(m-1)^2$ 个奇数，a（m，n）是第 $(m-1)^2+n$ 个奇数，从而 $a(m,n)=2[(m-1)^2+n]-1$；

（2）若 a（m，n）=1997，而 $(m-1)^2+n=999$．因为 $1\le n\le 2m-1$，故上述方程正整数解为 m=32，n=38；

（3）第 p 行共有 2p－1 个奇数，故正中的奇数是该行第 p 个奇数，而第p行的第p个奇数是第 $(p-1)^2+p$个奇数．因此$S_p=\sum_{k=1}^{p}\{2[(p-1)^2+p]-1\}=\frac{p(2p^2+1)}{3}$．

B5－064 设 f（x）是 5 次多项式，x=－1 是 5 次方程 f（x）+1=0 的 3 重根，x=1 是 5 次方程 f（x）－1=0 的 3 重根．求 f（x）．

【题说】1997 年日本数学奥林匹克预选赛题 8．

【解】由 x=－1 是 f(x)+1=0 的 3 重根知 $f'(x)=(x+1)^2h(x)$．再由 x=1 是 f（x）－1=0 的 3 重根知 $f'(x)=a(x-1)^2(x+1)^2$，其中 $a\in R$．所以$f(x)=a\left(\frac{x^5}{5}-\frac{2}{3}x^3+x\right)+b$，a，b∈R．由 $f(1)=f(-1)=0$ 解得$a=\frac{15}{8}$，$b=0$．故所求的多项式为

$$f(x)=\frac{3}{8}x^5-\frac{5}{4}x^3+\frac{15}{8}x$$

B5－065 假设 a_1，a_2，…，a_n 是自然数 1，2，…n 的某一种排列，对 1，2，…，n 的所有排列，求和

$$|a_1-1|+|a_2-2|+\cdots+|a_n-n|$$

的最大值．

【题说】1957 年匈牙利数学奥林匹克题 3．

【解】将和中绝对值符号去掉（在 $a_k-k<0$ 时，$|a_k-k|$ 换成 $k-a_k$），原来的和表成 2n 项的和，其中 1，2，…，n 各出现两次，而且有 n 项负 n 项正，因此 1，1，2，2，…，n，n 中前 n 项为负，后 n 项为正

时和最大（在 $a_1=n$，$a_2=n-1$，…，$a_n=1$ 时恰好达到）．

当 n=2k 时，最大值为

$$2\times(1+2+\cdots+n)-4\times(1+2+\cdots+k)=k=\frac{n^2}{2}$$

当 n=2k+1 时，最大值为

$$2\times(1+2+\cdots+n)\ 4\times(1+2+\cdots+k)\ 2(k+1)\ k(n+1)=\frac{n^2-1}{2}$$

B5－066 证明：如果三个素数组成算术数列，并包这个数列的公差不被 6 整除，那么这个数列的最小数是 3．

【题说】1963 年～1964 年波兰数学奥林匹克二试题 1．

【证】设三个素数 $p_1<p_2<p_3$ 成等差数列，则公差 $d=p_3-p_2$ 是两个奇数之差，因而 d 为偶数，$p_1=p_2-d$ 为奇数．所以 $p_1\geq 3$．

因为 d 不被 6 整除，所以 $d\equiv 2$ 或 4（mod6）．$2d\equiv 4$ 或 2（mod6）．

若 $p_1\equiv 1$（mod 6），则在 $d\equiv 2$（mod 6）时， $p_2=p_1+d\equiv 3$（mod 6）；在 $d\equiv 4$（mod 6）时，$p_3=p_1+2d\equiv 3$（mod 6）．即 p_2 或 p_3 被 3 整除，与 p_2、p_3 为素数矛盾．

若 $p_1\equiv 5$（mod 6），同样导出 p_2 或 p_3 被 3 整除，矛盾．

因此，只有 $p_1\equiv 3$（mod 6），即素数 $p_1=3$．

B5－067 设定义域为一切实数的函数 f（x）满足下列条件：

(1) 对任意实数 x，均有 $f(x)\geq 2$；

(2) 对任意实数 x_1、x_2，均有

$$f(x_1+x_2)\leq f(x_1)+f(x_2)$$

试证：对任意实数 x_1、x_2．均有

$$\lg f(x_1+x_2)\leq \lg f(x_1)+\lg f(x_2)$$

【题说】1979 年天津市赛二试题 2．

【证】对于任意实数 x_1、x_2，由条件（1），

$$f(x_1)\geq 2,\ f(x_2)\geq 2$$

分别乘以 $\frac{1}{2}f(x_2)$，$\frac{1}{2}f(x_1)$ 再相加得

$$f(x_1)+f(x_2)\leq f(x_1)\cdot f(x_2)$$

又由条件（2）得

$$f(x_1+x_2)\leq f(x_1)+f(x_2)\leq f(x_1)\cdot f(x_2)$$

由于有条件（1），可对上式取对数，得

$$\lg f(x_1+x_2)\leq \lg f(x_1)+\lg f(x_2)$$

B5－068 函数 f 定义在实数集上，且对一切实数 x 满足等式：$f(2+x)=f(2-x)$ 和 $f(7+x)=f(7-x)$．设 x=0 是 f（x）=0 的一个根，记 f（x）=0 在区间 $-1000\leq x\leq 1000$ 中的根的个数为 N．求 N 的最小值．

【题说】第二届（198 年）美国数学邀请赛题 12．

【解】由已知条件，有

$$f(x)=f(2+(x-2))=f(2-(x-2))=f(4-x)\quad(1)$$

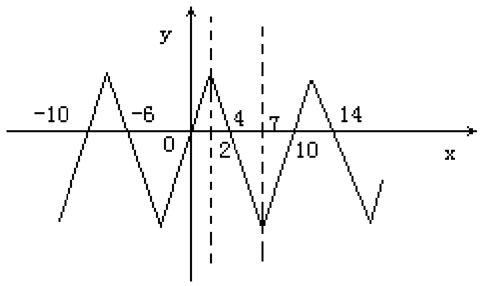
及

$$f(x)=f(4-x)=f(7-(x+3))$$

$=f(7+x+3)=f(x+10)$

在（1）中令 $x=0$，得 $f(4)=f(10)=0$.

区间[－1000，1000]是 $f(x)$ 的 200 个周期．因此[－1000，1000] 上 $f(x)$ 至少有 $1+200\times2=401$ 个根．



我们可以构造出一个“锯齿形”函数，满足上述所有条件，它在区间[－1000，1000]上有 401 个根，除此以外不再有其他根，因此，所求 N 的最小值为 401．

B5－069 设 $a>1$，a、θ 均为实数，试求当 θ 变化时，函数

$$\frac{(a+\sin\theta)(4+\sin\theta)}{1+\sin\theta}$$

的最小值．

【题说】1986 年上海市赛二试题 1．

【解】原式 $=(\sin\theta+1)+\frac{3(a-1)}{\sin\theta+1}+a+2$

$$=\left(\sqrt{\sin\theta+1}-\sqrt{\frac{3(a-1)}{\sin\theta+1}}\right)^2+2\sqrt{3(a-1)}+a+2$$

当 $1<a\leq\frac{7}{3}$ 时，$0<\sqrt{3(a-1)}\leq2$，取 $\theta=\arcsin(\sqrt{3(a-1)}-1)$，则原式取最小值 $2\sqrt{3(a-1)}+a+2$．

当 $a>\frac{7}{3}$ 时，$\frac{\sqrt{3(a-1)}}{\sin\theta+1}>\sqrt{\sin\theta+1}$，取 $\theta=\pi/2$，则原式取最小值 $2+\frac{3(a-1)}{2}+a+2=\frac{5a+5}{2}$．

B5－070 求 $|\cdots||x_1-x_2|-x_3|-\cdots-x_{1990}|$ 最大值，其中 $x_1,x_2,\cdots,x_{1990}$ 是 1 至 1990 不同的自然数．

【题说】第二十四届（1990 年）全苏数学奥林匹克九年级题 7．

【解】 对于非负数 x、y、z，有 $|x-y|\leq\max\{x,y\}$，$\max\{\max\{x,x\},z\}=\max\{x,y,z\}$

记 $S_n=|\cdots||x_1-x_2|-x_3|-\cdots-x_n|$

则

$$\begin{aligned}S_{1990}&\leq\max\{S_{1989},x_{1990}\}\\&\leq\max\{S_{1988},x_{1989},x_{1990}\}\\&\leq\cdots\\&\leq\max\{x_1,x_2,\cdots,x_{1990}\}\\&=1990\end{aligned}$$

因为 S_{1990} 与 $x_1+x_2+\cdots+x_{1990}=1+2+\cdots+1990=995\cdot1991$ 的奇偶性相同，所

以 $S_{1990}\le 1989$．

令$\{x_n\}$为 2，4，5，3；6，8，9，7；…1986，1988，1989，1987；1990，1．则对于任意的 k=1，2，…，497，$S_{4k}=0$．于是

$$S_{1990}=||S_{1988}-1990|-1|=1989$$

即所求的最大值为 1989．

B5－071 设 n 是给定的自然数，n≥3，对 n 个给定的实数 a_1，a_2，…，a_n，记$|a_i-a_j|$（$1\le i，j\le n$）的最小值为m．求在$a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2=1$的条件下，上述m的最大值．

［题设］1992 年上海市赛高三二试题 4．

【解】不妨设 $a_1\le a_2\le\cdots\le a_n$．于是，$a_2-a_1\ge m$，$a_3-a_2\ge m$，…，$a_n-a_{n-1}\ge m$，$a_j-a_i\ge(j-i)m$（$1\le i<j\le n$）．

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i\le j\le n}(a_i-a_j)^2&\ge m^2\sum_{1\le i\le j\le n}(i-j)^2\\&=m^2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}\\&=\frac{m^2}{6}\sum_{k=1}^{n-1}[2k(k+1)(k+2)-3k(k+1)]\\&=\frac{m^2}{6}[\frac{1}{2}(n-1)n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)]\\&=\frac{m^2}{12}n^2(n^2-1)\end{aligned}$$

另一方面，由$a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2=1$可得

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i\le j\le n}(a_i-a_j)^2&=n-1-2\sum_{1\le i\le j\le n}a_ia_j\\&=n-\left(\sum_{i=1}^{n}a_j\right)^2\le n\end{aligned}$$

故

$$n\ge\frac{m^2}{12}n^2（n^2-1）$$

$$m\le\sqrt{\frac{12}{n\left(n^2-1\right)}}$$

当且仅当$\sum_{i=1}^{n}a_i=0$，a_1，a_2，…，a_n成等差数列时取等号．

所以，m的最大值为$\sqrt{\frac{12}{n(n^2-1)}}$．

［别解］不妨设 a_1，a_2，…，a_n 中正数不少于负数．设其中最大的非正数为 a，则

$$1=\sum a_i^2 \geq \sum_{j=-t}^{s}(a+jm)^2 (s+t+1=n\text{并且}s\geq t)$$

$$\geq m^2\sum_{j=-t}^{s} j^2$$

$$\geq m^2\left(\sum_{j=1}^{[\frac{n}{2}]} j^2+\sum_{j=1}^{[\frac{n-1}{2}]} j^2\right)$$

$$=\begin{cases} m^2\cdot\dfrac{(n-1)(n+1)n}{12}, n\text{为奇数} \\ m^2\cdot\dfrac{n(n+2)(n+1)+(n-2)n(n-1)}{24}, n\text{为偶数}\end{cases}$$

$$\geq m^2\frac{(n^2-1)n}{12}$$

所以$m\leq\sqrt{\dfrac{12}{n(n^2-1)}}$．当且仅当n为奇数，$\{a_1，a_2，a_n\}=\{0，\pm\sqrt{\dfrac{12}{n(n^2-1)}}，\pm 2\sqrt{\dfrac{12}{n(n^2-1)}}，\cdots，\pm\sqrt{\dfrac{3(n-1)}{n(n-1)}}\}$时等号成立．

B5－072 函数 f 定义在区间（0，1）上，且

$$f(x)=\begin{cases} x，\text{当}x\text{是无理数} \\ \dfrac{p+1}{q}，\text{当}x=\dfrac{p}{q}，(p，q)=1，0<p<q\end{cases}$$

求函数f在区间$\left(\dfrac{7}{8},\dfrac{8}{9}\right)$上的最大值．

【题说】1992 年捷克和斯洛伐克数学奥林匹克（最后一轮）题 5．

【解】$f\left(\dfrac{15}{17}\right)=\dfrac{16}{17}$即为f在区间$\left(\dfrac{7}{8},\dfrac{8}{9}\right)$上的最大值．

事实上，若x是无理数$\in\left(\dfrac{7}{8},\dfrac{8}{9}\right)$，则$\dfrac{16}{17}>\dfrac{8}{9}>x=f(x)$．若x是有理数，记$x=\dfrac{p}{q}$，$(p，q)=1$，$0<p<q$．则$\dfrac{7}{8}<\dfrac{p}{q}<\dfrac{8}{9}$，即$8(q-p)<q<9(q-p)$．

若 $q-p\geq 3$，则$q>8(q-p)\geq 24$，$q\geq 25$，所以$f(x)=\dfrac{p+1}{q}=\dfrac{p}{q}+\dfrac{1}{q}<\dfrac{8}{9}+\dfrac{1}{25}<\dfrac{16}{17}$．

若$q-p=2$，则$16<q<18$，即$q=17$，$p=15$，$f(x)=\dfrac{16}{17}$．

若 $q-p=1$，则 $8<q<9$，这不可能．

B5－073 设自然数a、b、c、d满足$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}<1$及$a+c=20$．求$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$的最大值．

【题说】1993 年上海市赛高三二试题 4．

【解】不妨设 a≤c．记 b=a+p，d=c+q，这里 p、q∈N．由

$$1>\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a}{a+p}+\frac{d}{c+q}$$
$$=\frac{ac+aq+ac+cp}{ac+aq+pq+cp}$$

可知 ac<pq．

因为$1-\left(\frac{a}{a+p}+\frac{c}{c+q}\right)=\frac{pq-ac}{(a+p)(c+q)}$，而

（a+p）（c+q）=ac+pq+cp+aq

=ac +pq +cpq +a－（q－1）（cp－a）

≤ac+pq+cpq+a=（a+pq）（c+1）

所以

$$1-\left(\frac{a}{a+p}+\frac{c}{c+q}\right)\geq 1-\left(\frac{a}{a+pq}+\frac{c}{c+1}\right)$$

即

$$\frac{a}{a+p}+\frac{c}{c+q}\leq\frac{a}{a+pq}+\frac{c}{c+1}$$

因 pq>ac，故 pq≥ac+1，

$$\frac{a}{a+pq}+\frac{c}{c+1}\leq\frac{a}{a+ac+1}+\frac{c}{c+1}$$

从而

$$\frac{a}{a+p}+\frac{c}{c+q}\leq\frac{a}{a+ac+1}+\frac{c}{c+1}$$
$$=1-\frac{1}{(a+ac+1)(c+1)}$$

因 a+c=20，a≤c，故（a，c）有 10 组数：（1，19），（2，18），…，（10，10），对应的（a+ac+1）（c+1）的值顺次是 420，741，990，1173，1296，1365，1386，1365，1308，1221，其中 1386 最大．因此，所求的最大值为

$$1-\frac{1}{1386}=\frac{1385}{1386}\left(\text{或}\frac{7}{99}+\frac{13}{14}\right)$$

【注】若$a+c\leq n$（n为大于1的自然数），则在$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}<1$时，$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$的最大值为$1-\frac{1}{m}$，其中$m=\left[\frac{2n+1}{3}\right]\left(\left[\frac{2n+1}{3}\right]\left[\frac{n}{3}\right]+1\right)$，[x]为表示不小于x的最小整数．

B5－074 给定 k∈N 及实数 a>0，在条件

$$k_1+k_2+\cdots+k_r=k$$

（$k_i\in N$，$1\leq r\leq k$）下，求

$$a^{k_1}+a^{k_2}+\cdots+a^{k_r}$$

的最大值．

【题说】1993 年中国数学奥林匹克（第八届数学冬令营）题 2．

【解】因 $a^{k_1+k_2-1}+a-a^{k_1}-a^{k_2}=a(a^{k_1-1}-1)(a^{k_2-1}-1)\geq 0$

所以 $a^{k_1}+a^{k_2}\leq a+a^{k_1+k_2-1}$，故

$$a^{k_1}+a^{k_2}+\cdots+a^{k_r}\leq a+a^{k_1+k_2-1}+a^{k_3}+\cdots+a^{k_r}$$

$$\leq\cdots\leq(r-1)a+a^{k-r+1}$$

当且仅当 k_1，k_2，…，k_r 中有 r－1 个 1，一个为 k－r+1 时等号成立，所以最大值即（r－1）$a+a^{k-r+1}$．

B5－075 设函数 f：[0，1] →R 满足：

（1）f（x）≥0，∀x∈[0，1]；

（2）f（1）=1；

（3）f（x）+f（y）≤f（x+y），x，y，x+y∈[0，1]．

求出最小的常数 c，使 f（x）≤cx 对一切满足上述条件的函数 f 及一切 x∈[0，1]都成立，并证明你的结论．

【题说】第二十二届（1993 年）美国数学奥林匹克题 3．

【证】最小常数 c=2．

首先，我们证明：如果 f 满足（1）—（3），则 f（x）≤2x 对一切 x∈[0，1]成立．

由（3）与（1），f（x）≤f（x）+f（y）≤f（x+y），即 f（x）在[0，1]上是增函数．

对 x∈（0，1]，取非负整数 n，使

$$\frac{1}{2^{n+1}}<x\leq\frac{1}{2^n}$$

而由（3），2f（x）≤f（2x），所以

$2^nf(x)\leq 2^{n-1}f(2x)\leq 2^{n-2}f(2^2x)\leq\cdots\leq f(2^nx)\leq f(1)=1<2^{n+1}x$

$$f(x)<2x$$

又显然有 f（0）+f（1）≤f（0+1）=f（1），所以由（1），

$$f(0)=0$$

于是 f（x）≤2x，x∈[0，1]．

另一方面，令

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\leq x\leq\frac{1}{2}\\ 1, & \frac{1}{2}<x\leq 1\end{cases}$$

这函数显然满足（1）和（2）

设 x，y 及 x + y 都在[0，1]内，由对称性可以假定 $x\leq\frac{1}{2}$，从而

$$f(x)+f(y)=f(y)\leq f(x+y)$$

即 f（x）满足题述的所有条件．

如果$0<c<2$，取$x\in\left(\frac{1}{2},\frac{1}{c}\right)$，则$f(x)=1>cx$，所以2为所求的最小常数．

B5－076 设a_1，a_2，…，a_{1994}均为正实数，且$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\cdots+\frac{1}{1-a_{1994}}=1$，则$a_1a_2\cdots a_{1994}$的最小值是$1993^{1994}$．

【题说】 1994 年四川省赛题 1（4）．原题为填空题．

【解】设$x_i=\frac{1}{1+a_i}$，则$a_i=\frac{1-x_i}{x_i}$，且$x_i>0$，$\sum_{i=1}^{1994}x_i=1$．

$$
\begin{aligned}
\text{所以}a_1a_2\cdots a_{1994}&=\frac{1}{x_1x_2\cdots x_{1994}}\cdot(x_2+x_3+\cdots+x_{1994})(x_1+x_3+x_4+\cdots+x_{1994})\cdots(x_1+x_2+\cdots+x_{1993})\\
&\geq\frac{1}{x_1x_2\cdots x_{1994}}\cdot 1993\cdot\sqrt[1993]{x_2x_3\cdots x_{1994}}\cdot 1993\cdot\sqrt[1993]{x_1x_3\cdots x_{1994}}\cdot 1993\cdot\cdots\sqrt[1993]{x_1x_2\cdots x_{1993}}\\
&=1993^{1994}
\end{aligned}
$$

当且仅当 x_i 相等，即 a_i 相等时取等号，故最小值是 1993^{1994}．

B5－077 设 n 个不同的自然数 a_1，a_2，…，a_n 有下列性质：对集合 S={a_1，a_2，…，a_n}的任何两个不同的非空子集 A、B，A 中所有数的和与B中所有数的和都不会相等．在上述条件下，求$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$的最大值．

【题说】1994 年上海市赛高三二试题 4．

【解】不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$．

对任一自然数 $k\leq n$，{a_1，a_2，…，a_k} 有 2^k-1 个非空子集，每个子集的元素和都是自然数，并且各不相同，所以最大的一个和

$$\sum_{i=1}^{k}a_i\geq 2^k-1=1+2+\cdots+2^{k-1}\qquad(1)$$

由于（1），

$$
\begin{aligned}
&1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\\
&=\frac{a_1-1}{a_1}+\frac{a_2-2}{2a_2}+\cdots+\frac{a_n-2^{n-1}}{2^{n-1}a_n}\\
&\geq\frac{(a_1+a_2)-(1+2)}{2a_2}+\frac{a_3-2^2}{2^2a_3}+\cdots+\frac{a_n-a^{n-1}}{2^{n-1}a_n}
\end{aligned}
$$

$$\geq \frac{(a_1+a_2+a_3)-(1+2+2^2)}{2^2 a_3}+\cdots+\frac{a_n-a^{n-1}}{2^{n-1}a_n}$$

$$\geq \frac{(a_1+a_2+\cdots a_n)-(1+2+\cdots+2^{n-1})}{2^{n-1}a_n}$$

$$\geq 0$$

所以

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\leq 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}$$

容易验证集合 $S=\{1,2,2^2,\cdots,2^{n-1}\}$满足题设条件，且$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}$。

综上所述，所求最大值为$2-\frac{1}{2^{n-1}}$。

B5－078 已知 95 个数 a_1，a_2，…，a_{95} 每个取值+1 或－1，求两两之积的和$\sum\limits_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{95} a_i a_j$的最小正值.

【题说】1994 年全国联赛一试题 2（6）．原题是填空题.

【解】令$N=\sum\limits_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{95} a_i a_j$设 a_i 中m个 +1，n个－1，则

$$(a_1+a_2+\cdots+a_{95})^2=\sum_{i=1}^{95}a_i^2+2N$$

即 $$(m-n)^2=2N+95$$

$$N=\frac{(m-n)^2-95}{2}$$

因为m+n=95,所以m－n为奇数.大于95的奇平方数中,最小的是$11^2=121$，故 N 最小正值是

$$N=\frac{121-95}{2}=13$$

B5－079 试求

$P(x,y)=\sum\limits_{i=1}^{10}\sum\limits_{j=1}^{10}\sum\limits_{k=1}^{10}|k(x+y-10i)\cdot(3x-6y-36j)(19x+95y-95k)|$的最小值．其中 x、y 是任意实数．

【题说】1995 年中国数学奥林匹克（第十届数学冬令营）题 3．

【解】由于对任意实数 t、a、b,

$$|t-a|+|t-b|\geq|a-b|$$

并且在 $t\in[a,b]$时等号成立．所以

$$\sum_{i=1}^{10}|x+y-10i|\geq|100-50|+|90-40|+|80-30|+|70-20|+|60-10|$$

$$=250$$

并且在 $50\le x+y\le 60$ 时，等式成立．

同样，$\sum_{j=1}^{10}|3x-6y-36j|\ge 25\times 36=900$，在 $60\le x-2y\le 72$ 时等号成立．

又 $f(t)=\sum_{k=1}^{10}|k(t-k)|$ 在 $t>10$ 的值显然大于 $t=10$ 时的值；在 $t<1$ 时的值也显然大于 $t=1$ 时的值．所以考虑 $f(t)$ 的最小值，可以假定 $t\in[1,10]$．

因为在 $n\le t\le n+1$（n 为 1 与 10 之间的自然数）时，

$f(t)=(1+2+\cdots+n)t-1^2-\cdots-n^2-(10+9+\cdots+(n+1))t+10^2+\cdots+(n+1)^2$ 是 t 的单调函数，而且

$$f(n+1)-f(n)=1+2+\cdots+n-(10+9+\cdots+(n+1))=n(n+1)-55$$

所以在 $n\ge 7$ 时，$f(n+1)\ge f(n)$．在 $n<7$ 时，$f(n+1)<f(n)$．从而 $f(t)$ 的最小值为 $f(7)=112$．

于是，$\sum_{k=1}^{10}|k(19x+95y-95k)|=95f\left(\frac{x+5y}{5}\right)\ge 95f(7)=10640$，

在 $x+5y=35$ 时等号成立．

由于 $x=55$，$y=-4$ 满足 $50\le x+y\le 60$，$60\le x-2y\le 72$，$x+5y=35$，所以此时 $P(x,y)$ 取得最小值，最小值为 $250\times 900\times 10640=2394\times 10^6$．

B5－080 设 $a_1,a_2,\cdots,a_{10}$ 是十个两两不同的正整数，它们的和为 1995，试求

$$a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_9a_{10}+a_{10}a_1$$

的最小值．

【题说】1995 年中国数学奥林匹克（第十届数学冬令营）题 5．

【解】设在 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=n$ 时，

$$a_1a_2+a_2a_2+\cdots+a_9a_{10}+a_{10}a_1 \qquad (1)$$

的最小值为 S_n，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_{10}$ 为自然数，并且将它们依大小顺序排成 $b_1\le b_2\le\cdots\le b_{10}$ 时，$b_k\ge k$（k=1，2，…，10）．

在 $n>55$ 时，至少有一个 k 使 $b_k>k$，将这个 b_k 减少 1，S_n 至少减少 $1\times(1+2)=3$．所以

$$S_n\ge S_{n-1}+3$$

从而

$$S_{1995}\ge S_{1994}+3\ge\cdots\ge S_{55}+3(1995-55)=S_{55}+5820$$

对于 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=55$，必有

$$\{a_1,a_2,\cdots,a_{10}\}=\{1,2,\cdots,10\}$$

将 10 减少为 9，和（1）至少减少 3．再将 2 个 9 减少为 8，和至少减少 $1\times 2+2+3$（在 2 个 9 之间恰好为 1，另两个与 9 相邻的数为 2 与 3 时正好减少这么多）．依此类推，直至最大的数为 6（共 5 个 6），和（1）至少减少

$$(1+2)+(1\times 2+2+3)+((1+2)\times 2+3+4)+((1+2+3)\times 2+4+5)$$

$=44$

而由 5 个 6 与 1，2，3，4，5 这 10 个数形成的和（1），如果有两个 6 相邻，总可将一个 6 与另一个相邻的数 a 对调．设…ba 66…变为…b6a6…，和（1）减少 $6\times6+ab-6a-6b=(6-a)(6-b)\geq0$．因此，在 5 个 6 均不相邻时，和最小，最小值为

$$6\times2\times(1+2+3+4+5)=180$$

所以

$$S_{1995}\geq44+180+5820=6044$$

又在 $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{10})=(1950, 1, 9, 3, 7, 5, 6, 4, 8, 2)$ 时，$a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_9a_{10}+a_{10}a_1=6044$．因此 6044 即为所求的最小值．

B5－081 设正实数的数列 x_0，x_1，…，x_{1995} 满足以下两条件：

（i）$x_0=x_{1995}$；

（ii）$x_{i-1}+\frac{2}{x_{i-1}}=2x_i+\frac{1}{x_i}$，$i=1, 2, \cdots, 1995$.

求所有满足上述条件的数列中 x_0 的最大值．

【题说】第三十六届（1995 年）国际数学奥林匹克题 4．

【解】由（ii）可得

$$x_i=\frac{x_{i-1}}{2} \text{ 或 } x_i=\frac{1}{x_{i-1}}$$

设从 x_0 开始，总共 k－t 次前一类变换和 t 次后一类变换得到 x_k．请注意，当两类变换穿插交错进行时，可能会有某些第一类变换两两抵消．（倘若两个第一类变换之间相隔奇数次第二类变换，这两个第一类变换的作用就彼此抵消．）因此

$$x_k=2^s x_0^{(-1)^t}$$

其中 $s\equiv k-t \pmod 2$

现在考察 k=1995 的情形．若 t 是偶数，则 s 是奇数并且

$$x_0=x_{1995}=2^s x_0$$

从而 $2^s=1$，这是不可能的．

于是，t 是奇数，由

$$x_0=x_{1995}=2^s x_0^{-1}$$

可得 $x_0=2^{\frac{s}{2}}$．又因为 s 是偶数，所以 $s\leq1994$，$x_0\leq2^{997}$．

另一方面，数列

$$x_j=2^{997-j}, j=0, 1, \cdots, 1994$$

$$x_{1995}=\frac{1}{x_{1994}}=2^{997}$$

满足条件（i），（ii）．

综上所述，x_0 的最大值为 2^{997}．

B5－082 α 是方程 $x^2-3x+3=0$ 的根．α 与正整数 n 以及实数 k 满足等式

$$\alpha^{1995}=k\alpha^n$$

求满足条件的 n 的最小值，及这时 k 的值．

【题说】1995 年日本数学奥林匹克预选赛题 4．

【解】由于α =（$3\pm\sqrt{3}i$）$/2=\sqrt{3}$（cos30°±isin30°），所以

$$\alpha^m=(\sqrt{3})^m(\cos(m\cdot 30°)\pm i\sin(m\cdot 30°))$$

使α^m为实数的 m 的最小值是 m=6，这时

$$\alpha^6=-3^3$$

又由于 1995=332×6+3，所以

$$\alpha^{1995}=\alpha^{1992}\cdot\alpha^3$$
$$=3^{996}\cdot\alpha^3$$

故所求的 n=3，此时 $k=3^{996}$．

B5－083 对给定的常数 p、q∈（0，1），p+q＞1，$p^2+q^2\le 1$，试求函数$f(x)=(1-x)\sqrt{p^2-x^2}+x\sqrt{q^2-(1-x)^2}$（$1-q\le x\le p$）的最大值．

【题说】1996 年江苏省赛题 5．

【解】

$$f^2(x)=(1-x)^2(p^2-x^2)+x^2[q^2-(1-x)^2]+2x(1-x)\cdot\sqrt{(p^2-x^2)[q^2-(1-x)^2]}$$

$$\le(1-x)^2(p^2-x^2)+x^2[q^2-(1-x)^2]+x(1-x)[(p^2-x^2)+q^2-(1-x)^2]$$

$$=x^2-(p^2-q^2+1)x+p^2$$

$$=\left[x-\frac{p^2-q^2+1}{2}\right]^2-\left(\frac{p^2-q^2+1}{2}\right)^2+p^2$$

$$=\left[x-\frac{p^2-q^2+1}{2}\right]^2+\frac{1}{4}[(p+q)^2-1][1-(p-q)^2]$$

$$\le\frac{1}{4}[(p+q)^2-1][1-(p-q)^2]$$

其中等号成立当且仅当

$$p^2-x^2=q^2-(1-x)^2$$

即当 $x=\dfrac{p^2-q^2-1}{2}$时，

$$f(x)|_{max}=\frac{1}{2}\sqrt{[(p+q)^2-1][1-(p-q)^2]}$$

[别解]

考虑如图的直角梯形 ABCD，易知

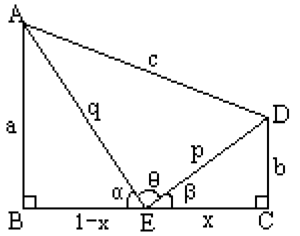
$$f(x)=b(1-x)+ax=pq\sin\beta\cos\alpha+pq\sin\alpha\cos\beta$$
$$=pq\sin(\alpha+\beta)=pq\sin\theta$$

因为 $\cos\theta=\dfrac{p^2+q^2-c^2}{2pq}\le\dfrac{p^2+q^2-1}{2pq}\le 0$，所以

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}\le\sqrt{\frac{(2pq)^2-(p^2+q^2-1)^2}{(2pq)^2}}$$

$$f(x)\le\frac{1}{2}\sqrt{((p+q)^2-1)(1-(p-q)^2)}$$

等号在$c=1$即$p^2-x^2=q^2-(1-x)^2$时成立．所以在$x=\frac{p^2-q^2+1}{2}$时，$f(x)$取得最大值$\frac{1}{2}\sqrt{((p+q)^2-1)(1-(p-q)^2)}$．



B5－084 对于 t＞0，设

$$f(t)=\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t+\frac{1}{t}+1}$$

$$g(t)=\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t+\frac{1}{t}+1}$$

求 f（t）的最小值和 g（t）的最大值．

【题说】1996 年全国联赛昆明选拔赛题 22．

【解】由不等式$x+\frac{1}{x}\geq 2$（$x>0$），可得

$$f(t)\geq 2+\sqrt{3}\neq 1\text{（当且仅当}t=1\text{ 时取等号）}$$

所以$f(t)$的最小值是$2+\sqrt{3}$．

又因$g(t)=\frac{1}{f(t)}$，所以$g(t)$的最大值是$\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$．

B5－085 x_1，x_2，…，x_{1993}满足$|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+\cdots+|x_{1992}-x_{1993}|=1993$，$y_k=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}$，则$|y_1-y_2|+|y_2-y_3|+\cdots+|y_{1992}-y_{1993}|$之最大可能值是多少？

【题说】第三届（1993 年）澳门数学奥林匹克第三轮题 2．

【解】令 n=1993．易得

$$|y_k-y_{k+1}|=\frac{1}{k(k+1)}\left|\sum_{1\leq i\leq k}i(x_i-x_{i+1})\right|$$

$$\leq\frac{1}{k(k+1)}\sum_{1\leq i\leq k}i|x_i-x_{i+1}|$$

故 $$\sum_{1\leq k\leq n-1}|y_k-y_{k+1}|\leq\sum_{1\leq i\leq n-1}i\left[\frac{1}{i(i+1)}+\frac{1}{(i+1)(i+2)}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\right]\cdot|x_i-x_{i+1}|$$

$$=\sum_{1\leq i\leq n-1}i\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{n}\right)|x_i-x_{i+1}|$$

$$\leq \sum_{1\leq i\leq n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)|x_i-x_{i+1}|$$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)n=n-1$$

最大值 n－1=1992 能达到，只需令 $x_1=t+n$，$x_2=\cdots=x_n=t$ 即可．

B5－086 设函数 $f(x)=x^2+px+q$ 与 $g(x)=x+\frac{1}{x^2}$ 在区间[1，2]的同一点上取相同的最小值，试求 f（x）在该区间上的最大值．

【题说】1996 年全国联赛一试题 1（5）．原题为选择题．

【解】由平均不等式，当 x＞0 时，有

$$g(x)=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{x^2}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$$

当 $\frac{x}{2}=\frac{1}{x^2}$，即当 $x=\sqrt[3]{2}\in[1，2]$ 时，不等式取等号．故此时 g（x）取最小值 $\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$．

因为 f（x）与 g（x）在同一点上取相等的最小值，所以有

$$-\frac{p}{2}=\sqrt[3]{2},\frac{4q-p^2}{4}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$$

解得 $p=-2\sqrt[3]{2}$，$q=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$，从而

$$f(x)=x^2-2\sqrt[3]{2}x+\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$$

由于 $1-2\sqrt[3]{2}<4-4\sqrt[3]{2}$，故 $\max f(x)=f(2)=4-\frac{5}{4}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$．

B5－087 对于非负整数，函数 f 定义如下：

f（0）=0

$$f(x)=f\left(\left[\frac{x}{10}\right]\right)+\left[\lg\frac{10}{x-10\left[\frac{x-1}{10}\right]}\right]$$

f（x）在 0≤x≤1996 中取最大值时，x 的值是多少？（[x] 表示不超过实数 x 的最大整数．）

【题说】1996 年日本数学奥林匹克预选赛题 8．

【解】设 x=10p+q（p，q 为整数，0≤q≤9），则

$$\left[\frac{x}{10}\right]=\left[p+\frac{q}{10}\right]=p$$

$$\left[\frac{x-1}{10}\right]=\left[p+\frac{q-1}{10}\right]=\begin{cases}p-1，当q=0时\\p，当q\neq0时\end{cases}$$

$$x-10\left[\frac{x-1}{10}\right]=\begin{cases}10，当q=0时\\q，当q\neq 0时\end{cases}$$

$$\left[\lg\frac{10}{x-\left[\frac{x-1}{10}\right]}\right]=\begin{cases}1，当q=1时\\0，当q\neq 1时\end{cases}$$

于是

$$f(x)=\begin{cases}f(p)+1，当q=1时，\\f(p)，当q\neq 1时\end{cases}$$

由上式易知，f（x）的值为 x 的十进制表示中数字 1 的个数．故在 $0\le x\le 1996$ 内，f（x）的最大值是 4，此时 x=1111．

B5－088 设r_1，r_2，…，r_m是给定的m个正有理数，且$\sum_{k=1}^{m}r_k=1$．对于任意自然数 n，规定

$$f(n)=n-\sum_{k=1}^{m}[r_k n]$$

求 f（n）的最大值和最小值．这里[x]表示不超过 x 的最大整数．

【题说】第二十八届（1996 年）加拿大数学奥林匹克题 5．

【解】

$$\begin{aligned}f(n)&=n-\sum_{k=1}^{m}[r_k n]\\&=n\sum_{k=1}^{m}r_k-\sum_{k=1}^{m}[r_k n]\\&=\sum_{k=1}^{m}(r_k n-[r_k n])\end{aligned}$$

因 $0\le r_k n-[r_k n]<1$，k= 1，2，…，m，故 $0\le f(n)<m$．又因 f（n）为整数，所以

$$0\le f(n)\le m-1$$

取 n 为 r_1，r_2，…，r_m 的分母的公约数，则 $[r_k n]=r_k n$（k=1，2，…，m），所以此时 f（n）=0．

B5－089 设实数 x_1，x_2，…，x_{1997} 满足条件

（1）$-\frac{1}{\sqrt{3}}\le x_i\le\sqrt{3}$（i= 1，2，…，1997）；

（2）$x_1+x_2+\cdots+x_{1997}=-318\sqrt{3}$．

试求$x_1^{12}+x_2^{12}+\cdots+x_{1997}^{12}$的最大值，并说明理由．

【题说】1997 年中国数学奥林匹克题 1．

【解】因为$x_i^2+x_j^2=\frac{1}{2}\left((x_i+x_j)^2+(x_i-x_j)^2\right)$，所以在$x_i+x_j$和一定时，$|x_i-x_j|$越大则$x_i^2+x_j^2$越大．从而

$$x_i^2+x_j^2\begin{cases}(\sqrt{3})^2+(x_i+x_j-\sqrt{3})^2,\text{若}x_i+x_j\geq\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(x_i+x_j+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2,\text{若}x_i+x_j<\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}$$

于是总可假定任两个x_i、x_j中至少有一个为$\sqrt{3}$或$-\frac{1}{\sqrt{3}}$．1997个x_i中至多有一个不是$\sqrt{3}$与$-\frac{1}{\sqrt{3}}$，设有x个$\sqrt{3}$，y个$-\frac{1}{\sqrt{3}}$及一个$-\frac{a}{\sqrt{3}}$（$-1\leq a\leq 3$），则

$$\begin{cases}x\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}y+\dfrac{a}{\sqrt{3}}=-318\sqrt{3} & (1)\\x+y+1=1997 & (2)\end{cases}$$

即
$$3x-y+a=-954 \quad (1')$$
$$x+y=1996 \quad (2')$$

相加得 $4x+a=1042$．从而 $a=1042-4x$ 为整数且 $a\equiv 2\pmod 4$．因为$-1\leq a\leq 3$，所以$a=2$，$x=\frac{1042-2}{4}=260$，$y=1736$．此时，$\sum x_i^{12}$取最大值 189548．

B5－090 设 A={1，2，…，17}．f：A→A，作函数 f 迭代：$f^{[1]}(x)=f(x)$，$f^{[k+1]}(x)=f(f^{[k]}(x))$，$k\in N_+$．如果 f 是 A→A 的一一映射，且满足

(1) 当 m＜M，1≤i≤16 时，

$$f^{[m]}(i+1)-f^{[m]}(i)\not\equiv\pm 1\pmod{17}$$
$$f^{[m]}(1)-f^{[m]}(17)\not\equiv\pm 1\pmod{17}$$

(2) 当 1≤i≤16 时，

$$f^{[M]}(i+1)-f^{[M]}(i)\equiv 1\text{ 或}-1\pmod{17}$$
$$f^{[M]}(1)-f^{[M]}(17)\equiv 1\text{ 或}-1\pmod{17}$$

试对满足上述条件的一切 f，求所对应的 M 的最大可能值，并给以证明．

【题说】1997 年中国数学奥林匹克题 5．

【解】(1) 先证 M≤8．

由于 f 是一一映射，所以

$\{f^{[k]}(1),\cdots,f^{[k]}(17)\}=\{1,2,\cdots,17\}$．$k\in N_+$

从而对 k=1，2，…，M，存在 $a_k\in A$，使 $f^{[k]}(a_k)=1$．

假设存在 k，l，（$1\leq k<l\leq M$）使得 $f^{[k]}(a_k+1)$、$f^{[k]}(a_k-1)$ 之一与 $f^{[l]}(a_l-1)$、$f^{[l]}(a_l+1)$ 之一相等，不妨设 $f^{[k]}(ak+1)=f^{[l]}(a_l+1)$．

由于 f 是一一映射，便应有 $a_k+1=f^{[l-k]}(a_l+1)$．又因 $f^{[k]}(a_k)=1=f^{[l]}(a_l)$，有 $a_k=f^{[l-k]}(a_l)$．

从而 $f^{[l-k]}(a_l+1)-f^{[l-k]}(a_l)=1$．

但这里 $1\leq l-k<M$，与 M 定义矛盾．因此，对任意 k，l，$1\leq k<l$

≤M，都有

$$f^{[k]}(a_k\pm1)\neq f^{[l]}(a_l\pm1)$$

又显然 $f^{[k]}(a_k+1)\neq f^{[k]}(a_k-1)$，k=1，2，…，M．

故 $f^{[1]}(a_1+1)$，$f^{[1]}(a_1-1)$，$f^{[2]}(a_2+1)$，$f^{[2]}(a_2-1)$，…，$f^{[M]}(a_M+1)$，$f^{[M]}(a_M-1)$ 互不相同．故 2M≤17，M≤8．

（2）证明 M=8 为最大值．

设 $$f(k)\equiv5k\pmod{17}$$

因为 $5\equiv5$，$5^2\equiv8$，$5^3\equiv6$，$5^4\equiv13$，$5^5\equiv14$，$5^6\equiv2$，$5^7\equiv10$，$5^8\equiv-1\pmod{17}$

所以，对任意 n∈{1，2，…，7}，有

$$f^{[n]}(k+1)-f^{[n]}(k)\equiv5^n\cdot(k+1)-5^n\cdot k\not\equiv\pm1\pmod{17}$$

而 $$f^{[8]}(k+1)-f^{[8]}(k)$$

$$\equiv5^8(k+1)-5^8\cdot k\equiv1\pmod{17}$$

因此 M=8 是满足条件的最大值．

B5－091 设 f（x）是定义在整数集上的整值函数，满足下列 4 条性质：

（1）对任意 x∈Z，0≤f（x）≤1996；

（2）对任意 x∈Z，f（x+1997）=f（x）；

（3）对任意 x，y∈Z，

$$f(xy)\equiv f(x)f(y)\pmod{1997}$$

（4）f（2）=999．

已知这样的函数存在且唯一，据此求满足 f（x）=1000 的最小正整数 x．

【题说】1997 年日本数学奥林匹克预选赛题 9．

【解】考虑函数 f（x）：

当 x 是 1997 的倍数时，f（x）=0；

当 x 不是 1997 的倍数时，因为 1997 是素数，x 与 1997 互素，xy≡1（mod1997）有唯一的整数解 y∈{1，2，…，1996}．定义 f（x）=y．

不难验证，上述函数满足条件（1）～（4）．所以它就是本题所说的唯一的函数 f（x）．

当 $100x\equiv1\pmod{1997}$ 时，$f(x)=1000$．此时 $x\equiv\frac{1+1997k}{1000}\equiv\frac{1+(2000-3)k}{1000}\equiv\frac{1+(2000-3)\times667}{1000}\equiv1334-2\equiv1332\pmod{1997}$．因而所求的最小正整数 x=1332．

B5－092 自三角形 ABC 的角顶引外角角平分线，两两相交得△$A_1B_1C_1$．类似地再作出△$A_2B_2C_2$、△$A_3B_3C_3$、…，以 A、B、C 和 A_n、B_n、C_n 分别表示△ABC 和△$A_nB_nC_n$ 的内角，

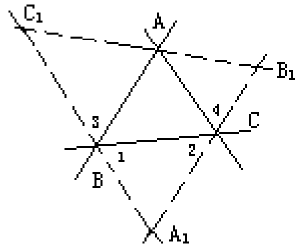
1．求证：

$$An=\frac{\pi}{2}\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}\right]+(-1)^n\frac{A}{2^n};$$

2．求 $\lim_{n\to\infty}A_n\equiv$？

【题说】1963 年杭州市赛高三二试题 2．先建立 A_n 与 A_{n-1} 递推关系，再用数学归纳法证明．

【解】



1．如图，∠1=∠3，∠1+∠B+∠3=π，

所以 $$\angle 1=\frac{\pi-B}{2}$$

同理 $$\angle 2=\frac{\pi-C}{2}$$

从而

$$A_1=\pi-\angle 1-\angle 2=\frac{B+C}{2}$$

$$=\frac{\pi-A}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$$

于是

$$A_n=\frac{\pi}{2}-\frac{A_{n-1}}{2}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{A_{n-2}}{2^2}$$

$$=\cdots$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}\right)+(-1)^n\frac{A}{2^n}$$

2． $$\lim_{n\to\infty}A_n=\frac{\pi}{2}\left[1-\frac{1}{3}\right]=\frac{\pi}{3}$$

B5－093 在平面上画出一个圆，半径为 r，圆心在直角坐标系的原点．设δ（r）是和所画的圆最近的整点到圆的距离．证明：如果圆的半径 r 充分大，便可使距离δ（r）任意小，即当 r→∞时，δ（r）→0．

【题说】1973 年匈牙利数学奥林匹克题 2．

【证】令 u=[r]．直线 x=u 上有两个相邻整点 B（u，v）和 A（u，v+1）．一个在圆内，一个在圆外，即

$$u^2+v^2\leq r^2<u^2+(v+1)^2$$

连结圆心 O 与 A，交圆于 A_1，则

$$\delta(r)\leq AA_1=\sqrt{u^2+(v+1)^2}-r$$

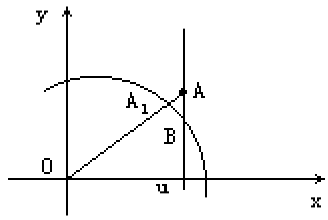
$$=\frac{u^2+(v+1)^2-r^2}{\sqrt{u^2+(v+1)^2}+r}$$
$$=\frac{u^2+(v+1)^2-(u^2+v^2)}{2r}$$
$$=\frac{2v+1}{2r}$$

而

$$v\le\sqrt{r^2-u^2}=\sqrt{(r-u)(r+u)}$$
$$<\sqrt{1\times(r+r)}=\sqrt{2r}$$

当 r→+∞时，

$$\delta(r)<\frac{2\sqrt{2r}+1}{2r}<\frac{2}{\sqrt{r}}\to 0$$



B5－094 计算：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^3-1}{2^3+1}\times\frac{3^3-1}{3^3+1}\times\frac{4^3-1}{4^3+1}\times\cdots\times\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)$$

【题说】1981 年上海市赛二试题 3．

【解】原式 $=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}$

$$=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{\infty}\left(\frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{(k+1)^2-(k+1)+1}{k^2-k+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1\times 2}{n(n+1)}\cdot\frac{(n+1)^2-(n+1)+1}{2^2-2+1}\right)$$
$$=\frac{2}{3}$$

B5－095 a，b 为正整数，且 a＞b．设 $x_n=a^2n^2+2bn$．对实数 x，$\{x\}$表示x的小数部分（$0\le\{x\}<1$）．求 $\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{x_n}\}$．

【题说】1994 年日本数学奥林匹克预选赛题 9．

【解】由

$$a^2n^2<a^2n^2+2bn<(an+1)^2$$

知，$an<\sqrt{x_n}<an+1$**，所以**

$$\{\sqrt{x_n}\}=\sqrt{a^2n^2+2bn}-an$$
$$=\frac{2bn}{\sqrt{a^2n^2+2bn}+an}$$
$$=\frac{2b}{\sqrt{a^2+\frac{2b}{n}}+a}$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\{\sqrt{x_n}\}=\frac{b}{a}$.

B5－096 在双曲线$xy=1$上，横坐标为$\frac{n}{n+1}$的点为A_n，横坐标为$\frac{n+1}{n}$的点为B_n（$n\in N$），记坐标为（1，1）的点为M，P_n（x_n，y_n）是△A_nB_nM 的外心，当 n→∞时，求 P_n 的极限点的坐标（a，b），这里$a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，$b=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

【题说】1997 年爱朋思杯——上海市赛决赛题 2．

【解】易得$A_n\left(\frac{n}{n+1},\frac{n+1}{n}\right)$，$B_n\left(\frac{n+1}{n},\frac{n}{n+1}\right)$.

△MA_nB_n 是以 A_nB_n 为底边的等腰三角形，底边中垂线方程为 y=x．

A_nM的中点为$E\left(\frac{2n+1}{2(n+1)},\frac{2n+1}{2n}\right)$.

$$k_{A_nM}=\frac{\frac{n+1}{n}-1}{\frac{n}{n+1}-1}=-\frac{n+1}{n}$$

A_nM 的中垂线方程为

$$y-\frac{2n+1}{2n}=\frac{n}{n+1}\left(x-\frac{2n+1}{2(n+1)}\right)$$

由此求得外心 P_n（x_n，y_n）的坐标

$$x_n=y_n=\frac{(2n+1)^2}{2n(n+1)}$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=2$$

（ii）f（Z_+）∩g（Z_+）=φ，

（iii）g（n）=f（f（n））+1.

求 f（240）．

【题说】第二十届（1978 年）国际数学奥林匹克题 3．本题由英国提供．

【解】令 F={f（k）}，G={g（k）}，k∈Z_+.

则每个正整数必在 F 或 G 之一，因为当 k≠1 时，f（1）小于 g（k）和 f（k），故 f（1）=1．

又按题意，第 n 个不在 F 中的整数是 g（n）=f（f（n））+1，故在

自然数片断|1，g（n）|中有 n 个值在 G 中，有 f（n）个值在 F 中，因此有

$$f(n)+n=g(n)$$

或 $$f(f(n))=f(n)+n-1$$

由此递推公式及 f（1），可计算出：

f（1）=1，g（1）=2，f（2）=3

f（f（2））=f（3）=f（2）+2－1=4

f（f（3））=f（4）=f（3）+3－1=6

f（f（4））=f（6）=f（4）+4－1=9

f（f（6））=f（9）=f（6）+6－1=14

f（f（9））=f（14）=f（9）+9－1=22

f（f（14））=f（22）=f（14）+14－1=35

f（f（22））=f（35）=f（22）+22－1=56

f（f（35））=f（56）=f（35）+35－1=90

g（35）=f（f（35））+1=91

f（57）=92

f（f（57））=f（92）=f（57）+57－1=148

f（f（92））=f（148）=f（92）+92－1=239

f（f（148））=f（239）=f（148）+148－1=386

g（148）=f（f（148））+1=f（239）+1=387

故　f（240）=388．

[注] 这两个函数的表达式非常复杂：

$$f(n)=\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}n\right],\ g(n)=\left[\frac{\sqrt{5}+3}{2}n\right]$$

这里的[x]表示不超过 x 的最大整数．

本问题是以下定理的特例：

Beatty定理　若两个无理数α，β均大于1，且满足$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$，则函数 f（n）=[nα]，g（n）=[nβ]满足

（1）f（n），g（n），$Z_+\to Z_+$为递增函数；（2）f（Z_+）∪g（Z_+）=Z_+；

（3）f（Z_+）∩g（Z_+）=φ．

本题中$\alpha=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，$\beta=\frac{\sqrt{5}+3}{2}$．

B5－022 函数 f（n）是定义在正整数集上，并取非负整数值，且对所有 m、n，有

$$f(m+n)-f(m)-f(n)=0\text{ 或 }1$$

以及 f（2）=0，f（3）＞0，f（9999）=3333．求 f（1982）．

【题说】第二十三届（1982 年）国际数学奥林匹克题 1．

【解】令 m=n=1，则 f（2）=2f（1）+（0 或 1）．

因 f（2）=0，f（1）是非负整数，故 f（1）=0．

令 m=2，n=1，则 f（3）=f（2）+f（1）+（0 或 1）．

由 f（3）＞0，f（2）=0，f（1）=0 得 f（3）=1．

下面我们先证，对于 $k<3333$ 时，有 $f(3k)=k$．

因为 $$f(m+n)\geq f(m)+f(n)$$

所以 $f(3k)\geq f[3(k-1)]+f(3)\geq f[3(k-2)]+2f(3)\geq\cdots\geq kf(3)=k$

若 $f(3k)>k$，则 $f(3k)\geq k+1$，

$$f(9999)\geq f(9999-3k)+f(3k)$$
$$\geq 3333-k+k+1>3333$$

这与题设矛盾，所以 $f(3k)=k$．

于是 $$1982=f(3\times 1982)\geq 3f(1982)$$

即 $$f(1982)\leq\frac{1982}{3}<661$$

又 $$f(1982)\geq f(3\times 660)+f(2)=660$$

所以 $$f(1982)=660$$

B5－023 已知函数 $f(x)=ax^2-c$，满足：

$$-4\leq f(1)\leq -1,\ -1\leq f(2)\leq 5$$

求 $f(3)$ 的范围．

【题说】1983 年全国联赛题 1（5），原题为选择题．

【解】由 $f(1)=a-c$，$f(2)=4a-c$ 得

$$a=\frac{1}{3}[f(2)-f(1)],\ c=\frac{1}{3}[f(2)-4f(1)]$$

所以 $$f(3)=9a-c=\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1)$$

$$\frac{8}{3}\times(-1)-\frac{5}{3}\times(-1)\leq f(3)\leq\frac{8}{3}\times 5-\frac{5}{3}\times(-4)$$

即 $$-1\leq f(3)\leq 20$$

B5－024 函数 f 定义在整数集上，且满足

$$f(n)=\begin{cases}n-3 & \text{若 } n\geq 1000\\ f[f(n+5)] & \text{若 } n<1000\end{cases}$$

求 $f(84)$．

【题说】第二届（1984 年）美国数学邀请赛题 7．

【解】由 f 的性质，

$$f(999)=f[f(1004)]=f(1001)=998$$
$$f(998)=f[f(1003)]=f(1000)=997$$
$$f(997)=f[f(1002)]=f(999)=998$$
$$f(996)=f[f(1001)]=f(998)=997$$
$$f(995)=f[f(1000)]=f(997)=998$$

因此我们推想，对 $n<1000$，有

$$f(n)=\begin{cases}997 & (n\text{为偶数})\\ 1998 & (n\text{为奇数})\end{cases}\qquad(1)$$

对 $n=999$ 至 995，（1）已经证得．

假设对大于 m 且小于 1000 的 n，（1）成立．

当 m 是偶数时，$m+5$ 是奇数，此时有

$$f(m)=f[f(m+5)]=f(998)=997$$

当 m 是奇数时，m+5 是偶数，此时有

f（m）=f[f（m+5）]=f（997）=998

因此，对于 m＜1000，（1）式成立．特别地，f（84）=997．

B5－025 函数 f 的定义域是正整数集合，且有：

（a）对于每个正整数 n，f（f（n））=4n－3；

（b）对于每个非负整数 k，f（2^k）=2^{k+1}－1．求 f（1985）的值．

【题说】1985 年匈牙利阿拉尼·丹尼尔数学竞赛（16 年龄组）题 1．

【解】设数列 n_0，n_1，n_2，…，除了 f（n_0）=n_1 之外，满足 $n_{k+1}=2n_k$－1，利用（a）和归纳法容易证明，对每一个非负整数 k 有 f（n_k）=n_{k+1}．现在从 1985 往前倒推，得到数列

1985，993，497，249，125，63，32

再由（b）得 f（32）=63．所以 f（1985）=2·1985－1=3969．

B5－026 设集合 M={x|1≤x≤9，x∈Z}，

F＝{（a，b，c，d）|a、b、c、d∈M}

定义 F 到 Z 的映射 f：

$$(a,b,c,d)\xrightarrow{f} ab-cd$$

若 u，v，x，y 都是 M 中的元素，且满足：

$$(u,v,x,y)\xrightarrow{f} 39$$

$$(u,y,x,v)\xrightarrow{f} 66$$

试求：u +v + x +y 之值．

【题说】1986 年北京市赛高一题 2（4）．

【解】由题意得：

uv－xy=39　　（1）

uy－xv=66　　（2）

（1）+（2）得　（u－x）（v+y）=105

（2）－（1）得　（y－v）（u+x）=27

因式中字母都表示非零数字，可见

u＞x，y＞v，v+y＜18，u+x＜18

所以　u－x=7，v+y=15，y－v=3，u+x=9

解得　x=1，y=9，u=8，v=6

故　u+v+x+y=24

B5－027 设 f（x）=4^x/（4^x+2）那么和式

f（1/1001）+f（2/1001）+f（3/1001）+…+f（1000/1001）

的值等于多少？

【题说】1986 年全国联赛一试题 2（3）．原题为填空题．

【解】因为 n/1001+（1001－n）/1001=1（n=1、2、…、500），而当 x +y =1 时，

f（x）+f（y）=4^x/（4^x+2）+4^y/（4^y+2）

$$=\frac{4^x(4^y+2)+4^y(4^x+2)}{(4^x+2)(4^y+2)}$$

$$=\frac{2\cdot 4^{x+y}+2(4^x+4^y)}{4^{x+y}+4+2(4^x+4^y)}=1$$

故所求和式的值为 500．

B5－028 对任意的正整数 k，令 f_1（k）定义为 k 的各位数字和的平方．对于 n≥2，令 f_n（k）=f_1（f_{n-1}（k）），求 f_{1988}（11）．

【题说】第六届（1988 年）美国数学邀请赛题 2．

【解】由定义知

$$f_1(11)=(1+1)^2=4$$
$$f_2(11)=f_1[f_1(11)]=f_1(4)=16$$
$$f_3(11)=f_1[f_2(11)]=f_1(16)=(1+6)^2=49$$
$$f_4(11)=f_1[f_3(11)]=f_1(49)=(4+9)^2=169$$
$$f_5(11)=f_1[f_4(11)]=f_1(169)=16^2=256$$
$$f_6(11)=f_1[f_5(11)]=f_1(256)=13^2=169$$

从而
$$f_n(11)\quad(n>6)=\begin{cases}256 & n\text{为奇数}\\ 169 & n\text{为偶数}\end{cases}$$

因此
$$f_{1988}(11)=169$$

B5－029　N 为正整数集，在 N 上定义函数 f 如下：f（1）=1，f（3）=3，且对 n∈N，有

$$f(2n)=f(n)$$
$$f(4n+1)=2f(2n+1)-f(n)$$
$$f(4n+3)=3f(2n+1)-2f(n)$$

问：有多少个 n∈N，且 n≤1988，使得 f（n）=n？

【题说】第二十九届（1988 年）国际数学奥林匹克题 3．本题由英国提供．

【解】通过试验，我们发现：当 n 的二进制表示为（$a_l a_{l-1}$，…，$a_1 a_0$）$_2$，a_l=1 时，有

$$f(n)=(a_0a_1\cdots a_{l-1}a_l)_2 \qquad (*)$$

用归纳法证明（*）式，奠基是显然的，设当 n＜k 时（*）式成立．考虑 f（k）．

（1）在 k 为偶数时，设 k=（$a_1a_2\cdots a_{l-1}0$）$_2$，则

$$f(k)=f[(a_1a_2\cdots a_{l-1}0)_2]=(a_{l-1}\cdots a_2a_1)_2$$
$$=(0a_{l-1}\cdots a_2a_1)_2$$

（2）在 k=4m+1 时，设 k=（$a_1a_2\cdots a_s01$）$_2$，则

$$f(k)=f[(a_1a_2\cdots a_s01)_2]$$
$$=2f[(a_1\cdots a_s1)_2]-f[(a_1\cdots a_s)_2]$$
$$=(1a_s\cdots a_1)_2+(1a_s\cdots a_1)_2-(a_s\cdots a_1)_2$$
$$=(10a_s\cdots a_1)_2$$

（3）在 k=4m+3 时，设 k=（$a_1\cdots a_s11$）$_2$，则

$$f(k)=f[(a_1\cdots a_s11)_2]$$
$$=3f[(a_1\cdots a_s1)_2]-2f[(a_1\cdots a_s)_2]$$
$$=(1a_s\cdots a_1)_2+(1a_s\cdots a_1)_2+(1a_s\cdots a_1)_2$$
$$-(a_s\cdots a_1)_2-(a_s\cdots a_1)_2$$

$=（11a_s\cdots a_1）_2$

于是（*）式对一切自然数 n 成立．

由（*）式，满足 f（n）=n 的 n 必须是"对称的"，即形如

$$(a_1a_2a_3\cdots a_3a_2a_1)_2$$

在 2s 位（$2^{2s-1}\leq n<2^{2s}$）或 2s－1 位（$2^{2s-2}\leq n<2^{2s-1}$）二进制的数中各有 2^{s-1} 个是对称的（首位与末位数字必须是 1，第二位至第 s 位的数字可以为 0，或 1，其余数字随之确定），易知

$$1988=(11111000100)_2\ (2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6+2^2)$$

在二进制中是 11 位数．11 位数中有

$$1+1+2+2+2^2+2^2+2^3+2^3+2^4+2^4+2^5=94$$

个是对称数，其中 $(11111111111)_2$ 与 $(11111011111)_2$ 大于 1988，且也只有这两个大于 1988（因为 1988 的二进制表示中前 5 位数字都是 1），所以本题的答案为 92．

B5－030 设函数 f(n)=k，n 是自然数，k 是无理数 π=3.1415926535…小数点后第 n 位的数字，并且规定 f（0）=3．令

$$F(n)=\underbrace{f(f(f\cdots f(f}_{10\text{重}}(n))\cdots))$$

求证：F[f（1990）+f（5）+f（13）]=F[f（1990）f（3）f（25）]

【题说】第一届（1990 年）希望杯高一二试题 3．

【证】以 $f^{[k]}$（n）表示函数 f（n）k 次迭代：

$$f^{[2]}(n)=f[f(n)],\ \cdots,\ f^{[k]}=f[f^{[k-1]}(n)]$$

现将 f（n），$f^{[2]}$（n），…，$f^{[8]}$（n）的取值列表如下：

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f^{[1]}(n)$	3	1	4	1	5	9	2	6	5	3
$f^{[2]}(n)$	1	1	5	1	9	3	4	2	9	1
$f^{[3]}(n)$	1	1	9	1	3	1	5	4	3	1
$f^{[4]}(n)$	1	1	3	1	1	1	9	5	1	1
$f^{[5]}(n)$	1	1	1	1	1	1	3	9	1	1
$f^{[6]}(n)$	1	1	1	1	1	1	1	3	1	1
$f^{[7]}(n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

可见自 k≥7 开始，$f^{[k]}$（n）≡1，即 F（n）≡1，n∈N．

故　F[f（1990）+f（5）+f（13）≡1=F[f（1990）f（3）f（25）]

B5－031　定义域为正整数的函数 f，满足：

$$f(n)=\begin{cases}n-3 & (\text{当}n\geq 1000\text{时})\\ f(f(n+7)) & (\text{当}n<1000\text{时})\end{cases}$$

求 f（90）．

【题说】1990 年日本第一轮选拔赛题 8．

【解】记 $f^{(m)}(n)=\underbrace{f(f\cdots(f}_{m\text{个}}(n))\cdots)$．

因为　　　90+7×130=1000

所以　　　$f(90)=f^{(2)}(97)=\cdots=f^{(131)}(1000)$

又 $f(1000)=997$

$f(997)=f^{(2)}(1004)=f(1001)=998$

$f(998)=f^{(2)}(1005)=f(1002)=999$

$f(999)=f^{(2)}(1006)=f(1003)=1000$

因此，$f^{(m)}(1000)$ 以 4 为周期，轮流取 997，998，999，1000．因为 131÷4=32 余 3，所以

$$f(90)=f^{(131)}(1000)=f^{(3)}(1000)=999$$

B5－032 设 a，b，c，x，y，z 均为实数，且 $a^2+b^2+c^2=25$，$x^2+y^2+z^2=36$，$ax+by+cz=30$．求 $(a+b+c)/(x+y+z)$ 的值．

【题说】1992 年友谊杯数学竞赛九年级题 1．

【解】由柯西不等式

$$25\times 36=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$$
$$\geq(ax+by+cz)^2=30^2$$

因此上述不等式等号成立．即有

$$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}\overset{def}{=}k$$

从而 $30=k(x^2+y^2+z^2)$，$k=\frac{5}{6}$，$(a+b+c)/(x+y+z)=5/6$．

B5－033 设 $f:N\to N$，并且对所有正整数 n，有

$$f(n+1)>f(n),\ f(f(n))=3n$$

求 $f(1992)$．

【题说】1992 年英国数学奥林匹克题 5．

【解】显然，函数 f 严格增．

若 $f(1)=1$，则 $f(f(1))=1\neq 3$，与题设矛盾．所以 $f(1)\geq 2$．

由 $3=f(f(1))\geq f(2)>f(1)\geq 2$ 得

$$f(1)=2,\ f(2)=3 \qquad (1)$$
$$f(3n)=f(f(f(n)))=3f(n) \qquad (2)$$

由（1）及（2）即得

$$f(3^n)=3^n f(1)=2\cdot 3^n$$
$$f(2\cdot 3^n)=3^n f(2)=3^{n+1},\ n=0,1,2,\cdots$$

注意到 $2\cdot 3^n$ 与 3^{n+1} 之间共有 3^n-1 个自然数，而 3^n 与 $2\cdot 3^n$ 之间也恰有 3^n-1 个自然数，由 f 的严格单调性，可得

$$f(3^n+m)=2\cdot 3^n+m,\ 0\leq m\leq 3^n,\ n=0,1,2,\cdots$$

由上式即得

$$f(2\cdot 3^n+m)=f(f(3^n+m))=3(3^n+m)$$

于是

$$f(n)=\begin{cases}2\cdot 3^k+m，若 n=3^k+m，0\leq m\leq 3^k\\ 3(3^k+m)，若 n=2\cdot 3^k+m，0\leq m\leq 3^k\end{cases}$$

由于 $1992=2\cdot 3^6+534$，所以

$$f(1992)=3(3^6+534)=3789$$

B5－034 求函数 $f(x)=[x]+[2x]+\left[\frac{5x}{3}\right]+[3x]+[4x]$ 在 $0\leq x\leq 100$ 上

所取的不同的整数值的个数．

【题说】1993 年亚太地区数学奥林匹克题 2．

【解】f是阶梯函数，在[0，3）上有22次跳跃，即0，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，1，$\frac{6}{5}$，$\frac{5}{4}$，$\frac{4}{3}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{5}{3}$，$\frac{7}{4}$，$\frac{9}{5}$，2，$\frac{9}{4}$，$\frac{7}{3}$，$\frac{12}{5}$，$\frac{5}{2}$，$\frac{8}{3}$，$\frac{11}{4}$．从而f在区间[0，3）上所取的值有22个．x每增加3，f（x）增加 35．所以在[3，6）上，f 又取 22 个新值，…．f 在[0，99）上取值的个数为 33×22=726．f 在[99，100）上所取的值的个数与 f 在[0，1]上所取的值的个数相同．在[0，1]上，f有8次跳跃：0，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，1．故f在[99，100]上取8个不同值．

综上所述，f 在[0，100] 上所取的值共

726+8=734 个

B5－035 设f（x）$=\frac{9^x}{9^x+3}$，计算和

$$f\left(\frac{1}{1996}\right)+f\left(\frac{2}{1996}\right)+\cdots+f\left(\frac{1995}{1996}\right)$$

【题说】第二十七届（1995 年）加拿大数学奥林匹克题 1．

【解】注意到

$$f（1-x）=\frac{9^{1-x}}{9^{1-x}+3}=\frac{9}{9+3\cdot 9^x}=\frac{3}{3+9^x}$$

从而 f（x）+f（1－x）$=\frac{9^x}{9^x+3}+\frac{3}{3+9^x}=1$

因此

$$f\left(\frac{1}{1996}\right)+f\left(\frac{1995}{1996}\right)=1$$

$$f\left(\frac{2}{1996}\right)+f\left(\frac{1994}{1996}\right)=1$$

$$\cdots$$

$$f\left(\frac{1995}{1996}\right)+f\left(\frac{1}{1996}\right)=1$$

原式 $=\frac{1995}{2}=997\frac{1}{2}$

B5－036 函数 f（k）是定义在正整数集 N 上，在 N 中取值的严格增函数，并且满足条件 f（f（k））=3k．试求 f（1）+f（9）十 f（96）的值．

【题说】1996 年北京市赛高一复试题 2．

【解】对 k∈N，f（f（k））=3k　　　　(1)

所以　　　f[f（f（k））]=f（3k）

又　　　f[f（f（k））]=3f（k）

所以　　　　　　$f(3k)=3f(k)$　　　　　　(2)

若 $f(1)=1$，代入 (1) 得 $f(1)=3$，矛盾．所以 $f(1)=a>1$．由 $f(k)$ 严格递增，$f(1)<f(a)=3$．故只能 $f(1)=2$，$f(2)=3$．此时，$f(3)=3f(1)=6$，

而

$$f(6)=f(3\times 2)=3f(2)=9$$
$$f(9)=3f(3)=18$$
$$f(18)=3f(6)=27$$
$$f(27)=3f(9)=54$$
$$f(54)=3f(18)=81$$

注意到，自变量由 27 变到 54，增加 27 个数，函数值相应地由 54 增至 81，也增加 27 个数，由 f 的严格递增性可知：

$$f(28)=55\quad f(29)=56\quad f(30)=57$$
$$f(31)=58\quad f(32)=59\quad \cdots$$

从而

$$f(96)=f(3\times 32)=3f(32)=3\times 59=177$$
$$f(1)+f(9)+f(96)=2+18+177=197$$

B5－037　N_+为全体正整数的集合，$f: N_+\to N_+$是满足下列 3 个条件的函数：

(1) $f(xy)=f(x)+f(y)-1$ 对任意正整数 x、y 都成立；

(2) 满足 $f(x)=1$ 的 x 只有有限个；

(3) $f(30)=4$．

求 $f(14400)$ 的值

【题说】1996 年日本数学奥林匹克预选赛题 6．

【解】由 (1) 与 (3) 得

$$\begin{aligned} f(14400)&=f(120)+f(120)-1\\ &=2(f(4)+f(30)-1)-1\\ &=2((2f(2)-1)+3)-1\\ &=4f(2)+3 \end{aligned}$$

若存在正整数 n (≥ 2) 使 $f(n)=1$，则对任意正整数 k，有 $f(n^k)=f(n^{k-1})=\cdots=f(n)=1$．这与条件 (2) 矛盾．故对 $n\geq 2$，$f(n)\geq 2$．

由 (3) 知

$$f(2)+f(3)+f(5)-2=4$$

所以 $f(2)=f(3)=f(5)=2$，从而 $f(1440)=11$．

B5－038 设 $f(n)$ 是一个在正整数集合 N 上定义且在 N 上取值的函数．证明：如果对每一个正整数 n，$f(n+1)>f[f(n)]$ 都成立，则对每一个 n，$f(n)=n$ 都成立．

【题说】第十九届 (1977 年) 国际数学奥林匹克题 6．本题由保加利亚提供．

【证】我们先用数学归纳法证明命题 A_n：对任意正整数 n，若 $m\geq n$，则 $f(m)\geq n$．

显然 A_1 真．设 A_{n-1} 真，则对任意 $m\geq n$，$f(m-1)\geq n-1$，故 $f(m)>f(f(m-1))\geq n-1$，于是 $f(m)\geq n$，从而 A_n 真．

由此可知，$f(n)\geq n$，$f(n+1)>f(f(n))\geq f(n)$．于是 f 单调增加，若有一个 n 使 $f(n)>n$，则 $f(n)\geq n+1$，$f(f(n))\geq f$

（n+1），与已知矛盾．因此只能有 f（n）=n．

B5－039 设 f（x）是定义在全体正实数上的一个函数．

1．对于任意两个正实数 x_1、x_2，f（x）满足关系式

$$f(x_1 \cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2) \quad (1)$$

求证：f（1）=0．

2．f（x）满足关系式

$$f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)\cdot \lg x+1 \quad (2)$$

求 f（x）的表达式．

【题说】1979 年宁夏区赛二试题 2．

【解】1．取 $x_1=1$，得

$$f(x_2)=f(1)+f(x_2)$$

因而 f（1）=0．

2．用 $\frac{1}{x}$ 代替（2）式中的x，得

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)\lg\frac{1}{x}+1=-f(x)\lg x+1 \quad (3)$$

由（2）、（3）解得

$$f(x)=\frac{1+\lg x}{1+\lg^2 x}$$

B5－040 设 Q 是所有有理数的集合，求满足下列条件的从 Q 到 Q 的函数 f：

（1）f（1）=2；

（2）对所有 x、y∈Q，有

$$f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1$$

【题说】1980 年五国国际数学竞赛题 1．本题由英国提供．

【解】在（2）中令 y=1 即得 f（x+1）=f（x）+1．又 f（1）=2，所以对整数x有 $f(x)=x+1$，对于有理数 $\frac{n}{m}$，取 $y=m$，则

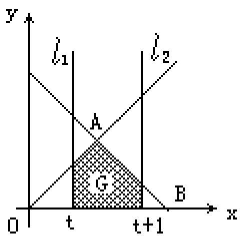
$$f(n)=f\left(\frac{n}{m}\right)(m+1)-\left(f\left(\frac{n}{m}\right)+m\right)+1$$

从而 $f\left(\frac{n}{m}\right)=\frac{n}{m}+1$，即对一切 x∈Q，$f(x)=x+1$，这函数显然合乎要求．

B5－041 在坐标平面上有两个区域 M 和 N．M 是由 y≥0、y≤x 和 y≤2－x 这三个不等式确定的．N 是随 t 变化的区域，它由不等式 t≤x≤t+1 所确定的，t 的取值范围是 0≤t≤1，设 M 和 N 的公共面积是函数 f（t），求 f（t）．

【题说】1981 年全国联赛题 1（6）．原题为选择题．

【解】如图，M 是△OAB，N 是 l_1 与 l_2 所界的带形区域，二者交集为 G（阴影部分）．



从而 $f(t)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot t\cdot t-\frac{1}{2}\cdot[2-(t+1)]\cdot[2-(t+1)]$

即 $$f(t)=-t^2+t+\frac{1}{2}$$

B5－042 已知二次函数 f（x）满足条件：1．f（－1）=0；2．对一切x**之值有**$x\leq f(x)\leq\frac{1+x^2}{2}$**成立，试求**$f(x)$**的解析表达式．**

【题说】1982 年芜湖市赛题 5．

【解】设 f（x）=ax²+bx+c（a≠0）

因为 f（－1）=0，所以 b=a+c．

由$x\leq f(x)\leq\frac{1}{2}(1+x^2)$**知**$f(1)=a+b+c=1$**．**

所以 $$b=a+c=\frac{1}{2} \qquad (1)$$

因为对一切 x 之值有：$ax^2+bx+c\geq x$

即 $ax^2+(b-1)x+c\geq 0$**，故 a＞0：**

$$\triangle=(b-1)^2-4ac\leq 0 \text{ 即 } ac>\frac{1}{16}$$

结合（1）得 $$a=c=\frac{b}{2}=\frac{1}{4}$$

所以 $$f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$$

B5－043 已知函数 f（x）=x^2-2x+2**，x∈[t，t+1] 的最小值是 g（t）．试写出函数 s=g（t）的解析表达式，并画出它的图像．**

【题说】1982 年上海市赛二试题 1．

【解】f（x）=（x－1）^{2}**+1，x∈[t，t+1]．**

当 t≤1≤t+1，即 0≤t≤1 时，f（x）在[t，t+1]上的最小值 g（t）=f（1）=1．

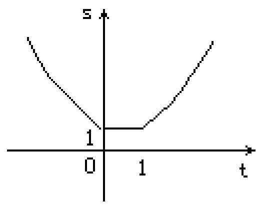
当 1＞t+1，即 t＜0 时，f（x）在[t，t+1]上的最小值

$$g(t)=f(t+1)=t^2+1$$

当 1＜t，即 t＞1 时，f（x）在[t，t+1]上的最小值 g（t）=f（t）=（t－1）^{2}**+1．函数**

$$s=g(t)=\begin{cases}t^2+1, & \text{若 } t<0\\ 1, & \text{若 } 0\leq t\leq 1\\ (t-1)^2+1, & \text{若 } t>1\end{cases}$$

的图像如图所示．



B5－044 函数

$$F(x)=|\cos^2x+2\sin x\cos x-\sin^2x+Ax+B|$$

在$0\leq x\leq\frac{3}{2}\pi$上的最大值M与参数A、B有关．问A、B取什么值时M为最小？证明你的结论．

【题说】1983 年全国联赛二试题 5．

【解】 $F(x)=|\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})+Ax+B|$

若$A=B=0$，$F(x)=\sqrt{2}|\sin(2x+\frac{\pi}{4})|$．在x为$\frac{\pi}{8}$、$\frac{5\pi}{8}$、$\frac{9\pi}{8}$时，$F(x)$取最大值$M=\sqrt{2}$．

我们证明，对任意实数A、B，$M\geq\sqrt{2}$．

如果对某一组A、B，$M<\sqrt{2}$，那么$F\left(\frac{\pi}{8}\right)$，$F\left(\frac{5\pi}{8}\right)$，$F\left(\frac{9\pi}{8}\right)$均$<\sqrt{2}$，从而

$$\sqrt{2}+\frac{\pi}{8}A+B<\sqrt{2} \qquad (1)$$

$$-\sqrt{2}+\frac{5\pi}{8}A+B>-\sqrt{2} \qquad (2)$$

$$\sqrt{2}+\frac{9\pi}{8}A+B<\sqrt{2} \qquad (3)$$

（1）+（3）－2·（2）得 0＜0，矛盾．将（1）、（2）、（3）中严格的不等式改为不严格的不等式，仍然导出矛盾，除非（1）、（2）、（3）全为等式，而（1）、（2）、（3）全为等式，即 A=B=0．

因此，$M\geq\sqrt{2}$．当且仅当$A=B=0$时，$M=\sqrt{2}$．

B5－045 f 为定义于非负实数集上的且取非负数值的函数，求所有满足下列条件的 f：

（1）f（xf（y））f（y）=f（x+y）；

（2）f（2）=0；

（3）f（x）≠0，当 0≤x＜2．

【题说】第二十七届（1986 年）国际数学奥林匹克题 5．本题由英国提供．

【解】如果ω＞2，那么在（1）中取 y=2，x=ω－2，就得

$$f(\omega)=f((\omega-2)f(2))\cdot f(2)=0$$

于是

$$f(x)=0\Leftrightarrow x\geq 2$$

因为 x≥0，在（1）中令 0≤y＜2，则

$$f(xf(y))f(y)=0\Leftrightarrow xf(y)\geq 2$$

$$f(x+y)=0\Leftrightarrow x+y\geq 2$$

这样一来，当 $0\le y<2$，$x>0$ 时，有

$$xf(y)\ge 2 \Leftrightarrow x+y\ge 2$$

即
$$x\ge \frac{2}{f(y)} \Leftrightarrow x\ge 2-y$$

所以
$$f(y)=\frac{2}{2-y}$$

综合上述，所求的 f 是

$$f(x)=\begin{cases}0, & 若x\ge 2\\ \dfrac{2}{2-x} & 若0\le x<2\end{cases}$$

不难验证这一函数满足题中条件．

B5－046 求方程 $x^2-8[x]+7=0$ 的所有解．

【题说】第十三届（1987 年）全俄数学奥林匹克十年级题 2．

【解】设 x 是原方程的解，$n=[x]$，则 $x^2+7=8n$，$n>0$，$n\le x<n+1$，于是 $n^2+7\le x^2+7<(n+1)^2+7=n^2+2n+8$．从而得 $n^2+7\le 8n<n^2+2n+8$，即

$$\begin{cases}n^2-8n+7\le 0\\ n^2-6n+8>0\end{cases}$$

解得 $1\le n<2$ 或 $4<n\le 7$．于是 n=1，5，6，7，相应地

$$x=1，\sqrt{33}，\sqrt{41}，7$$

B5－047 设 N 为自然数集合，$k\in N$．如果有一个函数 $f:N\to N$ 是严格递增的，且对每个 $n\in N$，都有 $f(f(n))=kn$．求证，对每一个 $n\in N$ 都有

$$2kn/(k+1)\le f(n)\le \frac{1}{2}(k+1)n$$

【题说】第五届（1990 年）全国冬令营选拔赛题 1．

【证】由于 f 严格递增且取整数值，所以

$$f(n+1)\ge f(n)+1$$

从而对 $m\ge n$，有

$$f(m)=f(n+m-n)\ge f(n)+m-n$$

取 $m=f(n)$，得

$$f(f(n))-f(n)\ge f(n)-n$$

所以
$$f(n)\le \frac{1}{2}(n+kn)=\frac{1}{2}(k+1)n$$

又
$$kn=f(f(n))\le \frac{1}{2}(k+1)f(n)$$

故
$$f(n)\ge 2kn/(k+1)$$

B5－048 求出满足以下要求的所有 $R\to R$ 的函数 f、g、h：

$$f(x)-g(y)=(x-y)h(x+y) \quad (1)$$

对任意的 $x、y\in R$．

【题说】1990 年中国队测试题 6．本题也是第五届中国队选拔试题．

【解】在（1）中令 $x=y$，得 $f(x)-g(y)=0$，即

$$f(x)=g(x) \quad (2)$$

（1）式变为

$$f(x)-f(y)=(x-y)h(x+y)$$

在此式中令 y=0，得

$$f(x)=f(0)+xh(x) \qquad (3)$$

代入 $f(x)-f(y)=(x-y)h(x+y)$，有

$$xh(x)-yh(y)=(x-y)h(x+y) \qquad (4)$$

在（4）式中令 y=－x，得

$$x(h(x)+h(-x))=2xh(0)$$

从而

$$h(x)+h(-x)=2h(0) \qquad (5)$$

令 $H(x)=h(x)-h(0)$，则 $H(0)=0$，$H(-x)=-H(x)$，并且由（4）得

$$xH(x)-yH(y)=(x-y)H(x+y) \qquad (6)$$

在（6）中将 y 换为－y 得

$$xH(x)-yH(y)=(x+y)H(x-y) \qquad (7)$$

由（6）、（7）得

$$\frac{H(x+y)}{x+y}=\frac{H(x-y)}{x-y} \quad ((x+y)(x-y)\neq 0)$$

这表明 $\frac{H(x)}{x}$ 为定值，设

$$H(x)=kx \quad (x\neq 0)$$

显然上式对 x=0 也成立．因此

$$h(x)=kx+h(0) \qquad (8)$$

将（8）代入（3）得

$$f(x)=kx^2+h(0)x+f(0) \qquad (9)$$

设 $h(0)=a$，$f(0)=b$，a、b 为常数，由（8）、（9）、（2）得

$$f(x)=g(x)=kx^2+ax+b$$

$$h(x)=kx+a$$

不难验证，上面的 f（x）、g（x）、h（x）确为所求．

B5－049 求方程[x/1！]+[x/2！] +…+[x/10！]=1001 的整数解．

【题说】第二十四届（1990 年）全苏数学奥林匹克十年级题 5．

【解】显然 x 是不超过 1001 的自然数．

设 f（x）=[x/1！]+[x/2！]+…+[x/10！]，则 f（x）是在正整数集上严格递增的函数．

$$f(583)=998,\ f(584)=1001$$

所以 x=584 是原方程的唯一解．

B5－050 设 f（x，y）是二元多项式，且满足下列条件：

（1）$f(1,2)=2$， (1)

（2）$yf(x,f(x,y))\equiv xf(f(x,y),y)$
$\equiv(f(x,y))^2$． (2)

试确定所有这样的 f（x，y）．

【题说】1990 年中国集训队测试题 13．

【解】由条件（2）知，x、y 是 f（x，y）的因式，即

$$f(x,y)=xyg(x,y) \qquad (3)$$

g（x，y）也为二元多项式．将（3）代入（2）式并化简得

$$g(x,y)=g(x,xyg(x,y))$$
$$=g(xyg(x,y),y)$$

比较次数即知 g（x，y）中无 x，无 y，即 g（x，y）=常数，再由（1）即得 f（x，y）= xy．

B5－051 Q^+是全体正有理数所成的集合．试作一个函数 f：$Q^+\to Q^+$，使得对任意的$x，y\in Q^+$，均有$f(xf(y))=\frac{f(x)}{y}$．

【题说】第三十一届（1990 年）国际数学奥林匹克题 4．本题由土耳其提供．

【解】将素数依大小（从小到大）排列为

$$p_1，p_2，p_3，\cdots$$

设 $a\in Q^+$，并且

$$a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\cdots p_{2k}^{\alpha_{2k}}，\alpha_i\in Z，i=1，2，\cdots，2k$$

则令
$$f(a)=p_2^{-\alpha_1}p_1^{+\alpha_2}p_4^{-\alpha_3}p_3^{+\alpha_4}\cdots p_{2k-1}^{+\alpha_{2k}}$$

对于$a=p_1^{\alpha_1}p_1^{\alpha_2}\cdots p_{2k}^{\alpha_{2k}}$，$b=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_{2k}^{\beta_{2k}}$我们有

$$f(ab)=f(p_1^{\alpha_1+\beta_1}p_2^{\alpha_2+\beta_2}\cdots p_{2k}^{\alpha_{2k}+\beta_{2k}}$$
$$=p_2^{-(\alpha_1+\beta_1)}p_1^{+(\alpha_2+\beta_2)}\cdots p_{2k}^{-(\alpha_{2k-1}+\beta_{2k-1})}p_{2k-1}^{-(\alpha_{2k}+\beta_{2k})}$$
$$=f(a)f(b)$$
$$f(f(a))=f(p_2^{-\alpha_1}p_1^{+\alpha_2}\cdots p_{2k-1}^{-\alpha_{2k}})$$
$$=p_1^{-\alpha_1}p_2^{-\alpha_2}\cdots p_{2k}^{-\alpha_{2k}}=a^{-1}$$

从而
$$f(xf(y))=f(x)f(f(y))=\frac{f(x)}{y}$$

B5－052 设 I=[0，1]，G={（x，y）|x∈I，y∈I}．求 G 到 I 的所有映射 f，使得对任何 x、y、z∈I，有

（1）f（f（x，y），z）=f（x，f（y，z））；

（2）f（x，1）=x，f（1，y）=y；

（3）f（zx，zy）=z^kf（x，y），其中 k 是与 x、y、z 都无关的数．

【题说】1991 年中国数学奥林匹克题 2．

【解】由（3）、（2），

$$f(zx,z)=z^kf(x,1)=z^kx \tag{4}$$

同样，

$$f(z,zy)=z^ky \tag{5}$$

于是（在（4）中令 u=zx，v=z；在（5）中令 u＝z，v=zy）

$$f(u,v)=\begin{cases}uv^{k-1}，& 若u\le v\\ u^{k-1}v，& 若u>v\end{cases}$$

在 k＝1 时，f（u，v）＝min（u，v）．

在 k≥2 时，取 $x=y\ge z\ge x^k$，则

$$f(f(x,y),z)=f(x^k,z)=x^kz^{k-1}$$
$$f(x,f(y,z))=f(x,x^{k-1}z)=x^{k-1}x^{k-1}z$$

由（1）得

$$x^k z^{k-1}=x^{k-1}x^{k-1}z$$

所以 k=2，f（u，v）=uv．

易知 f（u，v）=min（u，v）（k=1）及 f（u，v）=uv（k=2）均满足条件（1）、（2）、（3）．

B5－053 长为 l 的梯子靠在竖直的墙上，梯子上有一档，距水平地面及墙的距离均为 d，求梯子靠墙点距地面的高 h，答案用 l，d 的显式表示．

【题说】1991 年英国数学奥林匹克题 7．

【解】设梯子上端距地面 h，下端距墙为 b，则

$$b^2+h^2=l^2 \tag{1}$$

又考虑梯子、墙、地面构成的三角形的面积得

$$bh=d(b+h) \tag{2}$$

由（1），（2）得

$$(b+h)^2-2d(b+h)=l^2$$

所以
$$b+h=d+\sqrt{l^2+d^2}$$

$$bh=d(b+h)=d^2+d\sqrt{l^2+d^2}$$

再由这两个方程解出

$$h=\frac{d+\sqrt{l^2+d^2}\pm\sqrt{l^2-2d^2\sqrt{l^2+d^2}}}{2}$$

B5－054 设 R 是全体实数的集合．试求出所有的函数 f：R→R，使得对于 R 中的一切 x 和 y，都有 $f(x^2+f(y))=y+(f(x))^2$．

【题说】第三十三届（1992 年）国际数学奥林匹克题 2．本题由印度提供．

【解】令 $t=f^2(0)$，$f^{(2)}(x)=f[f(x)]$．在函数方程

$$f(x^2+f(y))=y+(f(x))^2 \tag{1}$$

中令 x=0，得

$$f^{(2)}(y)=y+t \tag{2}$$

由（1）、（2）有

$$x^2+f^{(2)}(y)+t=f^{(2)}[x^2+f^{(2)}(y)]$$
$$=f[f^2(x)+f(y)]=[f^{(2)}(x)]^2+y$$

即
$$x^2+y+2t=y+(x+t)^2$$

或
$$2t=t^2+2tx$$

由于此式对任意 x∈R 都成立，故 t=0，即 f（0）=0．于是（2）成为

$$f^{(2)}(y)=y\ (y\in R) \tag{3}$$

又对任意 x≥0，由（1）、（3）有

$$f(x+y)=f(x+f^{(2)}(y))=f(y)+f^2(\sqrt{x})$$

令 y=0，得

$$f(x)=f^2(\sqrt{2})\geq 0\quad(x\geq 0)$$

所以 $f(x+y)=f(x)+f(y)\geq f(y)\quad(x\geq 0)$

这就是说，f（x）是 R 上的非减函数，即若 x≥y，则 f（x）≥f（y）．

最后证明，对一切 x∈R，有 f（x）=x．事实上，若存在 z∈R，使 f（z）≠z．假如 z＜f（z），则 $f(z)\leq f^{(2)}(z)=z$，矛盾；假如 f

（z）＜z，则 $z=f^{(2)}(z)\le f(z)$，也矛盾．

显然，函数 f（x）=x 满足题设条件．

B5－055 求满足下列条件的所有函数 f：（1）取实数值；（2）对所有实数 $x\neq\frac{2}{3}$ 有定义；（3）对除 $\frac{2}{3}$ 外的所有 x 值满足方程

$$498x-f(x)=\frac{1}{2}\cdot f\left(\frac{2x}{3x-2}\right)$$

【题说】1992 年澳大利亚数学奥林匹克题 6．

【解】 证 $u=\frac{2x}{3x-2}$，则 $x=\frac{2u}{3u-2}$，$u\neq\frac{2}{3}$．从而有

$$498u-f(u)=\frac{1}{2}f\left(\frac{2u}{3u-2}\right)$$

即有方程组

$$\begin{cases}498x-f(x)=\frac{1}{2}f\left(\frac{2x}{3x-2}\right)\\ \frac{996x}{3x-2}-f\left(\frac{2x}{3x-2}\right)=\frac{1}{2}f(x)\end{cases}$$

解得 $f(x)=\frac{1992x(1-x)}{3x-2}$．

B5－056 试求一切函数 f（x），它对任意正值 x 都取正值，并且对任何正的 x 和 y 都满足等式：$f(x^y)=f(x)^{f(y)}$．

【题说】第十九届（1993 年）全俄数学奥林匹克十一年级一试题 3．

【解】显然 f（x）≡1 是一个解．假设对某一个 a＞0，有 f（a）≠1，于是由等式 $f(a)^{f(xy)}=f(a^{xy})=f(a^x)^{f(y)}=f(a)^{f(x)\cdot f(y)}$ 得到

$$f(xy)=f(x)f(y)\quad(\text{对任意 } x、y>0)\qquad(1)$$

这时由等式 $f(a)^{f(x+y)}=f(a^{x+y})=f(a^x)\cdot f(a^y)=f(a)^{f(x)}\cdot f(a)^{f(y)}=f(a)^{f(x)+f(y)}$，得到

$$f(x+y)=f(x)+f(y)\quad(\text{对任意 } x、y>0)\qquad(2)$$

由（1）我们有 $f(1)=f(1\cdot 1)=f(1)^2$，也就是 f（1）=1．再由（2）和（1）得到

$$f(n)=f(1+\cdots+1)=f(1)+\cdots+f(1)=n$$

$$f\left(\frac{m}{n}\right)\cdot n=f\left(\frac{m}{n}\right)f(n)=f\left(\frac{m}{n}\cdot n\right)=f(m)=m$$

也就是对任何 m，n∈N，都有

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{m}{n}\qquad(3)$$

假设对于某个 x＞0，f（x）≠x，不妨设 f（x）＜x（f（x）＞x 可以类似地讨论）．取 $y=\frac{m}{n}$，使 f（x）＜y＜x，由（2）和（3），f（x）=f（y+（x－y））=f（y）+f（x－y）＞f（y）=y，矛盾！因此 f（x）=x 对任意 x＞0 都成立．显然 f（x）=x 符合要求．

所以所求函数为 f（x）=1 和 f（x）=x．

B5－057 求适合以下条件的所有函数 $f:[1,+\infty)\to(1,+\infty)$：

（1）$f(x)\le 2(x+1)$；

（2）$f(x+1)=[f^2(x)-1]/x$．

【题说】1994 年中国数学奥林匹克（第九届数学冬令营）题 3．

【解】易见，函数 $f(x)=x+1$ 满足条件．下面证明这是唯一符合要求的函数．

令 $g(x)=f(x)-(x+1)$，由（2），有

$$|g(x+1)|=|f(x+1)-(x+2)|$$
$$=\frac{|f^2(x)-(x+1)^2|}{x}$$
$$=|g(x)|\cdot\frac{f(x)+x+1}{x}$$

因 $f(x)\ge 1$，故

$$|g(x)|=|g(x+1)|\cdot\frac{x}{f(x)+x+1}$$
$$\le\frac{x}{x+2}|g(x+1)| \qquad (1)$$

又由 $1\le f(x)\le 2(x+1)$，得

$$-x\le g(x)\le x+1 \qquad (2)$$

代入（1），得

$$|g(x)|\le\frac{x}{x+2}\cdot(x+2)=\frac{x(x+1)}{x+1}$$

假设 $$|g(x)|\le\frac{x(x+1)}{x+k}$$

代入（1），得

$$|g(x)|\le\frac{x(x+1)}{x+k+1}$$

因此，对任何自然数 n，都有

$$|g(x)|\le\frac{x(x+1)}{x+n}$$

令 $n\to\infty$，就得 $g(x)=0$．

从而 $f(x)=x+1$ 是满足本题条件的唯一函数．

B5－058 设 S 表示所有大于－1 的实数组成的集合．确定所有的函数 $f:S\to S$，满足以下两个条件：

（i）对于 S 内的所有 x 和 y，有

$$f(x+f(y)+xf(y))=y+f(x)+yf(x);$$

（ii）在区间 $-1<x<0$ 与 $x>0$ 的每一个内，$\frac{f(x)}{x}$ 是严格递增的．

【题说】第三十五届（1994 年）国际数学奥林匹克题 5．本题由英国提供．

【解】在 $(-1,0)$ 内，$\frac{f(x)}{x}$ 严格递增，因而 $\frac{f(x)}{x}=1$ 至多只有一个解，$u\in(-1,0)$．

在（i）中，令 $x=y=u$，得

$$f(u^2+2u)=u^2+2u$$

因为－1＜u＜0，$u^2+2u=(u+1)^2-1$，所以－1＜u^2+2u＜0，利用唯一性，得 $u^2+2u=u$，从而 u=0 或－1，与 u∈（－1，0）矛盾．所以对（－1，0）内任一数 u，必有 f（u）≠u．

类似地，在（0，∞）内没有 u，满足 f（u）=u，从而 f（u）=u 导致 u=0．在（i）中，令 x=y，得

$$f(x+(1+x)f(x))=x+(1+x)f(x)$$

从而

$$x+(1+x)f(x)=0$$

$$f(x)=-\frac{x}{1+x}$$

不难验证 $f(x)=-\frac{x}{1+x}$ 满足题设条件．

B5－059 函数 f（x）由满足下列关系式所确定：

$$(x-1)f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-f(x)=x \qquad (1)$$

其中 x≠1．求所有这样的函数．

【题说】第二十届（1994 年）全俄数学奥林匹克十一年级题 6．

【解】以 $\frac{x+1}{x-1}$ 代关系式中的 x．得

$$\frac{2}{x-1}f(x)-f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{x+1}{x-1} \qquad (2)$$

将（1）、（2）联立，消去 $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$，解得

$$f(x)=1+2x$$

容易检验，所求得的函数满足方程（1），

B5－060 求出所有定义在有理数集上的实值函数 f，满足

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$$

【题说】1994 年澳大利亚数学奥林匹克一试题 4．

【解】令 x=y=0，得 f（0）=0．

令 x =n（$n\in N_+$），y=1，得

$$f(n+1)=f(n)+f(1)+2n$$

所以

$$f(n)-f(n-1)=2(n-1)+f(1)$$

$$\sum_{k=2}^{n}(f(k)-f(k-1))=\sum_{k=2}^{n}2(k-1)+(n-1)f(1)$$

故有 $f(n)=n^2+(f(1)-1)n$．

令 f（1）－1=c，则 $f(n)=n^2+cn$．

又 $f\left(\frac{k+1}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}+\frac{k}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{2k}{n^2}$，所以

$$f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{2k}{n^2} \qquad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=(n-1)f\left(\frac{1}{n}\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k}{n^2}$$

故有

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\left(\frac{1}{n}\right)^2+c\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (2)$$

由（1）、（2）得，对任意正整数 m、n，有

$$\sum_{k=1}^{m-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=(m-1)f\left(\frac{1}{n}\right)+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{2k}{n^2}$$

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=\left(\frac{m}{n}\right)^2+c\left(\frac{m}{n}\right)$$

又

$$0=f\left(\frac{m}{n}-\frac{m}{n}\right)=f\left(\frac{m}{n}\right)+f\left(-\frac{m}{n}\right)-\frac{2m^2}{n^2}$$

$$f\left(-\frac{m}{n}\right)=\left(-\frac{m}{n}\right)^2+c\left(-\frac{m}{n}\right)$$

从而对任意有理数 x，f（x）$=x^2+cx$（其中 c 是常数）．

反之，f（x）$=x^2+cx$（c 为常数）显然满足题设条件，从而所求的函数即为 f（x）$=x^2+cx$（$x\in Q$，c 是常数）．

B5－061 非常值有理式 f(x)和实数 a 满足（f（x））^{2}－a=f（x^2）．求所有这样的 a 和 f（x）．其中的有理式是指可表为 x 的两个多项式的比的式子．

【题说】1995 年日本数学奥林匹克题 2．

【解】设 $f(x)=\frac{h(x)}{g(x)}$，其中 h（x）、g（x）为多项式，g（x）的首项系数为 1，且（h（x），g（x））=1．则

$$\frac{h^2(x)-ag^2(x)}{g^2(x)}=\frac{h(x^2)}{g(x^2)}$$

由于上式两边的分式是既约的有理式，且 g^2（x）与 g（x^2）均为首 1 的多项式，所以 g^2（x）=g（x^2），因而 g（x）$=x^k$，k 为非负整数，于是

$$h^2(x)-ax^{2k}=h(x^2) \qquad (*)$$

记 h（x）$=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$（$a_0\neq 0$），以下分 6 种情况讨论：

（1）a=0．此时 h^2（x）=h（x^2），从而 h（x）$=x^n$（$n\in N_+$），f（x）$=x^t$（t 为非零整数）；

（2）$a\neq 0$，n＜k．由（*）知无解；

（3）$a\neq 0$，n = k．比较（*）式两边对应项系数得 $a_0^2-a=a_0$，$2a_0a_1=0$，…，从而 $a_0\neq 0$，$a_1=a_2=\cdots=a_k=0$，f（x）$=a_0$，与 f（x）不为常数相矛盾；

（4）$a\neq 0$，2k＞n＞k．由（*）知 $a_0=1$，$a_1=a_2=\cdots=a_{2n-1-2k}=0$，$a_{2n-2k}=\frac{a}{2}$，$a_{2n-2k+1}=\cdots=a_{4n-4k-1}=0$，类推可得：（2n－2k）$\nmid i$ 时，$a_i=0$．若（2n－2k）$\nmid n$，则 $a_n=0$，从而（h，g）≠1，与所

设矛盾．若（2n－2k）|n，则（2n－2k）|2k，从而（*）化为

$$u^2\left(x^{2(n-k)}\right)-a\left(x^{2(n-k)}\right)^{\frac{k}{n-k}}=u\left(\left(x^{2(n-k)}\right)^2\right)$$

其中u为一个多项式，次数为$\frac{n}{2n-2k}<\frac{k}{n-k}$，$\frac{k}{n-k}$为非负整数．若$\frac{k}{n-k}$为奇数，则$u(x)=1+x^{\frac{k}{n-k}}$与次数$<\frac{k}{n-k}$矛盾，所以上式无解；若$\frac{n}{n-k}$为偶数，则函数方程

$$h^2(x)-ax^{\frac{k}{n-k}}=h(x^2)$$

有使$a\neq 0$，$2\frac{k}{n-k}>\deg(h(x))>\frac{k}{n-k}$的解，由递降法即得矛盾．

（5）$a\neq 0$，$2k=n$．易知$a_0=1$，$a_1=\cdots=a_{n-1}=0$，$a_n=1$，$a=2$是唯一解；

（6）$a\neq 0$，$n>2k$．则$a_0=1$，$a_1=\cdots=a_n=0$，与（h，g）=1相矛盾．

综上所述，所要求的a和f为

$a=0$，$f(x)=x^t$（t为非零整数）；

$a=2$，$f(x)=x^t+\frac{1}{x^t}$（t为正整数）．

B5－062 设S={0，1，2，3，…}是所有非负整数的集合．找到所有在S上定义、取值于S中的满足下面条件的函数f：

$f(m+f(n))=f(f(m))+f(n)$，对所有m，n∈S成立．

【题说】第三十七届（1996年）国际数学奥林匹克题3．本题由罗马尼亚提供．

【解】设f：S→S满足条件．

令m=n=0，得$f(f(0))=f(f(0))+f(0)$，所以$f(0)=0$，令m=0，得

$$f(f(n))=f(n) \qquad (1)$$

于是

$$f(m+f(n))=f(m)+f(n) \qquad (2)$$

记f的值域为T．由（1）可知，T中任一数f（n）是f的不动点．而f的不动点，当然在f的值域中．因此，f的值域就等于f的不动点全体．

设m≥n∈T，则$f(m)=m$，$f(n)=n$．于是

$$f(m+n)=f(m+f(n))=f(m)+f(n)=m+n$$

从而m+n∈T．又$f(m-n)+f(n)=f(m-n+f(n))=f(m-n+n)=f(m)$，从而$f(m-n)=f(m)-f(n)=m-n$，即m－n∈T．

若T≠{0}，设T中最小的正数为d．对任一数c∈T，设c=kd+r，k为自然数，0≤r＜d，则kd∈T，r=c－kd∈T．由d的最小性得r=0．即T中任一数c都是d的倍数．

对任一非负整数n，令n=qd+t，q为非负整数，0≤t＜d，则由上面所说，$f(t)=h_td$，h_t为非负整数．

$f(n)=f(qd+t)=f((q-1)d+t)+f(d)$

$=f((q-1)d+t)+d$

$=\cdots=qd+f(t)=qd+h_t d$

于是，所求函数一定是如下形式：

$$f(n)=qd+h_t d$$

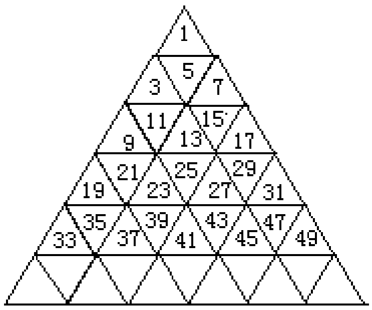
其中非负整数 q、t 由 $n=qd+t$，$0\le t<d$ 定出．而 h_t（t=1，2，…，d－1）为任意非负整数，$h_0=0$．

反之，设函数为上述形式，则对任意 m、n∈S，设 m=qd+t，f（n）=kd，则

$$\begin{aligned}f(m+f(n))&=f(qd+t+kd)=f((q+k)d+t)\\&=(q+k)d+f(t)=qd+f(t)+kd\\&=f(m)+f(n)\end{aligned}$$

即这样的函数满足要求．

B5－063 将奇数依大小顺序排成如图所示的三角形数阵，从上到下第 m 行中从左到右的第 n 个数记为 a（m，n）．



（1）试用 m，n 的代数式表示 a（m，n）；

（2）若 a（m，n）=1997，试求 m 与 n 之值；

（3）由行的中间项 1，5，13，25，41，…构成一个数列，试求此数列前 p 项之和．

【题说】1997 年江苏省赛题 4．

【解】（1）因第一个奇数为 1，…，第 k 个奇数为 2k－1，前 k 个奇数之和为 k^2，故在三角数阵中，前 m－1 行共有 $(m-1)^2$ 个奇数，a（m，n）是第 $(m-1)^2+n$ 个奇数，从而 $a(m,n)=2[(m-1)^2+n]-1$；

（2）若 a（m，n）=1997，而 $(m-1)^2+n=999$．因为 $1\le n\le 2m-1$，故上述方程正整数解为 m=32，n=38；

（3）第 p 行共有 2p－1 个奇数，故正中的奇数是该行第 p 个奇数，而第p行的第p个奇数是第 $(p-1)^2+p$ 个奇数．因此 $S_p=\sum_{k=1}^{p}\{2[(p-1)^2+p]-1\}=\frac{p(2p^2+1)}{3}$．

B5－064 设 f（x）是 5 次多项式，x=－1 是 5 次方程 f（x）+1=0 的 3 重根，x=1 是 5 次方程 f（x）－1=0 的 3 重根．求 f（x）．

【题说】1997 年日本数学奥林匹克预选赛题 8．

【解】由 x=－1 是 f（x）+1=0 的 3 重根知 $f'(x)=(x+1)^2h(x)$．再由 x=1 是 f（x）－1=0 的 3 重根知 $f'(x)=a(x-1)$

^{2}（$x+1$）^{2}，其中 $a\in R$．所以 $f(x)=a\left(\frac{x^5}{5}-\frac{2}{3}x^3+x\right)+b$，$a$，$b\in R$．由 $f(1)=f(-1)=0$ 解得 $a=\frac{15}{8}$，$b=0$．故所求的多项式为

$$f(x)=\frac{3}{8}x^5-\frac{5}{4}x^3+\frac{15}{8}x$$

B5－065 假设 a_1，a_2，…，a_n 是自然数 1，2，…n 的某一种排列，对 1，2，…，n 的所有排列，求和

$$|a_1-1|+|a_2-2|+\cdots+|a_n-n|$$

的最大值．

【题说】1957 年匈牙利数学奥林匹克题 3．

【解】将和中绝对值符号去掉（在 $a_k-k<0$ 时，$|a_k-k|$ 换成 $k-a_k$），原来的和表成 2n 项的和，其中 1，2，…，n 各出现两次，而且有 n 项负 n 项正，因此 1，1，2，2，…，n，n 中前 n 项为负，后 n 项为正时和最大（在 $a_1=n$，$a_2=n-1$，…，$a_n=1$ 时恰好达到）．

当 $n=2k$ 时，最大值为

$$2\times(1+2+\cdots+n)-4\times(1+2+\cdots+k)=k=\frac{n^2}{2}$$

当 $n=2k+1$ 时，最大值为

$$2\times(1+2+\cdots+n)\ 4\times(1+2+\cdots+k)\ 2(k+1)\ k(n+1)=\frac{n^2-1}{2}$$

B5－066 证明：如果三个素数组成算术数列，并包这个数列的公差不被 6 整除，那么这个数列的最小数是 3．

【题说】1963 年～1964 年波兰数学奥林匹克二试题 1．

【证】设三个素数 $p_1<p_2<p_3$ 成等差数列，则公差 $d=p_3-p_2$ 是两个奇数之差，因而 d 为偶数，$p_1=p_2-d$ 为奇数．所以 $p_1\geq 3$．

因为 d 不被 6 整除，所以 $d\equiv 2$ 或 4（mod6）．$2d\equiv 4$ 或 2（mod6）．

若 $p_1\equiv 1$（mod 6），则在 $d\equiv 2$（mod 6）时，$p_2=p_1+d\equiv 3$（mod 6）；在 $d\equiv 4$（mod 6）时，$p_3=p_1+2d\equiv 3$（mod 6）．即 p_2 或 p_3 被 3 整除，与 p_2、p_3 为素数矛盾．

若 $p_1\equiv 5$（mod 6），同样导出 p_2 或 p_3 被 3 整除，矛盾．

因此，只有 $p_1\equiv 3$（mod 6），即素数 $p_1=3$．

B5－067 设定义域为一切实数的函数 f（x）满足下列条件：

（1）对任意实数 x，均有 $f(x)\geq 2$；

（2）对任意实数 x_1、x_2，均有

$$f(x_1+x_2)\leq f(x_1)+f(x_2)$$

试证：对任意实数 x_1、x_2．均有

$$\lg f(x_1+x_2)\leq \lg f(x_1)+\lg f(x_2)$$

【题说】1979 年天津市赛二试题 2．

【证】对于任意实数 x_1、x_2，由条件（1），

$$f(x_1)\geq 2,\ f(x_2)\geq 2$$

分别乘以$\frac{1}{2}f(x_2)$，$\frac{1}{2}f(x_1)$再相加得

$$f(x_1)+f(x_2)\leq f(x_1)\cdot f(x_2)$$

又由条件（2）得

$$f(x_1+x_2)\leq f(x_1)+f(x_2)\leq f(x_1)\cdot f(x_2)$$

由于有条件（1），可对上式取对数，得

$$\lg f(x_1+x_2)\leq \lg f(x_1)+\lg f(x_2)$$

B5－068 函数 f 定义在实数集上，且对一切实数 x 满足等式：f（2+x）=f（2－x）和 f（7+x）=f（7－x）．设 x=0 是 f（x）=0 的一个根，记 f（x）=0 在区间－1000≤x≤1000 中的根的个数为 N．求 N 的最小值．

【题说】第二届（198 年）美国数学邀请赛题 12．

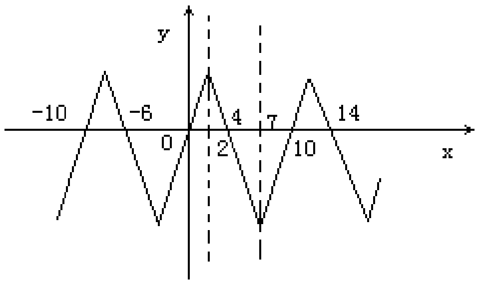
【解】由已知条件，有

$$f(x)=f(2+(x-2))=f(2-(x-2))=f(4-x)\quad(1)$$

及
$$f(x)=f(4-x)=f(7-(x+3))$$
$$=f(7+x+3)=f(x+10)$$

在（1）中令 x=0，得 f（4）=f（10）=0．

区间[－1000，1000]是 f（x）的 200 个周期．因此[－1000，1000] 上 f（x）至少有 1+200×2=401 个根．



我们可以构造出一个“锯齿形”函数，满足上述所有条件，它在区间[－1000，1000]上有 401 个根，除此以外不再有其他根，因此，所求 N 的最小值为 401．

B5－069 设 a＞1，a、θ均为实数，试求当θ变化时，函数

$$\frac{(a+\sin\theta)(4+\sin\theta)}{1+\sin\theta}$$

的最小值．

【题说】1986 年上海市赛二试题 1．

【解】原式$=(\sin\theta+1)+\frac{3(a-1)}{\sin\theta+1}+a+2$

$$=\left(\sqrt{\sin\theta+1}-\sqrt{\frac{3(a-1)}{\sin\theta+1}}\right)^2+2\sqrt{3(a-1)}+a+2$$

当$1<a\leq\frac{7}{3}$时，$0<\sqrt{3(a-1)}\leq 2$，取$\theta=\arcsin(\sqrt{3(a-1)}-1)$，则原式取最小值$2\sqrt{3(a-1)}+a+2$．

当$a>\frac{7}{3}$时，$\frac{\sqrt{3(a-1)}}{\sin\theta+1}>\sqrt{\sin\theta+1}$，取θ = π / 2，则原式取最小值

$2+\frac{3(a-1)}{2}+a+2=\frac{5a+5}{2}$.

B5－070 求$|\cdots||x_1-x_2|-x_3|-\cdots-x_{1990}|$最大值，其中 x_1，x_2，…，x_{1990} 是 1 至 1990 不同的自然数.

【题说】第二十四届（1990 年）全苏数学奥林匹克九年级题 7.

【解】 对于非负数 x、y、z，有$|x-y|\le\max\{x，y\}$，$\max\{\max\{x，x\}，z\}=\max\{x，y，z\}$

记
$$S_n=|\cdots||x_1-x_2|-x_3|-\cdots-x_n|$$
则
$$\begin{aligned}S_{1990}&\le\max\{S_{1989}，x_{1990}\}\\&\le\max\{S_{1988}，x_{1989}，x_{1990}\}\\&\le\cdots\\&\le\max\{x_1，x_2，\cdots，x_{1990}\}\\&=1990\end{aligned}$$

因为 S_{1990} 与 $x_1+x_2+\cdots+x_{1990}=1+2+\cdots+1990=995\cdot1991$ 的奇偶性相同，所以 $S_{1990}\le1989$.

令$\{x_n\}$为 2，4，5，3；6，8，9，7；…1986，1988，1989，1987；1990，1．则对于任意的 k=1，2，…，497，$S_{4k}=0$．于是

$$S_{1990}=||S_{1988}-1990|-1|=1989$$

即所求的最大值为 1989.

B5－071 设 n 是给定的自然数，n≥3，对 n 个给定的实数 a_1，a_2，…，a_n，记$|a_i-a_j|$（1≤i，j≤n）的最小值为m．求在$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1$的条件下，上述m的最大值.

[题设] 1992 年上海市赛高三二试题 4.

【解】不妨设 $a_1\le a_2\le\cdots\le a_n$．于是，$a_2-a_1\ge m$，$a_3-a_2\ge m$，…，$a_n-a_{n-1}\ge m$，$a_j-a_i\ge(j-i)m$（1≤i＜j≤n）.

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i\le j\le n}(a_i-a_j)^2&\ge m^2\sum_{1\le i\le j\le n}(i-j)^2\\&=m^2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}\\&=\frac{m^2}{6}\sum_{k=1}^{n-1}[2k(k+1)(k+2)-3k(k+1)]\\&=\frac{m^2}{6}[\frac{1}{2}(n-1)n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)]\\&=\frac{m^2}{12}n^2(n^2-1)\end{aligned}$$

另一方面，由$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1$可得

$$\sum_{1\le i\le j\le n}(a_i-a_j)^2=n-1-2\sum_{1\le i\le j\le n}a_ia_j$$

$$=n-\left(\sum_{i=1}^{n}a_j\right)^2\leq n$$

故 $$n\geq\frac{m^2}{12}n^2\ (n^2-1)$$

$$m\leq\sqrt{\frac{12}{n\left(n^2-1\right)}}$$

当且仅当$\sum_{i=1}^{n}a_i=0$，a_1，a_2，…，a_n成等差数列时取等号．

所以，m的最大值为$\sqrt{\frac{12}{n(n^2-1)}}$．

[别解]不妨设 a_1，a_2，…，a_n 中正数不少于负数．设其中最大的非正数为 a，则

$$1=\sum a_i^2\geq\sum_{j=-t}^{s}(a+jm)^2(s+t+1=n\text{并且}s\geq t)$$

$$\geq m^2\sum_{j=-t}^{s}j^2$$

$$\geq m^2\left(\sum_{j=1}^{[\frac{n}{2}]}j^2+\sum_{j=1}^{[\frac{n-1}{2}]}j^2\right)$$

$$=\begin{cases}m^2\cdot\dfrac{(n-1)(n+1)n}{12},n\text{为奇数}\\ m^2\cdot\dfrac{n(n+2)(n+1)+(n-2)n(n-1)}{24},n\text{为偶数}\end{cases}$$

$$\geq m^2\frac{(n^2-1)n}{12}$$

所以$m\leq\sqrt{\frac{12}{n(n^2-1)}}$．当且仅当n为奇数，$\{a_1，a_2，a_n\}=\{0，\pm\sqrt{\frac{12}{n(n^2-1)}}，\pm2\sqrt{\frac{12}{n(n^2-1)}}，…，\pm\sqrt{\frac{3(n-1)}{n(n-1)}}\}$时等号成立．

B5－072 函数 f 定义在区间（0，1）上，且

$$f\ (x)\ =\begin{cases}x\text{，当}x\text{是无理数}\\ \dfrac{p+1}{q}\text{，当}x=\dfrac{p}{q}\text{，}(p\text{，}q)=1\text{，}0<p<q\end{cases}$$

求函数f在区间$\left(\frac{7}{8},\frac{8}{9}\right)$上的最大值．

【题说】1992 年捷克和斯洛伐克数学奥林匹克（最后一轮）题 5．

【解】$f\left(\frac{15}{17}\right)=\frac{16}{17}$即为f在区间$\left(\frac{7}{8},\frac{8}{9}\right)$上的最大值．

事实上，若x是无理数$\in\left(\frac{7}{8},\frac{8}{9}\right)$，则$\frac{16}{17}>\frac{8}{9}>x=f(x)$．若$x$是有理数，记$x=\frac{p}{q}$，$(p,q)=1$，$0<p<q$．则$\frac{7}{8}<\frac{p}{q}<\frac{8}{9}$，即$8(q-p)<q<9(q-p)$．

若$q-p\geq 3$，则$q>8(q-p)\geq 24$，$q\geq 25$，所以$f(x)=\frac{p+1}{q}=\frac{p}{q}=\frac{1}{q}<\frac{8}{9}+\frac{1}{25}<\frac{16}{17}$．

若$q-p=2$，则$16<q<18$，即$q=17$，$p=15$，$f(x)=\frac{16}{17}$．

若 $q-p=1$，则 $8<q<9$，这不可能．

B5－073 设自然数a、b、c、d满足$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}<1$及$a+c=20$．求$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$的最大值．

【题说】1993 年上海市赛高三二试题 4．

【解】不妨设 $a\leq c$．记 $b=a+p$，$d=c+q$，这里 p、$q\in N$．由

$$1>\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a}{a+p}+\frac{d}{c+q}$$
$$=\frac{ac+aq+ac+cp}{ac+aq+pq+cp}$$

可知 $ac<pq$．

因为$1-\left(\frac{a}{a+p}+\frac{c}{c+q}\right)=\frac{pq-ac}{(a+p)(c+q)}$，而

$(a+p)(c+q)=ac+pq+cp+aq$
$=ac+pq+cpq+a-(q-1)(cp-a)$
$\leq ac+pq+cpq+a=(a+pq)(c+1)$

所以

$$1-\left(\frac{a}{a+p}+\frac{c}{c+q}\right)\geq 1-\left(\frac{a}{a+pq}+\frac{c}{c+1}\right)$$

即

$$\frac{a}{a+p}+\frac{c}{c+q}\leq\frac{a}{a+pq}+\frac{c}{c+1}$$

因 $pq>ac$，故 $pq\geq ac+1$，

$$\frac{a}{a+pq}+\frac{c}{c+1}\leq\frac{a}{a+ac+1}+\frac{c}{c+1}$$

从而

$$\frac{a}{a+p}+\frac{c}{c+q}\leq\frac{a}{a+ac+1}+\frac{c}{c+1}$$
$$=1-\frac{1}{(a+ac+1)(c+1)}$$

因 a+c=20，a≤c，故（a，c）有 10 组数：（1，19），（2，18），…，（10，10），对应的（a+ac+1）（c+1）的值顺次是 420，741，990，1173，1296，1365，1386，1365，1308，1221，其中 1386 最大．因此，所求的最大值为

$$1-\frac{1}{1386}=\frac{1385}{1386}\left(\text{或}\frac{7}{99}+\frac{13}{14}\right)$$

【注】若$a+c\leq n$（n为大于1的自然数），则在$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}<1$时，$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$的最大值为$1-\frac{1}{m}$，其中$m=\left[\frac{2n+1}{3}\right]\left(\left[\frac{2n+1}{3}\right]\left[\frac{n}{3}\right]+1\right)$，[x]为表示不小于x的最小整数．

B5－074 给定 k∈N 及实数 a＞0，在条件

$$k_1+k_2+\cdots+k_r=k$$

（k_i∈N，1≤r≤k）下，求

$$a^{k_1}+a^{k_2}+\cdots+a^{k_r}$$

的最大值．

【题说】1993 年中国数学奥林匹克（第八届数学冬令营）题 2．

【解】因 $a^{k_1+k_2-1}+a-a^{k_1}-a^{k_2}=a(a^{k_1-1}-1)(a^{k_2-1}-1)\geq 0$

所以 $a^{k_1}+a^{k_2}\leq a+a^{k_1+k_2-1}$，故

$$a^{k_1}+a^{k_2}+\cdots+a^{k_r}\leq a+a^{k_1+k_2-1}+a^{k_3}+\cdots+a^{k_r}$$

$$\leq\cdots\leq(r-1)a+a^{k-r+1}$$

当且仅当 k_1，k_2，…，k_r 中有 r－1 个 1，一个为 k－r+1 时等号成立，所以最大值即（r－1）$a+a^{k-r+1}$．

B5－075 设函数 f：[0，1] →R 满足：

（1）f（x）≥0，∀x∈[0，1]；

（2）f（1）=1；

（3）f（x）+f（y）≤f（x+y），x，y，x+y∈[0，1]．

求出最小的常数 c，使 f（x）≤cx 对一切满足上述条件的函数 f 及一切 x∈[0，1]都成立，并证明你的结论．

【题说】第二十二届（1993 年）美国数学奥林匹克题 3．

【证】最小常数 c=2．

首先，我们证明：如果 f 满足（1）－（3），则 f（x）≤2x 对一切 x∈[0，1]成立．

由（3）与（1），f（x）≤f（x）+f（y）≤f（x+y），即 f（x）在[0，1]上是增函数．

对 x∈（0，1]，取非负整数 n，使

$$\frac{1}{2^{n+1}}<x\leq\frac{1}{2^n}$$

而由（3），2f（x）≤f（2x），所以

2^nf（x）≤2^{n-1}f（2x）≤2^{n-2}f（2^2x）≤…≤f（2^nx）≤f（1）=1＜2^{n+1}x

$$f(x)<2x$$

又显然有 f（0）+f（1）≤f（0+1）=f（1），所以由（1），

$$f(0)=0$$

于是 f（x）≤2x，x∈[0，1]．

另一方面，令

$$f(x)=\begin{cases}0，0\le x\le \frac{1}{2}\\ 1，\frac{1}{2}<x\le 1\end{cases}$$

这函数显然满足（1）和（2）

设x，y及$x+y$都在$[0，1]$内，由对称性可以假定$x\le \frac{1}{2}$，从而

$$f(x)+f(y)=f(y)\le f(x+y)$$

即 f（x）满足题述的所有条件．

如果$0<c<2$，取$x\in\left(\frac{1}{2},\frac{1}{c}\right)$，则$f(x)=1>cx$，所以2为所求的最小常数．

B5－076 设a_1，a_2，…，a_{1994}均为正实数，且$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\cdots+\frac{1}{1-a_{1994}}=1$，则$a_1a_2\cdots a_{1994}$的最小值是$1993^{1994}$．

【题说】 1994 年四川省赛题 1（4）．原题为填空题．

【解】设$x_i=\frac{1}{1+a_i}$，则$a_i=\frac{1-x_i}{x_i}$，且$x_i>0$，$\sum_{i=1}^{1994}x_i=1$．

所以
$$\begin{aligned}a_1a_2\cdots a_{1994}&=\frac{1}{x_1x_2\cdots x_{1994}}\cdot(x_2+x_3+\cdots+x_{1994})(x_1+x_3+x_4+\cdots+x_{1994})\cdots(x_1+x_2+\cdots+x_{1993})\\&\ge\frac{1}{x_1x_2\cdots x_{1994}}\cdot 1993\cdot\sqrt[1993]{x_2x_3\cdots x_{1994}}\cdot 1993\cdot\sqrt[1993]{x_1x_3\cdots x_{1994}}\cdot 1993\cdot\cdots\sqrt[1993]{x_1x_2\cdots x_{1993}}\\&=1993^{1994}\end{aligned}$$

当且仅当 x_i 相等，即 a_i 相等时取等号，故最小值是 1993^{1994}．

B5－077 设 n 个不同的自然数 a_1，a_2，…，a_n 有下列性质：对集合 $S=\{a_1，a_2，\cdots，a_n\}$的任何两个不同的非空子集 A、B，A 中所有数的和与B中所有数的和都不会相等．在上述条件下，求$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$的最大值．

【题说】1994 年上海市赛高三二试题 4．

【解】不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$．

对任一自然数 $k\le n$，$\{a_1，a_2，\cdots，a_k\}$ 有 2^k-1 个非空子集，每个子集的元素和都是自然数，并且各不相同，所以最大的一个和

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \geq 2^k - 1 = 1 + 2 + \cdots + 2^{k-1} \tag{1}$$

由于（1），

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$$

$$=\frac{a_1-1}{a_1}+\frac{a_2-2}{2a_2}+\cdots+\frac{a_n-2^{n-1}}{2^{n-1}a_n}$$

$$\geq\frac{(a_1+a_2)-(1+2)}{2a_2}+\frac{a_3-2^2}{2^2a_3}+\cdots+\frac{a_n-a^{n-1}}{2^{n-1}a_n}$$

$$\geq\frac{(a_1+a_2+a_3)-(1+2+2^2)}{2^2a_3}+\cdots+\frac{a_n-a^{n-1}}{2^{n-1}a_n}$$

$$\geq\frac{(a_1+a_2+\cdots a_n)-(1+2+\cdots+2^{n-1})}{2^{n-1}a_n}$$

$$\geq 0$$

所以

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\leq 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}$$

容易验证集合 $S=\{1，2，2^2，\cdots，2^{n-1}\}$满足题设条件，且$1+\frac{1}{2}+$ $+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}$.

综上所述，所求最大值为$2-\frac{1}{2^{n-1}}$.

B5－078 已知 95 个数 a_1，a_2，…，a_{95} 每个取值+1 或－1，求两两之积的和$\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{95} a_ia_j$的最小正值.

【题说】1994 年全国联赛一试题 2（6）．原题是填空题.

【解】令$N=\sum_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{95} a_ia_j$设 a_i 中m个 $+1$，n个－1，则

$$(a_1+a_2+\cdots+a_{95})^2=\sum_{i=1}^{95}a_i^2+2N$$

即

$$(m-n)^2=2N+95$$

$$N=\frac{(m-n)^2-95}{2}$$

因为m+n=95,所以m－n为奇数.大于95的奇平方数中,最小的是$11^2=121$，故N最小正值是

$$N=\frac{121-95}{2}=13$$

B5－079 试求

$P(x,y)=\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{10}\sum_{k=1}^{10}|k(x+y-10i)\cdot(3x-6y-36j)(19x+95y-95k)|$的最小值．其中 x、y 是任意实数．

【题说】1995 年中国数学奥林匹克（第十届数学冬令营）题 3．

【解】由于对任意实数 t、a、b，

$$|t-a|+|t-b|\geq|a-b|$$

并且在 $t\in[a,b]$时等号成立．所以

$$\sum_{i=1}^{10}|x+y-10i|\geq|100-50|+|90-40|+|80-30|+|70-20|+|60-10|$$

$$=250$$

并且在 $50\leq x+y\leq 60$ 时，等式成立．

同样，$\sum_{j=1}^{10}|3x-6y-36j|\geq 25\times 36=900$，在$60\leq x-2y\leq 72$时等号成立．

又$f(t)=\sum_{k=1}^{10}|k(t-k)|$在$t>10$的值显然大于 $t=10$时的值；在 $t<1$ 时的值也显然大于 $t=1$ 时的值．所以考虑 f（t）的最小值，可以假定 $t\in[1,10]$．

因为在 $n\leq t\leq n+1$（n 为 1 与 10 之间的自然数）时，

$f(t)=(1+2+\cdots+n)t-1^2-\cdots-n^2-(10+9+\cdots+(n+1))t+10^2+\cdots+(n+1)^2$ 是 t 的单调函数，而且

$$f(n+1)-f(n)=1+2+\cdots+n-(10+9+\cdots+(n+1))$$
$$=n(n+1)-55$$

所以在 $n\geq 7$ 时，$f(n+1)\geq f(n)$．在 $n<7$ 时，$f(n+1)<f(n)$．从而 f（t）的最小值为 $f(7)=112$．

于是，$\sum_{k=1}^{10}|k(19x+95y-95k)|=95f\left(\frac{x+5y}{5}\right)\geq 95f(7)=10640$，在$x+5y=35$时等号成立．

由于 $x=55$，$y=-4$ 满足 $50\leq x+y\leq 60$，$60\leq x-2y\leq 72$，$x+5y=35$，所以此时 P（x，y）取得最小值，最小值为 $250\times 900\times 10640=2394\times 10^6$．

B5－080 设 a_1，a_2，…，a_{10} 是十个两两不同的正整数，它们的和为 1995，试求

$$a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_9a_{10}+a_{10}a_1$$

的最小值．

【题说】1995 年中国数学奥林匹克（第十届数学冬令营）题 5．

【解】设在 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=n$ 时，

$$a_1a_2+a_2a_2+\cdots+a_9a_{10}+a_{10}a_1 \qquad (1)$$

的最小值为 S_n，其中 a_1，a_2，…，a_{10} 为自然数，并且将它们依大小顺序排成 $b_1\leq b_2\leq\cdots\leq b_{10}$ 时，$b_k\geq k$（k=1，2，…，10）．

在 $n>55$ 时，至少有一个 k 使 $b_k>k$，将这个 b_k 减少 1，S_n 至少减少 $1\times(1+2)=3$．所以

$$S_n \geq S_{n-1}+3$$

从而

$$S_{1995} \geq S_{1994}+3 \geq \cdots \geq S_{55}+3(1995-55)=S_{55}+5820$$

对于 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=55$，必有

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_{10}\}=\{1, 2, \cdots, 10\}$$

将 10 减少为 9，和（1）至少减少 3．再将 2 个 9 减少为 8，和至少减少 1×2+2+3（在 2 个 9 之间恰好为 1，另两个与 9 相邻的数为 2 与 3 时正好减少这么多）．依此类推，直至最大的数为 6（共 5 个 6），和（1）至少减少

$$(1+2)+(1\times2+2+3)+((1+2)\times2+3+4)+((1+2+3)\times2+4+5)=44$$

而由 5 个 6 与 1，2，3，4，5 这 10 个数形成的和（1），如果有两个 6 相邻，总可将一个 6 与另一个相邻的数 a 对调．设…ba 66…变为…b6a6…，和（1）减少 $6\times6+ab-6a-6b=(6-a)(6-b)\geq0$．因此，在 5 个 6 均不相邻时，和最小，最小值为

$$6\times2\times(1+2+3+4+5)=180$$

所以

$$S_{1995} \geq 44+180+5820=6044$$

又在 $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{10})=(1950, 1, 9, 3, 7, 5, 6, 4, 8, 2)$ 时，$a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_9a_{10}+a_{10}a_1=6044$．因此 6044 即为所求的最小值．

B5－081 设正实数的数列 $x_0, x_1, \cdots, x_{1995}$ 满足以下两条件：

（i）$x_0=x_{1995}$；

（ii）$x_{i-1}+\dfrac{2}{x_{i-1}}=2x_i+\dfrac{1}{x_i}$，$i=1, 2, \cdots, 1995$．

求所有满足上述条件的数列中 x_0 的最大值．

【题说】第三十六届（1995 年）国际数学奥林匹克题 4．

【解】由（ii）可得

$$x_i=\frac{x_{i-1}}{2} \text{ 或 } x_i=\frac{1}{x_{i-1}}$$

设从 x_0 开始，总共 k－t 次前一类变换和 t 次后一类变换得到 x_k．请注意，当两类变换穿插交错进行时，可能会有某些第一类变换两两抵消．（倘若两个第一类变换之间相隔奇数次第二类变换，这两个第一类变换的作用就彼此抵消．）因此

$$x_k=2^s x_0^{(-1)^t}$$

其中 $s\equiv k-t \pmod 2$

现在考察 k=1995 的情形．若 t 是偶数，则 s 是奇数并且

$$x_0=x_{1995}=2^s x_0$$

从而 $2^s=1$，这是不可能的．

于是，t 是奇数，由

$$x_0=x_{1995}=2^s x_0^{-1}$$

可得 $x_0=2^{\frac{s}{2}}$．又因为 s 是偶数，所以 $s\leq1994$，$x_0\leq2^{997}$．

另一方面，数列

$$x_j=2^{997-j}，j=0，1，\cdots，1994$$

$$x_{1995}=\frac{1}{x_{1994}}=2^{997}$$

满足条件（i），（ii）.

综上所述，x_0 的最大值为 2^{997}.

B5－082 α是方程 $x^2-3x+3=0$ 的根．α与正整数 n 以及实数 k 满足等式

$$\alpha^{1995}=k\alpha^n$$

求满足条件的 n 的最小值，及这时 k 的值.

【题说】1995 年日本数学奥林匹克预选赛题 4.

【解】由于 $\alpha=(3\pm\sqrt{3}i)/2=\sqrt{3}(\cos30°\pm i\sin30°)$，所以

$$\alpha^m=(\sqrt{3})^m(\cos(m\cdot30°)\pm i\sin(m\cdot30°))$$

使 α^m 为实数的 m 的最小值是 m=6，这时

$$\alpha^6=-3^3$$

又由于 1995=332×6+3，所以

$$\alpha^{1995}=\alpha^{1992}\cdot\alpha^3$$
$$=3^{996}\cdot\alpha^3$$

故所求的 n=3，此时 $k=3^{996}$.

B5－083 对给定的常数 p、q∈（0，1），p+q＞1，$p^2+q^2\le1$，试求函数 $f(x)=(1-x)\sqrt{p^2-x^2}+x\sqrt{q^2-(1-x)^2}$（$1-q\le x\le p$）的最大值.

【题说】1996 年江苏省赛题 5.

【解】

$$\begin{aligned}
f^2(x)&=(1-x)^2(p^2-x^2)+x^2[q^2-(1-x)^2]+2x(1-x)\cdot\sqrt{(p^2-x^2)[q^2-(1-x)^2]}\\
&\le(1-x)^2(p^2-x^2)+x^2[q^2-(1-x)^2]+x(1-x)[(p^2-x^2)+q^2-(1-x)^2]\\
&=x^2-(p^2-q^2+1)x+p^2\\
&=\left[x-\frac{p^2-q^2+1}{2}\right]^2-\left(\frac{p^2-q^2+1}{2}\right)^2+p^2\\
&=\left[x-\frac{p^2-q^2+1}{2}\right]^2+\frac{1}{4}[(p+q)^2-1][1-(p-q)^2]\\
&\le\frac{1}{4}[(p+q)^2-1][1-(p-q)^2]
\end{aligned}$$

其中等号成立当且仅当

$$p^2-x^2=q^2-(1-x)^2$$

即当 $x=\frac{p^2-q^2-1}{2}$ 时，

$$f(x)|_{max}=\frac{1}{2}\sqrt{[(p+q)^2-1][1-(p-q)^2]}$$

[别解]

考虑如图的直角梯形 ABCD，易知

f（x）=b（1－x）+ax=pqsinβcosα+pqsinαcosβ

=pqsin（α+β）＝pqsinθ

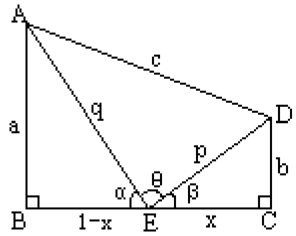
因为 $\cos\theta=\frac{p^2+q^2-c^2}{2pq}\le\frac{p^2+q^2-1}{2pq}\le 0$，所以

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}\le\sqrt{\frac{(2pq)^2-(p^2+q^2-1)^2}{(2pq)^2}}$$

$$f(x)\le\frac{1}{2}\sqrt{((p+q)^2-1)(1-(p-q)^2)}$$

等号在 $c=1$ 即 $p^2-x^2=q^2-(1-x)^2$ 时成立．所以在 $x=\frac{p^2-q^2+1}{2}$ 时，

f（x）取得最大值 $\frac{1}{2}\sqrt{((p+q)^2-1)(1-(p-q)^2)}$．



B5－084 对于 t＞0，设

$$f(t)=\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t+\frac{1}{t}+1}$$

$$g(t)=\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t+\frac{1}{t}+1}$$

求 f（t）的最小值和 g（t）的最大值．

【题说】1996 年全国联赛昆明选拔赛题 22．

【解】由不等式 $x+\frac{1}{x}\ge 2$（$x>0$），可得

$$f(t)\ge 2+\sqrt{3}\ne 1\text{（当且仅当 }t=1\text{ 时取等号）}$$

所以 f（t）的最小值是 $2+\sqrt{3}$．

又因 $g(t)=\frac{1}{f(t)}$，所以 g（t）的最大值是 $\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$．

B5－085 x_1，x_2，…，x_{1993} 满足 $|x_1-x_2+|x_2-x_3|+\cdots+|x_{1992}-x_{1993}|=1993$，$y_k=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}$，则 $|y_1-y_2|+|y_2-y_3|+\cdots+|y_{1992}-y_{1993}|$ 之最大可能值是多少？

【题说】第三届（1993 年）澳门数学奥林匹克第三轮题 2．

【解】令 n=1993．易得

$$|y_k-y_{k+1}|=\frac{1}{k(k+1)}\left|\sum_{1\le i\le k} i(x_i-x_{i+1})\right|$$

$$\le\frac{1}{k(k+1)}\sum_{1\le i\le k} i|x_i-x_{i+1}|$$

故 $$\sum_{1\le k\le n-1}|y_k-y_{k+1}|\le\sum_{1\le i\le n-1} i\left[\frac{1}{i(i+1)}+\frac{1}{(i+1)(i+2)}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\right]\cdot |x_i-x_{i+1}|$$

$$=\sum_{1\le i\le n-1} i\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{n}\right)|x_i-x_{i+1}|$$

$$\le\sum_{1\le i\le n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)|x_i-x_{i+1}|$$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)n=n-1$$

最大值 n－1=1992 能达到，只需令 $x_1=t+n$，$x_2=\cdots=x_n=t$ 即可．

B5－086 设函数$f(x)=x^2+px+q$与$g(x)=x+\frac{1}{x^2}$在区间[1，2]的同一点上取相同的最小值，试求 f（x）在该区间上的最大值．

【题说】1996 年全国联赛一试题 1（5）．原题为选择题．

【解】由平均不等式，当 x＞0 时，有

$$g(x)=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{x^2}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$$

当$\frac{x}{2}=\frac{1}{x^2}$，即当$x=\sqrt[3]{2}\in[1,2]$时，不等式取等号．故此时g（x）取最小值$\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$．

因为 f（x）与 g（x）在同一点上取相等的最小值，所以有

$$-\frac{p}{2}=\sqrt[3]{2},\frac{4q-p^2}{4}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$$

解得 $p=-2\sqrt[3]{2}$，$q=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$，从而

$$f(x)=x^2-2\sqrt[3]{2}x+\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$$

由于 $1-2\sqrt[3]{2}<4-4\sqrt[3]{2}$，故$\max f(x)=f(2)=4-\frac{5}{4}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$．

B5－087 对于非负整数，函数 f 定义如下：

$$f(0)=0$$

$$f(x)=f\left(\left[\frac{x}{10}\right]\right)+\left[\lg\frac{10}{x-10\left[\frac{x-1}{10}\right]}\right]$$

f（x）在 0≤x≤1996 中取最大值时，x 的值是多少？（[x] 表示不超过

实数 x 的最大整数．）

【题说】1996 年日本数学奥林匹克预选赛题 8．

【解】设 x=10p+q（p，q 为整数，0≤q≤9），则

$$\left[\frac{x}{10}\right]=\left[p+\frac{q}{10}\right]=p$$

$$\left[\frac{x-1}{10}\right]=\left[p+\frac{q-1}{10}\right]=\begin{cases}p-1，当q=0时\\ p，当q\neq 0时\end{cases}$$

$$x-10\left[\frac{x-1}{10}\right]=\begin{cases}10，当q=0时\\ q，当q\neq 0时\end{cases}$$

$$\left[\lg\frac{10}{x-\left[\frac{x-1}{10}\right]}\right]=\begin{cases}1，当q=1时\\ 0，当q\neq 1时\end{cases}$$

于是

$$f（x）=\begin{cases}f（p）+1，当q=1时，\\ f（p），当q\neq 1时\end{cases}$$

由上式易知，f（x）的值为 x 的十进制表示中数字 1 的个数．故在 0≤x≤1996 内，f（x）的最大值是 4，此时 x=1111．

B5－088 设r_1，r_2，…，r_m是给定的m个正有理数，且$\sum_{k=1}^{m} r_k=1$．对于任意自然数 n，规定

$$f（n）=n-\sum_{k=1}^{m}[r_k n]$$

求 f（n）的最大值和最小值．这里[x]表示不超过 x 的最大整数．

【题说】第二十八届（1996 年）加拿大数学奥林匹克题 5．

【解】

$$\begin{aligned}f（n）&=n-\sum_{k=1}^{m}[r_k n]\\ &=n\sum_{k=1}^{m}r_k-\sum_{k=1}^{m}[r_k n]\\ &=\sum_{k=1}^{m}（r_k n-[r_k n]）\end{aligned}$$

因 $0\le r_k n-[r_k n]<1$，k= 1，2，…，m，故 0≤f（n）<m．又因 f（n）为整数，所以

$$0\le f（n）\le m-1$$

取 n 为 r_1，r_2，…，r_m 的分母的公约数，则 $[r_k n]=r_k n$（k=1，2，…，m），所以此时 f（n）=0．

B5－089 设实数 x_1，x_2，…，x_{1997} 满足条件

（1）$-\frac{1}{\sqrt{3}}\le x_i\le\sqrt{3}$（i = 1，2，…，1997）；

（2）$x_1+x_2+\cdots+x_{1997}=-318\sqrt{3}$．

试求$x_1^{12}+x_2^{12}+\cdots+x_{1997}^{12}$的最大值，并说明理由．

【题说】1997年中国数学奥林匹克题1．

【解】因为$x_i^2+x_j^2=\frac{1}{2}$（$(x_i+x_j)^2+(x_i-x_j)^2$），所以在x_i+x_j和一定时，$|x_i-x_j|$越大则$x_i^2+x_j^2$越大．从而

$$x_i^2+x_j^2\begin{cases}(\sqrt{3})^2+(x_i+x_j-\sqrt{3})^2, 若x_i+x_j\geq\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(x_i+x_j+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2, 若x_i+x_j<\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}$$

于是总可假定任两个x_i、x_j中至少有一个为$\sqrt{3}$或$-\frac{1}{\sqrt{3}}$．1997个x_i中至多有一个不是$\sqrt{3}$与$-\frac{1}{\sqrt{3}}$，设有x个$\sqrt{3}$，y个$-\frac{1}{\sqrt{3}}$及一个$-\frac{a}{\sqrt{3}}$（$-1\leq a\leq 3$），则

$$\begin{cases}x\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}y+\frac{a}{\sqrt{3}}=-318\sqrt{3} & (1)\\ x+y+1=1997 & (2)\end{cases}$$

即 $3x-y+a=-954$　　(1′)

$x+y=1996$　　(2′)

相加得 $4x+a=1042$．从而 $a=1042-4x$ 为整数且 $a\equiv 2 \pmod 4$．因为$-1\leq a\leq 3$，所以$a=2$，$x=\frac{1042-2}{4}=260$，$y=1736$．此时，$\sum x_i^{12}$取最大值 189548．

B5－090 设 A={1，2，…，17}．f：A→A，作函数 f 迭代：$f^{[1]}(x)=f(x)$，$f^{[k+1]}(x)=f(f^{[k]}(x))$，$k\in N_+$．如果 f 是 A→A 的一一映射，且满足

(1) 当 m＜M，1≤i≤16 时，

$f^{[m]}(i+1)-f^{[m]}(i)\not\equiv\pm 1 \pmod{17}$

$f^{[m]}(1)-f^{[m]}(17)\not\equiv\pm 1 \pmod{17}$

(2) 当 1≤i≤16 时，

$f^{[M]}(i+1)-f^{[M]}(i)\equiv 1$ 或 $-1 \pmod{17}$

$f^{[M]}(1)-f^{[M]}(17)\equiv 1$ 或 $-1 \pmod{17}$

试对满足上述条件的一切 f，求所对应的 M 的最大可能值，并给以证明．

【题说】1997年中国数学奥林匹克题5．

【解】(1) 先证 M≤8．

由于 f 是一一映射，所以

$\{f^{[k]}(1), \cdots, f^{[k]}(17)\}=\{1, 2, \cdots, 17\}$．$k\in N_+$

从而对 k=1，2，…，M，存在 $a_k\in A$，使 $f^{[k]}(a_k)=1$．

假设存在 k，l，（$1\leq k<l\leq M$）使得 $f^{[k]}(a_k+1)$、$f^{[k]}(a_k-1)$ 之一与 $f^{[l]}(a_l-1)$、$f^{[l]}(a_l+1)$ 之一相等，不妨设 $f^{[k]}(ak+1)=f^{[l]}$

(a_l+1)．

由于 f 是一一映射，便应有 $a_k+1=f^{[l-k]}(a_l+1)$．又因 $f^{[k]}(a_k)=1=f^{[l]}(a_l)$，有 $a_k=f^{[l-k]}(a_l)$．

从而 $f^{[l-k]}(a_l+1)-f^{[l-k]}(a_l)=1$．

但这里 $1\leq l-k<M$，与 M 定义矛盾．因此，对任意 k，l，$1\leq k<l\leq M$，都有

$$f^{[k]}(a_k\pm 1)\neq f^{[l]}(a_l\pm 1)$$

又显然 $f^{[k]}(a_k+1)\neq f^{[k]}(a_k-1)$，$k=1, 2, \cdots, M$．

故 $f^{[1]}(a_1+1)$，$f^{[1]}(a_1-1)$，$f^{[2]}(a_2+1)$，$f^{[2]}(a_2-1)$，…，$f^{[M]}(a_M+1)$，$f^{[M]}(a_M-1)$ 互不相同．故 $2M\leq 17$，$M\leq 8$．

（2）证明 M=8 为最大值．

设 $$f(k)\equiv 5k \pmod{17}$$

因为 $5\equiv 5$，$5^2\equiv 8$，$5^3\equiv 6$，$5^4\equiv 13$，$5^5\equiv 14$，$5^6\equiv 2$，$5^7\equiv 10$，$5^8\equiv -1 \pmod{17}$

所以，对任意 $n\in\{1, 2, \cdots, 7\}$，有

$$f^{[n]}(k+1)-f^{[n]}(k)\equiv 5^n\cdot(k+1)-5^n\cdot k\not\equiv \pm 1 \pmod{17}$$

而 $$f^{[8]}(k+1)-f^{[8]}(k)$$
$$\equiv 5^8(k+1)-5^8\cdot k\equiv 1 \pmod{17}$$

因此 M=8 是满足条件的最大值．

B5－091 设 f（x）是定义在整数集上的整值函数，满足下列 4 条性质：

（1）对任意 $x\in Z$，$0\leq f(x)\leq 1996$；

（2）对任意 $x\in Z$，$f(x+1997)=f(x)$；

（3）对任意 x，$y\in Z$，

$$f(xy)\equiv f(x)f(y) \pmod{1997}$$

（4）$f(2)=999$．

已知这样的函数存在且唯一，据此求满足 $f(x)=1000$ 的最小正整数 x．

【题说】1997 年日本数学奥林匹克预选赛题 9．

【解】考虑函数 f（x）：

当 x 是 1997 的倍数时，$f(x)=0$；

当 x 不是 1997 的倍数时，因为 1997 是素数，x 与 1997 互素，$xy\equiv 1 \pmod{1997}$ 有唯一的整数解 $y\in\{1, 2, \cdots, 1996\}$．定义 $f(x)=y$．

不难验证，上述函数满足条件（1）～（4）．所以它就是本题所说的唯一的函数 f（x）．

当 $100x\equiv 1 \pmod{1997}$ 时，$f(x)=1000$．此时 $x\equiv\frac{1+1997k}{1000}\equiv\frac{1+(2000-3)k}{1000}\equiv\frac{1+(2000-3)\times 667}{1000}=1334-2=1332 \pmod{1997}$．因而所求的最小正整数 x=1332．

B5－092 自三角形 ABC 的角顶引外角角平分线，两两相交得 $\triangle A_1B_1C_1$．类似地再作出 $\triangle A_2B_2C_2$、$\triangle A_3B_3C_3$、…，以 A、B、C 和 A_n、B_n、

C_n 分别表示△ABC 和△$A_nB_nC_n$ 的内角，

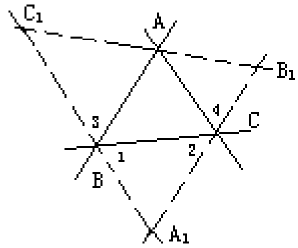
1．求证：

$$An=\frac{\pi}{2}\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}\right]+(-1)^n\frac{A}{2^n};$$

2．求 $\lim_{n\to\infty} A_n$≡？

【题说】1963 年杭州市赛高三二试题 2.先建立 A_n 与 A_{n-1} 递推关系，再用数学归纳法证明.

【解】



1．如图，∠1=∠3，∠1+∠B+∠3=π，

所以 $$\angle 1=\frac{\pi-B}{2}$$

同理 $$\angle 2=\frac{\pi-C}{2}$$

从而

$$A_1=\pi-\angle 1-\angle 2=\frac{B+C}{2}$$

$$=\frac{\pi-A}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$$

于是

$$A_n=\frac{\pi}{2}-\frac{A_{n-1}}{2}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{A_{n-2}}{2^2}$$

$$=\cdots$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}\right)+(-1)^n\frac{A}{2^n}$$

2． $$\lim_{n\to\infty} A_n=\frac{\pi}{2}\left[1-\frac{1}{3}\right]=\frac{\pi}{3}$$

B5－093 在平面上画出一个圆，半径为 r，圆心在直角坐标系的原点．设δ（r）是和所画的圆最近的整点到圆的距离．证明：如果圆的半径 r 充分大，便可使距离δ（r）任意小，即当 r→∞时，δ（r）→0．

【题说】1973 年匈牙利数学奥林匹克题 2．

【证】令 u=[r]．直线 x=u 上有两个相邻整点 B（u，v）和 A（u，v+1）．一个在圆内，一个在圆外，即

$$u^2+v^2\leq r^2<u^2+(v+1)^2$$

连结圆心 O 与 A，交圆于 A_1，则

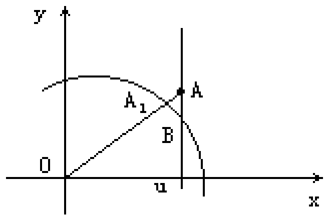
$$\delta(r) \leq AA_1 = \sqrt{u^2+(v+1)^2} - r$$
$$= \frac{u^2+(v+1)^2-r^2}{\sqrt{u^2+(v+1)^2}+r}$$
$$= \frac{u^2+(v+1)^2-(u^2+v^2)}{2r}$$
$$= \frac{2v+1}{2r}$$

而

$$v \leq \sqrt{r^2-u^2} = \sqrt{(r-u)(r+u)}$$
$$< \sqrt{1\times(r+r)} = \sqrt{2r}$$

当 r→+∞时，

$$\delta(r) < \frac{2\sqrt{2r}+1}{2r} < \frac{2}{\sqrt{r}} \to 0$$



B5－094 计算：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^3-1}{2^3+1}\times\frac{3^3-1}{3^3+1}\times\frac{4^3-1}{4^3+1}\times\cdots\times\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)$$

【题说】1981 年上海市赛二试题 3．

【解】原式 $= \lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}$

$$= \lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{\infty}\left(\frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{(k+1)^2-(k+1)+1}{k^2-k+1}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1\times2}{n(n+1)}\cdot\frac{(n+1)^2-(n+1)+1}{2^2-2+1}\right)$$
$$= \frac{2}{3}$$

B5－095 a，b 为正整数，且 a＞b．设 $x_n=a^2n^2+2bn$．对实数 x，{x}表示x的小数部分（0≤{x}＜1）．求 $\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{x_n}\}$**．**

【题说】1994 年日本数学奥林匹克预选赛题 9．

【解】由

$$a^2n^2 < a^2n^2+2bn < (an+1)^2$$

知，$an < \sqrt{x_n} < an+1$**，所以**

$$\{\sqrt{x_n}\}=\sqrt{a^2n^2+2bn}-an$$
$$=\frac{2bn}{\sqrt{a^2n^2+2bn}+an}$$
$$=\frac{2b}{\sqrt{a^2+\frac{2b}{n}}+a}$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\{\sqrt{x_n}\}=\frac{b}{a}$．

B5－096 在双曲线 $xy=1$ 上，横坐标为 $\frac{n}{n+1}$ 的点为 A_n，横坐标为 $\frac{n+1}{n}$ 的点为 B_n（$n\in N$），记坐标为（1，1）的点为 M，P_n（x_n，y_n）是△A_nB_nM 的外心，当 $n\to\infty$ 时，求 P_n 的极限点的坐标（a，b），这里 $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，$b=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$．

【题说】1997 年爱朋思杯——上海市赛决赛题 2．

【解】易得 $A_n\left(\frac{n}{n+1},\frac{n+1}{n}\right)$，$B_n\left(\frac{n+1}{n},\frac{n}{n+1}\right)$．

△MA_nB_n 是以 A_nB_n 为底边的等腰三角形，底边中垂线方程为 y=x．

A_nM 的中点为 $E\left(\frac{2n+1}{2(n+1)},\frac{2n+1}{2n}\right)$．

$$k_{A_nM}=\frac{\frac{n+1}{n}-1}{\frac{n}{n+1}-1}=-\frac{n+1}{n}$$

A_nM 的中垂线方程为

$$y-\frac{2n+1}{2n}=\frac{n}{n+1}\left(x-\frac{2n+1}{2(n+1)}\right)$$

由此求得外心 P_n（x_n，y_n）的坐标

$$x_n=y_n=\frac{(2n+1)^2}{2n(n+1)}$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=2$$

故极限点的坐标为（2，2）．

B6 数列

B6-001　有一群儿童，他们的年龄之和 50 岁，其中最大的 13 岁，有一个是 10 岁；除去这个 10 岁儿童之外，其余儿童的年龄都是整数且恰好组成一个等差数列．问有几个儿童？每个儿童是几岁？

【题说】1956 年北京、天津市赛二试题 1．

【解】设除去 10 岁的那个儿童外，他们的岁数为

$$a，a+d，a+2d，\cdots，a+nd$$

且 $a+nd=13$．

于是 $$a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(a+nd)$$

$$=(n+1)a+\frac{n(n+1)}{2}d=50-10=40$$

亦即 $$(n+1)(2a+nd)=80$$

或 $$(n+1)(a+13)=80$$

可见，$(n+1)|80$．但 $a+13>13$，又 $a+13<2\times13=26$，故 $3<n+1<6$．

当 $n+1=4$ 时，由 $4(a+13)=80$，得 $a=7$，从而 $d=2$，共 5 个儿童，岁数为 7，9，10，11，13．

当 $n+1=5$ 时，$5(a+13)=80$，$a=3$．但 $d=\frac{13-3}{4}$ 不是整数，这是不可能的，于是解是唯一的．

B6-002　在公比大于 1 的等比数列中，最多有几项是在 100 和 1000 之间的整数．

【题说】第四届（1972 年）加拿大数学奥林匹克题 10．

【解】考虑等比数列

$$(100\le)a<ar<ar^2<\cdots<ar^{n-1}(\le1000)$$

其中 $r>1$ 是公比，a 为首项，各项都是整数．因此 r 为有理数．设 $r=p/q$，$(p,q)=1$，$p>q$．

因为 $ar^{n-1}=a(p/q)^{n-1}$ 是整数，所以 q^{n-1} 整除 a．

如果 $q\ge3$，则有

$$1000\ge a(p/q)^{n-1}\ge a\left(\frac{q+1}{q}\right)^{n-1}\ge(q+1)^{n-1}$$

$$\ge4^{n-1}$$

而有 $n\le5$．

如果 $q=1$，则

$$1000\ge a\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}\ge a\left(\frac{q+1}{q}\right)^{n-1}$$

$$=a\cdot2^{n-1}\ge100\cdot2^{n-1}$$

而有 $n\le4$．

如果 $q=2$，则

$$1000\ge a\left(\frac{q+1}{q}\right)^{n-1}=a\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\ge100\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

得 $n\le6$．取 $a=2^7=128$，$r=\frac{3}{2}$ 为公比，数列的 6 项：128，192，288，432，648，972 在 100 与 1000 之间．

B6-003　若实数 a_1，a_2，a_3，a_4 满足

$$(a_1^2+a_2^2)a_4^2-2a_2(a_1+a_3)a_4+a_2^2+a_3^2=0$$

求证：a_1，a_2，a_3 成等比数列，且公比为 a_4．

【题说】1978 年上海市赛二试题 5．

【证】将 $(a_1^2+a_2^2)a_4^2-2a_2(a_1+a_3)a_4+a_2^2+a_3^2=0$

看成关于 a^4 的二次方程，则判别式

$$a_2^2(a_1+a_3)^2-(a_1^2+a_2^2)(a_2^2+a_3^2)\geq 0$$

即
$$-(a_2^2-a_1a_3)^2\geq 0$$

因此，$a_2^2=a_1a_3$．即a_1，a_2，a_3成等比数列．

因为判别式为 0，方程两根相等，由韦达定理

$$a_4=\frac{a_2(a_1+a_3)}{a_1^2+a_2^2}=\frac{a_2(a_1+a_3)}{a_1^2+a_1a_3}=\frac{a_2}{a_1}$$

即 a_4 是等比数列 a_1，a_2，a_3 的公比．

B6-004　如果 1、x、y 三个正数，既依次是一个等差数列的第 l 项、第 m 项、第 n 项，又依次是一个等比数列的第 l 项、第 m 项、第 n 项，试确定 x、y 应满足的关系式．

【题说】1983 年上海市赛一试题 1（6）．

【解】设该等差数列的公差为 d．若 d≠0，则

$$\begin{cases}x-1=(m-l)d\\ y-1=(n-1)d\end{cases}$$

所以
$$\frac{x-1}{y-1}=\frac{m-l}{n-l}$$

又设该等比数列的公比为 q，则 q≠1，且有

$$\begin{cases}\dfrac{x}{1}=q^{m-l}\\ \dfrac{y}{1}=q^{n-l}\end{cases}$$

所以
$$\frac{\lg x}{\lg y}=\frac{m-l}{n-l}$$

于是$\frac{\lg x}{\lg y}=\frac{x-1}{y-1}$，即$x^{y-1}=y^{x-1}$．

若 d=0，则 x=y=1．此时仍有 $x^{y-1}=y^{x-1}$．</

B6-005　n^2（n≥4）个正数排成 n 行 n 列

$$\begin{array}{cccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n}\\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n}\\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots & a_{4n}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn}
\end{array}$$

其中每一行的数成等差数列，每一列的数成等比数列，并且所有公比相等．已知 $a_{24}=1$，$a_{42}=1/8$，$a_4=3/16$，求 $a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44}+\cdots+a_{nn}$．

【题说】1990 年全国联赛一试题 4．

【解】设第一行公差为 d，各列公比为 q，

则
$$a_{ik}=[a_{11}+(k-1)d]q^{i-1}$$

从而
$$a_{24}=(a_{11}+3d)q=1$$
$$a_{42}=(a_{11}+d)q^3=1/8$$
$$a_{43}=(a_{11}+2d)q^3=3/16$$

解得 $a_{11}=d=q=\frac{1}{2}$（舍去负解）

所以 $a_{kk}=[a_{11}+(k-1)d]q^{k-1}=k/2^k$

$$s=\sum_{k=1}^{n}a_{kk}=1/2+2/2^2+3/2^3+\cdots+n/2^n$$

$$\frac{1}{2}s=1/2^2+2/2^3+3/2^4+\cdots+n/2^{n+1}$$

$$s=2-1/2^{n-1}-n/2^n$$

B6-006　等差数列 $\{a_n\}$ 与等比数列 $\{b_n\}$ 的首项是相等的正数，且 $a_{2n+1}=b_{2n+1}$．a_{n+1} 与 b_{n+1} 的大小关系是什么？

【题说】1994 年四川省赛题 1（1）．原题为填空题．

【解】设 $a_1=b_1=M$，$a_{2n+1}=b_{2n+1}=N$．因为 $M=N\cdot q^{2n}$，q 为公比，所以 M、N 同号．

因 $\frac{M+N}{2}\ge\sqrt{MN}$

所以 $a_{n+1}\ge|b_{n+1}|\ge b_{n+1}$

B6-007　数 1，2，3，…，100 能否是 12 个等比数列的项？

【题说】第二十一届（1995 年）全俄数学奥林匹克十一年级题 1．

【解】不能．首先证明:3 个不同的素数不可能在同一个等比数列中．

假设三个素数 $p_1<p_2<p_3$，在以 a_1 为首项、q 为公比的等比数列中，$p_1=a_1q^{k-1}$，$p_2=a_1q^{l-1}$，$p_3=a_1q^{m-1}$，则 $p_2=p_1q^s=p_3q^{-t}$，其中 $s=l-k$，$t=m-l$ 都是正整数．

从而 $p_2^{t+s}=p_1^tp_3^s$．上式左边被 p_2 整除，而右边不被 p_2 整除，因而不可能成立．<

由于 1 至 100 中含有 25 个素数，而根据上面所证，每个等比数列中至多含有两个素数，因此 25 个素数不可以包含于 12 个等比数列中．

所以答案是否定的．

B6-008　证明：在首项为 1，公差为 729 的等差数列中，可找到无限多项是 10 的（自然数）方幂．

【题说】第二十二届（1996 年）全俄数学奥林匹克九年级题 5．

【证】我们可证明更为一般的结论：

若整数 a 与 m 互素，则存在无限多个自然数 k，使得 a^k-1 被 m 整除（当 a=10，m=729 时便是本题的结论）．

先证至少存在一个这样的 k．

由抽屉原则，在数列 1，a，a^2，…，a^m 中，必有两项，除以 m 所得的余数相同，即它们的差 $a^{j+k}-a^j=a^j(a^k-1)$ 被 m 整除，因为 a 与 m 互素，所以 a^k-1 被 m 整除．

a^k-1 被 m 整除时，显然 $a^{lk}-1$ 被 m 整除，其中 l=1，2，3，…．

【注】由欧拉定理在 a、m 互素时，$a^{\varphi(m)}-1$ 被 m 整除．

B6-009　求 $1+11+111+\cdots+\overbrace{111\cdots1}^{n个}$ 之和．

【题说】1963 年合肥市赛高二一试题 3．

【解】

$$1+11+111+\cdots+\overbrace{111\cdots1}^{n个}$$

$$=\frac{1}{9}(10^1-1)+\frac{1}{9}(10^2-1)+\cdots+\frac{1}{9}(10^n-1)$$

$$=\frac{1}{9}[(10^1+10^2+\cdots+10^n)-n]$$

$$=\frac{1}{9^2}[10(10^n-1)-9n]$$

B6-010　设[x]表示不超过 x 的最大整数．试对任意正整数 n 计算和

$$\sum_{k=0}^{\infty}[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}]$$

【题说】第十届（1968 年）国际数学奥林匹克题 6．本题由英国提供．

【解】令｛x｝=x-[x]，则

$$[\frac{1}{2}+\{\frac{x}{2}\}]=\begin{cases}0，若\{\frac{x}{2}\}<1/2\\1，若\{\frac{x}{2}\}\geq 1/2\end{cases}=[2\{\frac{x}{2}\}]$$

从而

$$[\frac{1}{2}+\frac{x}{2}]=[2\{\frac{x}{2}\}]+[\frac{x}{2}]=[x]-[\frac{x}{2}] \qquad (1)$$

利用（1）得

$$\sum_{k=0}^{\infty}[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}]=\sum_{k=0}^{\infty}([\frac{n}{2^k}]-[\frac{n}{2^{k+1}}])$$

$$=[\frac{n}{2^0}]=n$$

【注】当$2^k>n$时$[\frac{n}{2^k}]=0$，所以和中实际上只有有限多项．

B6-011　求 1·1！+2·2！+3·3！+…+（n-1）·（n-1）！+n·n！的和，这里 n！=n·（n-1）…·2·1．

【题说】第一届（1969 年）加拿大数学奥林匹克题 6．

【解】原式=(2！-1！)+(3！-2！)+(4！-3！)+…+[n！-(n-1)！]+[(n+1)！-n！]

=（n+1）！-1

B6-012　求数列：$\frac{2}{2}$，$\frac{4}{2^2}$，$\frac{6}{2^3}$…，$\frac{2n}{2^n}$，…前n项的和．

【题说】1978 年重庆市赛一试题 6．

【解】令$s_n=\frac{2}{2}+\frac{4}{2^2}+\frac{6}{2^3}+\cdots+\frac{2n}{2^n}$，则

$$\frac{1}{2}s_n=\frac{2}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\frac{6}{2^4}+\cdots+\frac{2n-2}{2^n}+\frac{2n}{2^{n+1}}$$

所以 $$\left(1-\frac{1}{2}\right)s_n=\frac{2}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{2}{2^n}-\frac{n}{2^n}$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}$$
$$=2-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}=2-\frac{2+n}{2^n}$$

故 $s_n=4-(n+2)/2^{n-1}$.

B6-013 设 f（n）是数列

0，1，1，2，2，3，3，4，4，5，5，…

前 n 项的和.

1．给出 f（n）的公式；

2．证明 f（s+t）-f（s-t）=st，其中 s 和 t 是正整数，并且 s＞t.

【题说】第二届（1970 年）加拿大数学奥林匹克题 9.

【解】1．当 n 为偶数时，

$$f(n)=0+1+2+\cdots+(n/2-1)+1+2+\cdots+n/2$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)$$
$$=\frac{n}{4}\cdot n=\frac{n^2}{4}$$

当 n 为奇数时，

$$f(n)=\left(0+1+2+\cdots+\frac{n-1}{2}\right)\times 2$$
$$=\frac{n^2-1}{4}$$

因此 $$f(n)=\begin{cases}\dfrac{n^2}{4}, & n\text{为偶数}\\ \dfrac{n^2-1}{4}, & n\text{为奇数}\end{cases}$$

2．s+ t 与 s-t 奇偶性相同.

当 s+ t 与 s-t 同为偶数时

$$f(s+t)-f(s-t)=\frac{(s+t)^2}{4}-\frac{(s-t)^2}{4}$$
$$=\frac{1}{4}\cdot 4st=st$$

当 s+ t 与 s-t 同为奇数时

$$f(s+t)-f(s-t)=\frac{(s+t)^2-1}{4}-\frac{(s-t)^2-1}{4}=st$$

B6-014 已知对任意的 n∈N，有 $a_n>0$，且

$$\sum_{j=1}^{n}a_j^3=\left(\sum_{j=1}^{n}a_j\right)^2$$

求证：$a_n=n$.

【题说】1989 年全国联赛一试题 5.

【证】将$\sum_{j=1}^{n+1}a_j^3=(\sum_{j=1}^{n+1}a_j)^2$减去$\sum_{j=1}^{n}a_j^3=(\sum_{j=1}^{n}a_j)^2$后，再约去$a_{n+1}$可得

$$a_{n+1}^2=2\sum_{j=1}^{n-1}a_j+a_{n+1}\quad(n\geq 1)$$

同理
$$a_n^2=2\sum_{j=1}^{n-1}a_j+a_n\quad(n\geq 2)$$

以上二式相减，并约去 a_n+a_{n+1}，得

$$a_{n+1}-a_n=1\ (n\geq 2)$$

当$n=1$时，由$a_1^3=a_1^2$，得$a_1=1$．再由$a_2^2=2a_1+a_2$，解得$a_2=2$．

假设 $a_k=k$（$k\geq 2$），则 $a_{k+1}=a_k+1=k+1$．故对任意 $n\in N$，$a_n=n$ 成立．

B6-015 对于正整数n，定义S_n为和式$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(2k-1)^2+a_k^2}$的最小值，其中 a_1，a_2，…，a_n 是正整数，它们的和为 17．存在唯一的一个正整数 n，使 S_n 也是一个整数．求这个 n．

【题说】第九届（1991 年）美国数学邀请赛题 15．

【解】由熟知的不等式（注）

$$S_n=\min\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(2k-1)^2+a_k^2}=\sqrt{(\sum(2k-1))^2+(\sum a_k)^2}$$
$$=\sqrt{17^2+n^4}$$

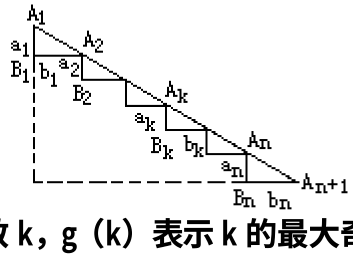
于是$17^2=S_n^2-n^4=(S_n+n^2)(S_n-n^2)$．从而

$$S_n+n^2=17^2,\ S_n-n^2=1$$

解得 n=12．

【注】作 n 个直角三角形，直角边的长分别为 a_k，b_k（k=1，2，…，n）．将它们排成如图形状，则折线 $A_1B_1A_2B_2\cdots A_{n+1}$ 的最小值为线段 A_1A_{n+1}，即有

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k^2+b_k^2}\geq\sqrt{(\sum a_k)^2+(\sum b_k)^2}$$



B6-016 对自然数 k，g（k）表示 k 的最大奇因子（例如 g（3）=3，g（20）=5）．求 g（1）+g（2）+g（3）+…+g（2^n）（其中 n 是自然数）．

【题说】1993 年上海市赛高三二试题 3．

【解】令 S_n=g（1）+g（2）+…+g（2^n），则

$S_n=1+3+\cdots+(2^n-1)+g(2)+g(4)+g(6)+\cdots+g(2^n)$

$=(2^{n-1})^2+g(1)+g(2)+g(3)+\cdots+g(2^{n-1})$

$=4^{n-1}+S_{n-1}$

将 $S_2-S_1=4$，$S_3-S_2=4^2$，…，$S_n-S_{n-1}=4^{n-1}$ 相加得 $S_n=S_1+4+4^2+\cdots+4^{n-1}=(1+2)+\frac{4^n-4}{3}=\frac{4^n+2}{3}$．

B6-017 求 $\sum_{n=1}^{1994}(-1)^n\frac{n^2+n+1}{n!}$）的值．

【题说】第二十六届（1994 年）加拿大数学奥林匹克题 1．

【解】原式 $=\sum_{n=1}^{1994}(-1)^n\left(\frac{n}{(n-1)!}+\frac{n+1}{n!}\right)$

$$=\sum_{n=0}^{1993}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n!}+\sum_{n=1}^{1994}(-1)^n\frac{n+1}{n!}$$

$$=-1+\frac{1995}{1994!}$$

B6-018 n、r 为正整数（n≥2），r 不是 n 的倍数，g 是 n 与 r 的最大公约数．求证

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left\{\frac{ri}{n}\right\}=\frac{1}{2}(n-g)$$

其中 {x} =x-[x]为 x 的非负小数部分．

【题说】1995 年日本数学奥林匹克题 1．<

【证】记 $n=g\cdot n_1$，$r=g\cdot r_1$，则 $(n_1,r_1)=1$，且

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left\{\frac{ri}{n}\right\}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{ri}{n}\right\}=g\sum_{i=1}^{n_1}\left\{\frac{r_1 i}{n_1}\right\}$$

由于 $\{r_1 i\}$（$i=1,2,\cdots,n_1$）构成模 n_1 的一个完全剩余系，所以

$$\sum_{i=1}^{n_1}\left\{\frac{r_1 i}{n_1}\right\}=\frac{1}{n_1}(0+1+\cdots+(n_1-1))$$

$$=\frac{1}{2}(n_1-1)$$

故

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left\{\frac{ri}{n}\right\}=g\cdot\frac{1}{2}(n_1-1)=\frac{1}{2}(n-g)$$

B6-019 设 $f(n)$ 为最接近 $\sqrt[4]{n}$ 的整数，求 $\sum_{k=1}^{1995}\frac{1}{f(k)}$．

【题说】第十三届（1995 年）美国数学邀请赛题 13．

【解】f（k）=m 即

$$\left(m-\frac{1}{2}\right)^4<k<\left(m+\frac{1}{2}\right)^4$$

而

$$\left(m+\frac{1}{2}\right)^4-\left(m-\frac{1}{2}\right)^4=2m\left(2m^2+\frac{1}{2}\right)=m(4m^2+1)$$

所以 f（k）=m 的 k 有 $m(4m^2+1)$ 个．

因为 $7^4=2401>1995$，$6\cdot 5^4=1785$．…，所以在 f（k）=7 时，不超

过 1995 的 k 只有 1995～1785 个．

从而$\sum_{k=1}^{1995}\frac{1}{f(k)}=\sum_{m=1}^{6}\frac{m(4m^2+1)}{m}+\frac{1}{7}(1995-1785)=400$．

B6-020　设数列｛a_n｝的前 n 项和

$$S_n=2a_n-1\ (n=1, 2, \cdots) \quad (1)$$

数列｛b_n｝满足条件

$$b_1=3,\ b_{k+1}=a_k+b_k \quad (k=1, 2, \cdots) \quad (2)$$

求数列｛b_n｝的前 n 项和．

【题说】1996 年全国数学联赛二试题 1．

【解】由（1）得 $a_1=1$．

又由 $a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}$

$\Rightarrow a_n=2a_{n-1}$

故 $a_n=2^{n-1}$，$S_n=2^n-1$，从而

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}(b_{k+1}-b_k)+b_1$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_k+b_1=3+S_n=2+2^{n-1}$$

因此 $S_n'=b_1+\cdots+b_n=2n+\sum_{k=1}^{n-1}2^k$

$=2^n+2n-1$

B6-021　设 r 为正整数，定义数列｛a_n｝如下：$a_1=1$，且对每个正整数 n，

$$a_{n+1}=\frac{na_n+2(n+1)^{2r}}{n+2}$$

证明每个 a_n 都是正整数，并且确定对哪些 n，a_n 是偶数．

【题说】第一届（1992 年）中国台北数学奥林匹克题 4．

【证】由题设，有

$$(n+2)a_{n+1}=na_n+2(n+1)^{2r} \quad (1)$$

两边同乘以 n+1，得

$$(n+2)(n+1)a_{n+1}=(n+1)na_n+2(n+1)^{2r+1}$$

令 $b_n=(n+1)na_n$（n=1，2，…），则 $b_1=2$，且

$$b_{n+1}=b_n+2(n+1)^{2r+1} \quad (n=1, 2, \cdots)$$

于是 $b_n=\sum_{k=2}^{n}(b_k-b_{k-1})+b_1$

因为 $b_n=2n^{2r+1}+\sum_{k=1}^{n-1}(k^{2r+1}+(n-k)^{2r+1})$

$n|k^{2r+1}+(n-k)^{2r+1}$

所以 $n\ |b_n$

再将 b_n 改写成

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}k^{2r+1}+\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)^{2r+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}[k^{2r+1}+(n+1-k)^{2r+1}]$$

即得（n+1）$|b_n$．由于 n，n+1 互质，故

$$n(n+1)|b_n$$

从而 $$a_n=\frac{b_n}{(n+1)n}\ (n=1,2,\cdots)$$

是正整数．

在 n≡3（mod4）时，

$$\frac{b_n}{n+1}=\sum_{k=1}^{n}(k^{2r}-k^{2r-1}(n+1-k)+\cdots+(n+1-k)^{2r})$$

$$\equiv\sum_{k=1}^{n}(2r+1)k^{2r}\equiv\sum_{k=1}^{n}k^{2r}\equiv(1+0+1+0)+\cdots+(1+0+1+0)+1+0+1$$

$$\equiv0\ (\mathrm{mod}\ 2)$$

所以$a_n=\dfrac{b_n}{n(n+1)}$也是偶数．

用类似的方法也可证明在 n≡0（mod 4）时，a_n 是偶数；在 n≡1或2（mod4）时，a_n是奇数．这也可以用归纳法证明：a_1、$a_2=\dfrac{1+2^{2r+1}}{3}$不难验证．在 n 为奇数时，由（1）得

$$a_{n+1}\equiv a_n\ (\mathrm{mod}\ 2)$$

在 n≡0（mod 4），由（1）得

$$2a_{n+1}\equiv2\ (\mathrm{mod}\ 4)$$

所以

$$a_{n+1}\equiv1\ (\mathrm{mod}\ 2)$$

在 n≡2（mod 4）时，由上面所证 $a_{n+1}\equiv0$（mod 2）．

所以由结论对 a_n 成立导出结论对 a_{n+1} 成立．

于是，对一切自然数 n，n≡0 或 3（mod 4）时，a_n 为偶数，其它情况 a_n 为奇数．

B6-022 对于正整数n，最接近$\sqrt{n}$的正整数设为a_n．又设$b_n=n+a_n$．从全体正整数中除去所有 b_n（n=1，2，…），余下的正整数按从小到大的顺序排列得｛c_n｝．求｛c_n｝的通项公式．

【题说】1994 年日本数学奥林匹克题 1．

【解】首先，若对某个n，存在两个最接近$\sqrt{n}$的整数，则

$$\sqrt{n}=m+\frac{1}{2}$$

其中 m 为整数，于是

$$n=m^2+m+\frac{1}{4}$$

这是不可能的．故对任意正整数 n，a_n 是唯一的．

其次，对于正整数 m，考虑满足 $a_n=m$ 的 n 的取值范围．显然有

$|\sqrt{n}-m|<\frac{1}{2}$，即

$$m-\frac{1}{2}<\sqrt{n}<m+\frac{1}{2}$$

所以

$$m^2-m+\frac{1}{4}<n<m^2+m+\frac{1}{4}$$

于是

$$m^2-m+1\leq n\leq m^2+m$$

由此得

$$m^2+1\leq b_n\leq m^2+2m$$

即 b_n 可取遍两个相邻的平方数 m^2 与 $(m+1)^2$ 内的所有整数值，亦即取遍所有非平方数的整数，从而 c_n 取平方数，即 $c_n=n^2$．

B6-023　设 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 为如下定义的两个整数列：

$$x_0=1,\ x_1=1,\ x_{n+1}=x_n+2x_{n-1}\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

$$y_0=1,\ y_1=7,\ y_{n+1}=2y_n+3y_{n-1}\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

于是这两个数列的前几项是：

x：1，1，3，5，11，21，…

y：1，7，17，55，161，487，…

证明：除了“1”以外，两个数列中不再有其他相同的数．

【题说】第二届（1973 年）美国数学奥林匹克题 2．

【证】用数学归纳法证明．$\{x_n\}$ 从第 3 项起，奇数项被 8 除余 3，偶数项被 8 除余 5．

当 n=2，3 时，$x_n=3$，5，结论成立．

假设 $n\leq k$（$k>3$）时结论成立，则当 $n=k+1$ 时，

$$x_{k+1}=x_k+2x_{k-1}=(x_k+x_{k-1})+x_{k-1}$$

因 (x_k+x_{k-1}) 被 8 除余数恰为 0，故 x_{k+1} 与 x_{k-1} 被 8 除后，余数相同；而 $(k+1)$ 与 $(k-1)$ 奇偶相同．

同法可证 $\{y_n\}$ 从第 2 项起，奇数项被 8 除余 1，偶数项被 8 除余 7．

综上所述，除“1”外，二数列中没有别的数相同．

B6-024　数列 a_1，a_2，a_3，…满足 $a_1=1/2$ 且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=n^2a_n$（$n\geq1$）．确定 a_n 的值（$n\geq1$）．

【题说】第七届（197 年）加拿大数学奥林匹克题 2．

【解】令 $s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则

$$a_n=s_n-s_{n-1}=n^2a_n-(n-1)^2a_{n-1}$$

解得 $$a_n=\frac{n-1}{n+1}a_{n-1},\ n\geq2$$

于是

$$a_n=\frac{n-1}{n+1}a_{n-1}=\frac{(n-1)\ (n-2)}{(n+1)\ n}a_{n-2}$$

$$=\cdots=\frac{(n-1)\ !}{(n+1)\ n\cdots 3}a_1$$

$$=\frac{1}{n\ (n+1)}$$

B6-025　设数列 u_0，u_1，u_2，…的定义如下：

$$u_0=2,\ u_1=\frac{5}{2}$$

$$u_{n+1}=u_n\ (u_{n-1}^2-2)\ -u_1,\ n=1,\ 2,\ \cdots$$

试证：

$$[u_n]=2\frac{2^n-(-1)^n}{3},\ n=1,\ 2,\ \cdots$$

这里[x]表示不大于 x 的最大整数.

【题说】第十八届（1976 年）国际数学奥林匹克题 6．本题由英国提供.

【证】首先用数学归纳法证明：当 n＞0 时，

$$u_n=2\frac{2^n-(-1)^n}{3}+2-\frac{2^n-(-1)^n}{3}$$

事实上，由

$$u_1=\frac{5}{2}=2^1+2^{-1}=2^{\frac{2^1-(-1)^1}{3}}+2^{-\frac{2^1-(-1)^1}{3}}$$

$$u_2=\frac{5}{2}=2^{\frac{2^2-(-1)^2}{3}}+2^{-\frac{2^2-(-1)^2}{3}}$$

可知命题对 n=1，2 为真.

设命题对 n=k-1，k 为真，我们证明命题对 n=k+1 为真．令

$$f\ (n)\ =\frac{2^n-\ (-1)\ ^n}{3}$$

由数列的递推关系得

$$u_{k+1}=\ (2^{f\ (k)}\ +2^{-f\ (k)}\ )\ [\ (2^{f\ (k-1)}\ +2^{-f\ (k-1)}\ )\ ^2-2]-\frac{5}{2}$$

$$=2^{f\ (k)\ +2f\ (k-1)}+2^{-[f\ (k)\ +2f\ (k-1)\ ]}+2^{f\ (k)\ -2f\ (k-1)}$$

$$+2^{-[f\ (k)\ -2f\ (k-1)\ ]}-\frac{5}{2}$$

因为

$$f\ (k)\ +2f\ (k-1)\ =\frac{2^k-\ (-1)\ ^k}{3}+2\cdot\frac{2^{k-1}-\ (-1)\ ^{k-1}}{3}$$

$$=\frac{2^{k+1}-\ (-1)\ ^{k+1}}{3}=f\ (k+1)$$

$$f\ (k)\ -2f\ (k-1)\ =\frac{2^k-\ (-1)\ ^k}{3}-2\cdot\frac{2^{k-1}-\ (-1)\ ^{k-1}}{3}$$

$$=\ (-1)\ ^{k+1}$$

所以

$$u_{k+1}=2^{f(k+1)}+2^{-f(k+1)}+2^{(-1)^{k+1}}+2^{-(-1)^{k+1}}-\frac{5}{2}$$

$$=2^{f(k+1)}+2^{-f(k+1)}$$

$$=2^{\frac{2^{k+1}-(-1)^{k+1}}{3}}+2^{-\frac{2^{k+1}-(-1)^{k+1}}{3}}$$

这就证明了命题对 n=k+1 为真．

易知

$$f(n)=\frac{2^n-(-1)^n}{3}$$

是整数，从而 $2^{-f(n)}$ 是真分数，故

$$[u_n]=2^{\frac{2^n-(-1)^n}{3}}$$

B6-026　设 $0<u<1$，且定义

$$u_1=1+u，u_2=\frac{1}{u_1}+u，\cdots，u_{n+1}=\frac{1}{u_n}+u，n\geq 1$$

证明：对 n 的所有值，$u_n>1$．

【题说】第九届（1977 年）加拿大数学奥林匹克题 6．

【证】用数学归纳法证明

$$1<u_n\leq 1+u，n=1，2，\cdots \qquad (1)$$

（Ⅰ）$1<u_1=1+u$ 满足（1）式．

（Ⅱ）假设 n=k 时（1）满足，则

$$\frac{1}{1+u}\leq\frac{1}{u_k}<1$$

从而

$$1<1+\frac{u^2}{1+u}$$

$$=\frac{1}{1+u}+u\leq\frac{1}{u_k}+u<1+u$$

即

$$1<u_{k+1}<1+u$$

因此，对 n 所有值（1）成立．

B6-027　求实数 a_0 的集合，使得由

$$a_{n+1}=2^n-3a_n，n=0，1，2，\cdots$$

定义的无限序列｛a_n｝是严格增加的，即对于 $n\geq 0$ 有 $a_n<a_{n+1}$．

【题说】1980 年英国数学奥林匹克题 4．

【解】$a_{n+1}=2^n-3a_n=2^n-3\times 2^{n-1}+3^2a_{n-1}$

$$=2^n-3\times 2^{n-1}+3^2\times 2^{n-2}-3^3a_{n-2}=\cdots$$

$$=2^n-3\times 2^{n-1}+3^2\times 2^{n-2}-\cdots+(-3)^n+(-3)^{n+1}\cdot a_0$$

$$=\frac{1}{5}(2^{n+1}-(-3)^{n+1})+(-3)^{n+1}\cdot a^0$$

$$=\frac{1}{5}\cdot 2^{n+1}+(a_0-\frac{1}{5})\cdot(-3)^{n+1}$$

若$a_0=\frac{1}{5}$，$a_n=\frac{1}{5}\cdot 2^{n+1}$严格递增．

若$a_0\neq\frac{1}{5}$，（$a_0-\frac{1}{5}$）·（-3）$^{n+1}$正负交错．由于（$\frac{2}{3}$）^{n}→0所以在 n 充分大时，a_n 正负交错．

因此，所求集合为｛$\frac{1}{5}$｝．

B6-028　选取一列整数 a_1，a_2，a_3，…，使得对每个 n≥3，都有 $a_n=a_{n-1}-a_{n-2}$．若该数列前 1492 项之和等于 1985，前 1985 项之和等于 1492．那么前 2001 项之和是多少？

【题说】第三届（1985 年）美国数学邀请赛题 5．

【解】设 $a_1=a$，$a_2=b$，则 $a_3=b-a$，$a_4=-a$，$a_5=-b$，$a_6=a-b$，$a_7=a$，…每 6 个重复一遍，且每相邻 6 项之和为零．于是

$$(a_1+a_2+\cdots+a_{1488})+a_{1489}+a_{1490}+a_{1491}+a_{1492}=1985$$

故
$$a+b+(b-a)+(-a)=1985$$

即
$$2b-a=1985 \quad (1)$$

又
$$(a_1+a_2+\cdots+a_{1980})+a_{1981}+\cdots+a_{1985}=1492$$

得
$$a+b+(b-a)+(-a)+(-b)=1492 \text{ 即 } b-a=1492 \quad (2)$$

由（1）、（2）解得 b=493．因此

$$\sum_{i=1}^{2001}a_i=a_{1999}+a_{2000}+a_{2001}$$
$$=a+b+(b-a)=2b=986$$

B6-029　对于每个实数 x_1，由 $x_{n+1}=x_n(x_n+1/n)$，n≥1，构成序列 x_1，x_2，…，证明：存在唯一的 x_1，使得 $0<x_n<x_{n+1}<1$（n=1，2，…）．

【题说】第二十六届（1985 年）国际数学奥林匹克题 6．本题由瑞典提供．

【证】设 $P_1(x)=x$，$P_{n+1}(x)=P_n(x)(P_n(x)+1/n)$，（n≥1）那么 $P_n(x)$ 是正系数的 2^{n-1} 次多项式．于是 $x_n=P_n(x_1)$，由于 $x_{n+1}>x_n$ 与 $x_n>1-1/n$ 等价，问题可改为证明存在唯一的正实数 t，使得 $1-1/n<P_n(t)<1$（n=1，2，）．

由于 $P_n(x)$ 是严格的增函数（x≥0），$P_n(0)=0$，且 $P_1(1)=1$，$P_n(1)>1$（n≥2），我们可以找到唯一的 $a_n<b_n\leq 1$，使 $P_n(a_n)=1-1/n$ 及 $P_n(b_n)=1$．

又由 $P_{n+1}(a_n)=1-1/n$ 及 $P_{n+1}(a_{n+1})=1-1/(n+1)$，可得

$$a_n<a_{n+1}$$

同理，由 $P_{n+1}(b_{n+1})=1$ 及 $P_{n+1}(b_n)=1+1/n$，得 $b_{n+1}<b_n$．

由于$[a_n,b_n]\subset[a_{n-1},b_{n-1}]$，所以 $P_{n-1}(a_n)\geq P_{n-1}(a_{n-1})\geq 1-\frac{1}{n-1}$，从而$P_n(b_n)-P_n(a_n)=(P_{n-1}(b_n)-P_n(a_n))$．

$$(P_{n-1}(b_n)+P_{n-1}(a_n)+\frac{1}{n-1})\geq P_{n-1}(b_n)-P_n(a_n)\geq\cdots$$

$$\geq P_1(b_n)-P_1(a_n)=b_n-a_n$$

即$\frac{1}{n}\geq b_n-a_n$.

由“区间套定理”，存在唯一实数 t，使得对所有 n 均满足 $a_n<t<b_n$，由此得 $1-1/n<P_n(t)<1$.

B6-030　设u_1，u_2，u_3，… 是一整数列，适合递推公式：$u_{n+2}=u_{n+1}^2-u_n$. 设 $u_1=39$，$u_2=45$，求证：1986 可整除这数列的无穷多项.

【题说】第十八届（1986 年）加拿大数学奥林匹克题 5.

【证】对每一 n,令 R_n 是 u_n 被 1986 除得的余数 $R_n\equiv u_n(\mathrm{mod}1986)$.其中 $0\leq R_n<1986$.

因为数对（R_n，R_{n+1}）只能取（0，0），（0，1），（0，1），…，（0，n），（1，0），…（1985，1985）这有限情形之一种，故必存在正整数 m、k，使

$$(R_m，R_{m+1})=(R_{m+k}，R_{m+k+1})$$

即　$R_m=R_{m+k}$，$R_{m+1}=R_{m+k+1}$.　　　　(1)

由$u_{n+2}=u_{n+1}^2-u_n$及（1）得

$$R_{m+2}=R_{m+k+2}，R_{m+3}=R_{m+k+3}，\cdots$$

又由$u_n=u_{n+1}^2-u_{n+2}$得

$$R_{m-1}=R_{m+k-1}，R_{m-2}=R_{m+k-2}，\cdots$$

因此，$\{R_n\}$ 是周期序列．但已知 $u_3=45^2-39=1986$，即 $R_3=0$，所以有无穷多个 n 使 $R_n=0$，即 u_n 中有无穷多个被 1986 整除.

B6-031　已知 $\{a_n\}$ 为正整数数列

$$a_{n+3}=a_{n+2}(a_{n+1}+2a_n)\quad(n\in N)$$

$a_6=2288$．求 a_1、a_2、a_3.

【题说】1988 年四川省赛题 2.

【解】由 $a_{n+3}=a_{n+2}(a_{n+1}+2a_n)$ （n∈N）得：

$$a_4=a_3(a_2+2a_1)$$

$$a_5=a_3(a_2+2a_1)(a_3+2a_2)$$

$$a_6=a_3^2(a_2+2a_1)(a_3+2a_2)(a_2+2a_1+2)$$

因为 $a_6=2288=2^4\times11\times13$，正整数（$a_2+2a_1+2$）比（$a_2+2a_1$）大 2，所以

$$a_2+2a_1=11$$

$$a_3^2(a_3+2a_2)=2^4$$

从而得出 $a_3=1$ 或 2.

$a_3=1$ 时，a_2 不是正整数，所以 $a_3=2$.

从而　　　　$a_1=5$，$a_2=1$，$a_3=2$

B6-032　已知 $a_1=1$，$a_2=2$，

$$a_{n+2}=\begin{cases}5a_{n+1}-3a_n，a_n\cdot a_{n+1}\text{为偶数时}\\ a_{n+1}-a_n，a_n\cdot a_{n+1}\text{为奇数时}\end{cases}$$

试证：对一切 $n\in N$，$a_n\neq 0$．

【题说】1988 年全国联赛二试题 1．

【证】由递推公式，a_n，a_{n+1}，a_{n+2} 的奇偶性只有：奇，偶，奇；偶，奇，奇；奇，奇，偶．三种情形．

$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=7$ 均不是 4 的倍数，下面证明｛a_n｝中所有的项都不是 4 的倍数．

设 a_m 是 4 的倍数，m 为最小下标，m＞3，则 a_{m-1}，a_{m-2} 均为奇数，a_{m-3} 为偶数．

由 $a_m=a_{m-1}-a_{m-2}$ 及 $a_{m-1}=5a_{m-2}-3a_{m-3}$，得

$$3a_{m-3}=4a_{m-2}-a_m$$

故 a_{m-3} 是 4 的倍数，与所设矛盾．

由于 0 是 4 的倍数，故对一切 $n\in N$，$a_n\neq 0$．

B6-033　设 $x_0=0$，$x_1=1$，且 $x_{n+1}=4x_n-x_{n-1}$；$y_0=1$，$y_1=2$，且 $y_{n+1}=4y_n-y_{n-1}$（n=1，2，3，…）．求证：对一切整数 n≥0，有

$$y_n^2=3x_n^2+1$$

【题说】第二十届（1988 年）加拿大数学奥林匹克题 4．用数学归纳法证明（a）$y_n^2=3x_n^2+1$及（b）$y_ny_{n-1}=3x_nx_{n-1}+2$．

【证】当 n=1 时，（a）、（b）二式显然成立．

假设 n=k 时，（a）、（b）成立，则

$$\begin{aligned}y_{n+1}^2&=(4y_n-y_{n-1})^2\\&=16y_n^2-8y_ny_{n-1}+y_{n-1}^2\\&=48x_n^2+16-8(2+3x_nx_{n-1})+3x_{n-1}^2+1\\&=3(4x_n^2-x_{n-1})^2+1\\&=3x_{n+1}^2+1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_{n+1}y_n&=(4y_1-y_{n-1})y_n\\&=4y_n^2-y_{n-1}y_n\\&=4(3x_n^2+1)-(3x_nx_{n-1}+2)\\&=3x_n(4x_n-x_{n-1})+2\\&=3x_nx_{n+1}+2\end{aligned}$$

因此，对任何自然数 n，（a）、（b）都成立．

B6-034　数列｛a_n｝定义为 $a_1=a_2=1$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$．求证：当 n≥2 时，a_{2n-1} 必是数列中某两项的平方和，a_{2n} 必是数列中某两项的平方差．

【题说】1990 年南昌市赛二试题 1．此数列即为斐波拉契数列．

【证】数列的前 4 项为 1，1，2，3，

$$a_3=a_1^2+a_2^2，a_4=a_3^2-a_1^2$$

设

$$a_{2n-1}=a_{n-1}^2+a_n^2，a_{2n}=a_{n+1}^2-a_{n-1}^2，\quad(n\geq 2)$$

两式相加即得 $a_{2n+1}=a_n^2+a_{n+1}^2$

而 $a_{2n+2}=a_{2n}+a_{2n+1}=2a_{n+1}^2+a_n^2-a_{n-1}^2$

$$=2a_{n+1}^2+2a_n^2-a_n^2-a_{n-1}^2$$

$$=(a_{n+1}+a_n)^2+(a_{n+1}-a_n)^2-a_n^2-a_{n-1}^2$$

$$=a_{n+2}^2+a_{n-1}^2-a_n^2-a_{n-1}^2$$

$$=a_{n+2}^2-a_n^2$$

因此对一切自然数 n≥2,

$$a_{2n-1}=a_{n-1}^2+a_n^2,\quad a_{2n}=a_{n+1}^2-a_{n-1}^2$$

B6-035　数列 $\{a_n\}$ 由下列条件决定：$a_1=1$；n≥1 时，$a_{n+1}=a_n+1/a_n$．求 a_{100} 的整数部分 $[a_{100}]$．

【题说】1990 年日本数学奥林匹克第一轮选拔赛题 12．

【解】由题有

$$a_{n+1}^2=a_n^2+2+1/a_n^2$$

即 $$a_{n+1}^2-a_n^2=2+1/a_n^2$$

所以 $$a_{100}^2=a_1^2+\sum_{n=1}^{99}(a_{n+1}^2-a_n^2)$$

$$=a_1^2+\sum_{n=1}^{99}(2+1/a_n^2)$$

$$=a_1^2+99\cdot 2+1+\sum_{n=2}^{99}(1/a_n^2)$$

$$=200+\sum_{n=2}^{99}(1/a_n^2)$$

因为 $a_{n+1}-a_n=1/a_n>0$，所以 a_n 递增．当≥2 时，$a_n\geq a_2=2$，于是

$$200\leq a_{100}^2\geq 200+\sum_{n=2}^{99}(1/2^2)$$

$$=200+98/4<225$$

所以 $$14<a_{100}<15$$

故 $$[a_{100}]=14.$$

B6-036　三元数组 (x_n,y_n,z_n)，n=1，2，…由下列关系式确定：

$$x_1=2,\ y_1=4,\ z_1=6/7$$

$$x_{n+1}=2x_n/(x_n^2-1)$$

$$y_{n+1}=2y_n/(y_n^2-1)$$

$$z_{n+1}=2z_n/(z_n^2-1)$$

1．证明：上述作三元组的过程可以无限继续下去．

2．能否在某一步，得到的三元数组 (x_n,y_n,z_n) 满足等式

$$x_n+y_n+z_n=0？$$

【题说】第十六届（1990 年）全俄数学奥林匹克十年级题 4．

【证】1．只须证明：在任何一步所得到的三个数中都不可能出现1或-1．

假设$x_{n+1}=\pm1$，则$x_n^2=2x_n-1=0$，从而x_n为无理数，这是不可能的．所以$x_{n+1}\neq\pm1$．同理，y_{n+1}，z_{n+1}都不等于±1．

2．由x_1、y_1、$z_1\neq0$及递推关系知道，对于任意的$n\in N$，x_n、y_n、$z_n\neq0$，$x_ny_nz_n\neq0$我们用归纳法来证明：

$$x_n+y_n+z_n=x_ny_nz_n \qquad (1)$$

显然 $x_1y_1z_1=48/7=x_1+y_1+z_1$

假设 $x_ny_nz_n=x_n+y_n+z_n$

令 $x_n=\tan\alpha$，$y_n=\tan\beta$，$z_n=\tan\gamma$

$$(\alpha、\beta、\gamma\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}))$$

由假设 $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma$

知道$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha}=0$

所以 $\alpha+\beta+\gamma=0$或$\alpha+\beta+\gamma=\pm\pi$

从而 $\tan2\alpha+\tan2\beta+\tan2\gamma=\tan2\alpha\cdot\tan2\beta\cdot\tan2\gamma$

又因为 $x_{n+1}=\dfrac{2x_n}{x_n^2-1}=-\tan2\alpha$，$y_{n+1}=-\tan2\beta$，$z_{n+1}=-\tan2\gamma$

所以 $x_{n+1}\cdot y_{n+1}\cdot z_{n+1}=x_{n+1}+y_{n+1}+z_{n+1}$从而（1）式对一切自然数n成立．

由于$x_ny_nz_n\neq0$，所以$x_n+y_n+z_n$永远不为0．

B6-037　设$a_1=1$，$a_2=3$，对一切自然数n有

$$a_{n+2}=(n+3)a_{n+1}-(n+2)a_n$$

求所有被11整除的a_n的值．

【题说】1990年巴尔干地区数学奥林匹克题1．

【解】设$b_{n+1}=a_{n+1}-a_n$（$n\geq1$），则由条件有

$$b_{n+1}=(n+1)(a_n-a_{n-1})=(n+1)b_n\ (n\geq2)$$

$$b_n=nb_{n-1}=n(n-1)b_{n-2}$$
$$=\cdots=n(n-1)\cdots3b_2$$
$$=n!\ (n\geq2)$$

所以 $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+1$

$$=b_n+b_{n-1}+\cdots+b_2+1=\sum_{j=1}^{n}j!$$

由此可算出：

$$a_4=\sum_{j=1}^{4} j!=33=11\times 3$$

$$a_8=\sum_{j=1}^{8} j!=46233=11\times 4203$$

$$a_{10}=\sum_{j=1}^{10} j!=4037913=11\times 367083$$

当$n\geq 11$时，注意到$\sum_{j=1}^{n} j!$被11整除，因而$a_n=\sum_{j=1}^{10} j!+\sum_{j=11}^{n} j!$也被11整除．

故本题答案为 n=4，n=8 以及 n≥10．

B6-038　函数列｛f_n（x）｝由下列条件递归定义：

$$f_1(x)=\sqrt{x^2+48}$$

$$f_{n+1}(x)=\sqrt{x^2+6f_n(x)}\quad (n\geq 1)$$

对于每个正整数 n，求出方程 f_n（x）=2x 的所有实数解．

【题说】第十九届（1990 年）美国数学奥林匹克题 2．

【解】由$f_1(x)=\sqrt{x^2+48}=2x$得出解$x=4$．

若$x>4$，则

$$f_1(x)=\sqrt{x^2+48}$$
$$<\sqrt{x^2+8x+16}=x+4<2x$$
$$f_{n+1}(x)=\sqrt{x^2+6f_n(x)}$$
$$<\sqrt{x^2+12x}<\sqrt{x^2+3x^2}=2x$$

若 x＜4，测 f_1（x）＞2x，f_{n+1}（x）＞2x．

故对每一 n，f_n（x）=2x 只有唯一解 x=4．

B6-039　已知整数列｛a_0，a_1，a_2，…｝满足：

（1）$a_{n+1}=3a_n-3a_{n-1}+a_{n-2}$，n=2，3，…；

（2）$2a_1=a_0+a_2-2$；

（3）对任意自然数 m，在数列｛a_0，a_1，a_2，…｝中必有相继的 m 项 a_k，a_{k+1}，…，a_{k+m-1} 都是完全平方数．

求证：｛a_0，a_1，a_2，…）的所有项都是完全平方数．

【题说】1992 年中国数学奥林匹克题 6．

【证】令 $d_n=a_n-a_{n-1}$，则由（1）

$$d_{n+1}-d_n=d_n-d_{n-1}=\cdots=d_2-d_1$$

所以｛d_n｝是等差数列，从而

$$a_n=a_0+\sum_{k=1}^{n} d_k=a_0+nd_1+\frac{n(n-1)}{2}\cdot(d_2-d_1)$$

由（2），$d_2-d_1=a_2-2a_1+a_0=2$，所以

$$a_n=n^2+bn+c,\ b、c\in Z$$

若 b 为奇数 2t+1，则在 n 充分大时，

$$a_n \ (n+t)^2 + n + c - t^2$$

大于（n+t）^{2}，小于（n+t+1）^{2}（=（n+t）^{2}+2n+2t+1），因而 a_n 不是平方数．而由（3），$\{a_n\}$ 有任意大的平方数，矛盾！所以 b 为偶数 2t，从而

$$a_n=(n+t)^2+c-t^2$$

在 $c-t^2>0$ 时，对于充分大的 n，a_n 介于（n+ t）^{2} 与（n+t+1）^{2} 之间，与（3）矛盾．同样 $c-t^2<0$ 也导出矛盾（考虑连续平方数（n+t-1）^{2} 与（n+t）^{2}）．所以 $c-t^2=0$，$a_n=(n+t)^2$．

【注】（3）可减弱为 $\{a_n\}$ 中有任意大的平方数，即 $\{a_n\}$ 中有无穷多个平方数．

B6-040　设正数列 a_0，a_1，…，a_n，…满足

（1）$\sqrt{a_n a_{n-2}}-\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}=2a_{n-1}$（n≥2）

（2）$a_0=a_1=1$

求 $\{a_n\}$ 通项公式．

【题说】1993 年全国联赛一试题 5．

【解】（1）式两边同除 $\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}}$，得

$$\sqrt{\frac{a_n}{a_{n-1}}}=1+2\sqrt{\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}}$$

令 $b_n=\sqrt{\frac{a_n}{a_{n-1}}}$（n≥1），则有

$$b_{n-1}=2b_{n-1}$$

即

$$b_n+1=2(b_{n-1}+1) \text{ 从而}$$

$$b_n+1=(b_1+1)\cdot 2^{n-1}=2^n$$

$$a_n=(2^n-1)^2a_{n-1}$$

$$=(2^n-1)^2(2^{n-1}-1)^2a_{n-2}$$

$$=\cdots$$

$$=\prod_{k=1}^{n}(2^k-1)^2$$

B6-041　设数列 $\{v_n\}$ 满足：$v_0=1$，$v_1=3$，$v_{n+2}=4v_{n+1}-v_n$．试对非负整数n，确定 $2v_n^3-v_n$ 的末两位数字（即个位数字与十位数字）．

【题说】1993 年（第十六届）哈尔滨市赛二试题 3．

【解】因为 $v_{n+2}\equiv -v_n \pmod 4$，而 $v_0=1$，$v_1=3$，则

$$v_n\equiv\begin{cases}1 \pmod 4\text{，若 } n\equiv 0 \text{ 或 } 3 \pmod 4\\ 3 \pmod 4\text{，若 } n\equiv 1 \text{ 或 } 2 \pmod 4\end{cases}$$

所以

$$2v_n^3-v_n\equiv\begin{cases}1\ (\bmod 4)，若 n\equiv 0或3\ (\bmod 4)\\ 3\ (\bmod 4)，若n\equiv 1或2\ (\bmod 4)\end{cases}\qquad (1)$$

另一方面 v_n 除以 25，余数成周期为 15 的数列：

$$\underbrace{1,3,11,16,3,21,6,3,6,21,3,16,11,3,1}1,3,11,16,\cdots$$

所以

$$v_n\equiv 1，3，6，11，16，21\ (\bmod\ 25)\qquad (2)$$

因为 $2v_n^3-v_n-1=(v_n-1)(2v_n^2+2v_n+1)$

并且由（1），在 $v_n\not\equiv 3\ (\bmod\ 25)$ 时，

$v_n-1\equiv 0\ (\bmod\ 5)$，$2v_n^2+2v_n+1\equiv 2\cdot 1^2+2\cdot 1+1\equiv 0\ (\bmod\ 5)$

在 $v_n\equiv 3\ (\bmod\ 25)$ 时，

$$2v_n^2+2v_n+1\equiv 2\cdot 3^2+2\cdot 3+1=25\equiv 0\ (\bmod\ 25)$$

所以恒有 $$2v_n^3-v_n\equiv 1\ (\bmod 25)\qquad (3)$$

由（1）、（3）

$$2v_n^3-v_n\equiv\begin{cases}1\ (\bmod 100)，n\equiv 0或3\ (\bmod 4)\\ 51\ (\bmod 100)，n\equiv 1或2\ (\bmod 4)\end{cases}$$

即在 n=4k 或 4k+3 时，$2v_n^3-v_n$ 的末两位数字为 01；在 n=4k+1 或 4k+2 时，$2v_n^3-v_n$ 的末两位数字为 51．

B6-042　由 0 和 1 组成的、长度为 n（如 00101，10100 长度都为 5）的排列中，没有两个 1 相连的排列的个数记为 f（n）．约定 f（0）=1．试证明：

（1）f（n）=f（n-1）+f（n-2），n≥2；

（2）f（4k+2）可被 3 整除，k≥0．

【题说】1993 年河北省赛二试题 3．

【证】（1）长度为 1 的排列只有 0，1，故 f（1）=2，长度为 2 的排列有 00，01，10，11，故 f（2）=3．所以 f（2）=f（1）+f（0）．当 n＞2 时，将长度为 n 的排列分为两类：一类以 0 结尾，另一类以 01 结尾．以 0 结尾的排列中无两个 1 相连的排列的个数为 f（n-1）；以 01 结尾的排列中无两个 1 相连的排列的个数为 f（n-2）．所以对任意自然数 n≥2，总有

$$f(n)=f(n-1)+f(n-2)$$

（2）用数学归纳法．

k=0 时，f（4k+2）=f（2）=3，3|f（2）．

假设当 k=m 时，3|f（4+2），即

$$f(4m+2)=3q$$

令 $f(4m+3)=3q_1+r$，$0\le r<3$，由（1）有

$$f(4m+4)=f(4m+3)+f(4m+2)=3q_2+r$$

$$f(4m+5)=f(4m+4)+f(4m+3)=3q_3+2r$$

$$f(4m+6)=f(4m+5)+f(4m+4)$$
$$=3q_4+3r=3(q_4+r)$$

这就是说，当 k=m+1 时，f（4+2）是 3 的倍数．所以对一切 k≥0，有

$$3|f(4k+2)$$

B6-043 正数数列 $\{a_n\}$ 有 $a_1=a_2=1$，$a_3=997$，$a_{n+3}=\frac{1993+a_{n+2}a_{n+1}}{a_n}$．证明所有 a_n 均为整数．

【题说】第三届（1993 年）澳门数学奥林匹克第三轮题 4．

【证】补充 $a_0=2$．已知

$$a_{n+3}a_n=1993+a_{n+2}a_{n+1}$$

用 n+1 换 n 并与上式相减、化简得

$$\frac{a_{n+4}+a_{n+2}}{a_{n+2}+a_n}=\frac{a_{n+3}}{a_{n+1}}$$

对此式，令 n=0，2，…，2m-2，相乘得

$$\frac{a_{2m+2}+a_{2m}}{a_2+a_0}=\frac{a_{2m+1}}{a_1}$$

即
$$a_{2m+2}+a_{2m}=3a_{2m+1}$$

再令 n=1，3，…，2m-1，相乘得

$$\frac{a_{am+3}+a_{2m+1}}{a_3+a_1}=\frac{a_{2m+2}}{a_2}$$

即
$$a_{2m+3}+a_{2m+1}=998a_{2m}，m\geq 0$$

对 m 用数学归纳法，不难证得 a_{2m}，a_{2m+1} 均为整数．故结论成立．

【注】此题 a_n 显的表达式亦可求出．

B6-044 数列 y_1，y_2，y_3，…满足条件 $y_1=1$，对于 k＞0，

$$y_{2k}=\begin{cases}2y_k，& \text{若}k\text{为偶数}\\ 2y_k+1，& \text{若}k\text{为奇数}\end{cases}$$

$$y_{2k+1}=\begin{cases}2y_k，& \text{若}k\text{为奇数}\\ 2y_k+1，& \text{若}k\text{为偶数}\end{cases}$$

证明：数列 y_1，y_2，y_3，…能取遍每个正整数并且恰好一次．

【题说】第二十五届（1993 年）加拿大数学奥林匹克题 5．

【证】用二进制表示．设

$$n=(a_ma_{m-1}\cdots a_1a_0)_2$$

其中 $a_m=1$，$a_i=0$ 或 1，i=0，1，…，m-1．

我们用归纳法证明

$$y_n=(b_mb_{m-1}\cdots b_1b_0)_2$$

其中 $b_m=1$，$b_2\equiv a_i+a_{i+1}\pmod 2$，i=0，1，…，m-1．

（1）n=1 时，显然．

（2）假设对于小于 n 的正整数结论成立．对于 $n=(a_m\cdots a_1a_0)_2$，记 $n'=(a_m\cdots a_1)_2$，则有 $y_{n'}=(b_mb_{m-1}\cdots b_1)$ 满足上述要求．

（i）若 $a_1=a_0=0$，则 $y_n=2y_{n'}=2\cdot(b_m\cdots b_1)_2=(b_m\cdots b_1b_0)_2$，

其中 $b_0=0\equiv a_1+a_0\pmod 2$．

（ii）若 $a_1=1$，$a_0=0$，则

$$y_n=2y_n'+1=(b_m b_{m-1}\cdots b_1 1)_2=(b_m\cdots b_1 b_0)_2$$

其中 $b_0=1\equiv a_0+a_1\pmod 2$.

（iii）若 $a_1=0$，$a_0=1$，则

$$y_n=2y_n'+1=(b_m\cdots,b_1 1)_2=(b_m\cdots b_1 b_0)_2$$

其中 $b_0=1\equiv a_0+a_1\pmod 2$.

（iv）若 $a_1=a_0=1$，则

$$y_n=2y_n'=(b_m\cdots b_1 0)_2=(b_m\cdots b_1 b_0)_2$$

其中 $b_0=0\equiv a_0+a_1\pmod 2$.

因此，命题对任意正整数 n 也成立.

反之，对任意数 $(b_m\cdots b_1 b_0)_2$，可以唯一确定 $n=(a_m a_{m-1}\cdots a_1 a_0)$ 如下：

$$a_m=b_m=1,\ a_i\equiv b_i-a_{i+1}\pmod 2$$

所以，$y_n\to n$ 是 $N_+\to N_+$的一一对应.

B6-045　已知数列 $\{a_n\}$ （n=1，2，…）中，$a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=6$，且当 $n>3$ 时，$a_n=3a_{n-1}-a_{n-2}-2a_{n-3}$. 试证：对 $n>3$ 的一切自然数有 $a_n>3\times 2^{n-2}$.

【题说】1994 年全国联赛河北省预赛二试题 2.

【证】$a_4=13>2a_3$，$a_5=27>2a_4$，假设 $n\geq 5$ 时 $a_k>2a_{k-1}$，$a_{k-1}>2a_{k-2}$，则

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=3a_k-a_{k-1}-2a_{k-2}\\&=2a_k+a_k-a_{k-1}-2a_{k-2}\\&>2a_k+2a_{k-1}-a_{k-1}-2a_{k-2}\\&=2a_k+(a_{k-1}-2a_{k-2})\\&>2a_k\end{aligned}$$

所以，对 $n>3$，均有 $a_n>2a_{n-1}$.

由此，得

$$a_n>2a_{n-1}>2^2a_{n-2}>\cdots>2^{n-3}a_3=3\times 2^{n-2}$$

B6-046　设 q 是任意正实数，而 a_n（n=1，2，…）为实数. $a_0=1$，$a_1=1+q$，且对所有正整数 k 满足以下等式；

（1）$\dfrac{a_{2k-1}}{a_{2k-2}}=\dfrac{a_{2k}}{a_{2k-1}}$；

（2）$a_{2k}-a_{2k-1}=a_{2k+1}-a_{2k}$.

证明：对每个给定的正实数 q，总能找到正整数 N，使得对所有正整数 $n>N$，都有 $a_n>1994$.

【题说】1994 年澳大利亚数学奥林匹克二试题 1.

【证】

$$a_2=a_1^2/a_0=(1+q)^2$$

$$a_3=2a_2-a_1=(1+q)(2q+1)$$

$$a_4=a_3^2/a_2=(2q+1)^2$$

$$a_5=2a_4-a_3=(2q+1)(3q+1)$$

……

一般地，用数学归纳法易证

$$a_{2k}=(kq+1)^2,\ a_{2k+1}=(kq+1)((k+1)q+1)$$

若 $a_{2k}>1994$，则对一切 $n>2k$，有 $a_n>1994$．由 $(kq+1)^2>1994$，解得 $k>\frac{\sqrt{1994}-1}{q}$．取 $N=2([\frac{\sqrt{1994}-1}{q}]+1)$，则当 $n>N\geq 2k$ 时，有 $a_n>1994$．

B6-047　设函数 $f: N_+\to N_+$，满足条件 $f(1)=1$，且对任意 $n\in N_+$ 都有

$$\begin{cases}3f(n)f(2n+1)=f(2n)(1+3f(n))\\ f(2n)<6f(n)\end{cases}$$

试求方程　$f(k)+f(l)=293,\ k<l$　(*)

的所有解．

【题说】1995 年中国数学奥林匹克（第十届数学冬令营）题 2．

【解】由题设得

$$3f(n)\cdot(f(2n+1)-f(2n))=f(2n)<6f(n)\qquad(1)$$

从而

$$0<f(2n+1)-f(2n)<2$$

即　$$f(2n+1)=f(2n)+1\qquad(2)$$

将（2）代入（1），得

$$f(2n)=3f(n)\qquad(3)$$

将 n 表示成二进制数．设

$$n=2^{m_1}+\cdots+2^{m_s}$$

其中 $m_1>\cdots>m_s\geq 0$．那么由 $f(1)=1$ 及（2）、（3），用归纳法不难证明

$$f(2^{m_1}+\cdots+2^{m_s})=3^{m_1}+\cdots+3^{m_s}\qquad(4)$$

设 $k=2^{m_1}+\cdots+2^{m_s}<l=2^{n_1}+\cdots+2^{n_t}$

则方程（*）即

$$(3^{m_1}+\cdots+3^{m_s})+(3^{n_1}+\cdots+3^{n_t})$$
$$=3^5+3^3+2\cdot 3^2+3+2\cdot 3^0\qquad(5)$$

由于右边 3^2、3^0 系数均为 2，故在 k、l 的二进制表示中都含有 2^2 和 2^0 的项，注意到 $k<l$，l 的最高项为 2^5．故满足条件的（k，l）有 4 组：

1° $k=2^2+1=5$，$l=2^5+2^3+2^2+2+1=47$

2° $k=2^2+2+1=7$，$l=2^5+2^3+2^2+1=45$

3° $k=2^3+2^2+1=13$，$l=2^5+2^2+2+1=39$

4° $k=2^3+2^2+2+1=15$，$l=2^5+2^2+1=37$

B6-048　设 n 是大于 1 的奇数，已知

$$X_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})=(1,0,\cdots,0,1)$$

$$X_k=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})$$

其中 $x_i^{(k)}=\begin{cases}0, & x_i^{(k-1)}=x_{i+1}^{(k-1)}\\1, & x_i^{(k-1)}\neq x_{i+1}^{(k-1)}\end{cases}$

$i=1,2,\cdots,n$，$x_{n+1}^{(k-1)}=x_1^{(k-1)}$．

若正整数 m 满足 $X_m=X_0$，求证：m 是 n 的倍数．

【题说】1995 年中国数学奥林匹克（第十届数学冬令营）题 6．

【证】定义 $x_{kn+i}=x_i^{(0)}$，$i=1,2,\cdots,n$；$k\in Z$．

由于 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})=(1,0,\cdots,0,1)$

易见数列 $\{x_{kn+i}\}$ 是以 n 为最小正周期的周期数列，且对任意 i，有 $x_{-i}=x_{i+1}$．

由已知的递推关系

$$x_i^{(1)}=x_i+x_{i+1}$$

$$x_i^{(2)}=x_i^{(1)}+x_{i+1}^{(1)}$$

$$=x_i+2x_{i+1}+x_{i+2}$$

一般地，

$$x_i^{(j)}=\sum_{k=0}^{j}C_j^k x_{i+k}$$

从而

$$x_i=x_i^{(m)}=\sum_{k=0}^{m}C_m^k x_{i+k}=\sum_{k=0}^{m}C_m^{m-k}x_{i+k}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}C_m^k x_{i+m-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}C_m^k x_{k-i-m+1}$$

$$=x_{1-i-m}^{(m)}=x_{1-i-m}=x_{i+m}$$

即m也是周期数列 $\left\{x_i\right\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ 的一个周期，因此它是最小正周期n的倍数．

因此，m 是 n 的倍数．

B6-049　m 是正整数，数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m$ 的长度为 m，其各项 a_i 是整数，且 $1\leq a_i\leq 4$．数列若满足条件："若 $a_i=a_j$ 且 $a_{i+1}=a_{j+1}$，则 $i=j$．"求 m 的最大值．

【题说】1995 年日本数学奥林匹克预选赛题 9．

【解】由条件知，(a_i,a_{i+1}) 的不同组合有（1，1），（1，2），…，（4，4）等 16 种．而数列中相同的组合不能出现两次，从而数列的长度 m 不超过 17．下面的数列长度为 17，且满足题设条件：1，1，2，1，3，1，4，2，2，3，2，4，3，3，4，4，1．故所求 m 的最大值为 17．

B6-050　设 u 为区间（0，1）内一实参数，定义

$$f(x)=\begin{cases}0 & \leq x \leq u \\ 1-(\sqrt{ux}+\sqrt{(1-u)(1-x)})^2 & u \leq x \leq 1\end{cases}$$

数列 $\{u_n\}$ 递归定义如下：

$$u_1=f(1),\quad u_n=f(u_{n-1})\quad(n>1)$$

证明：一定存在一个正整数 k 使 $u_k=0$.

【题说】第二十七届（1995 年）加拿大数学奥林匹克题 5.

【证】易知 $f(1)=u_1=1-u$. 对任意 $x\in[u,1]$，$u\leq x$ 且 $1-x\leq 1-u$，所以

$$\begin{aligned}f(x)&=1-(\sqrt{ux}+\sqrt{(1-u)(1-x)})^2\\&=1-ux-(1-u)(1-x)-2\sqrt{ux(1-u)(1-x)}\\&=u+x-2ux-2\sqrt{ux(1-u)(1-x)}\\&\leq u+x-2ux-2u(1-x)\\&=x-u\end{aligned}$$

于是，若 u_1，u_2，…，u_n 均 $\geq u$，则

$$\begin{aligned}u_{n+1}&=f(u_n)\leq u_n-u\\&\leq u_{n-1}-2u\leq\cdots\\&\leq 1-(n+1)u\end{aligned}$$

因此，对于充分大的 k，$u_{k-1}<u$，从而

$$u_k=f(u_{k-1})=0$$

B6-051 已知 $a_0=1$，$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+\dfrac{a_{n-1}}{1+(a_{n-1})^2}$，$n\geq 1$. 证明：$52<a_{1371}<65$.

【题说】伊朗第十届数学奥林匹克第二阶段题 2.

【证】由于当 $n=1371$ 时，$\sqrt{2n+1}\approx 52.37$，$\sqrt{3n+2}\approx 64.148$. 故只需证明对所有 $n\geq 0$

$$\sqrt{2n+1}\leq a_n\leq\sqrt{3n+2}\tag{1}$$

由归纳法易证

$$a_n=a_{n-1}+\frac{1}{a_{n-1}},\quad n\geq 1\tag{2}$$

并且 a_n 递增，所以将（2）平方得

$$a_{n-1}^2+2<a_n^2\leq a_{n-1}^2+3\tag{3}$$

用归纳法及（3）易得（1）.

B6-052　假设 a_1，a_2，a_3，…是无穷的自然数列，$a_1=1$，而且当 $k>1$ 时有不等式

$$a_k\leq 1+a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}$$

证明：所有的自然数都可以表示成这个数列的某些项之和的形式（可以只有一项构成）.

【题说】1960 年匈牙利数学奥林匹克题 2.

【证】我们证明稍广一点的断言：如果自然数 $n\leq a_1+a_2+\cdots+a_k$，那

么 n 可以表示成 a_1，a_2，…，a_k 中某些数的和．

k=1 时断言显然成立，假设断言对于 k-1 成立，则自然数 $n\le a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}$ 时 n 可以表示成 a_1，a_2，…，a_{k-1} 中某些数的和．

若 $1+a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}\le n\le a_1+a_2+\cdots+a_k$，则由已知条件 $0\le n-a_k\le a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}$．于是数 $n-a_k$ 或者等于 0，或者根据归纳假设可以表示成 a_1，a_2，…，a_{k-1} 中某些数的和．因此 n 可以表示成 a_1，a_2，…，a_k 中某些数的和．

B6-053　考察数列｛c_n｝：

$$c_1=c_1+c_2+\cdots+a_8$$

$$c_2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_8^2$$

$$\cdots\cdots$$

$$c_n=a_1^n+a_2^n+\cdots+a_8^n$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_8$ 是不全为 0 的实数．假定该数列中有无限多项 $c_n=0$．求出所有使 $c_n=0$ 的自然数 n．

【题说】第九届（1967 年）国际数学奥林匹克题 5．本题由原苏联提供．

【解】不妨设 a_1 的绝对值为最大，则必有某个 a_i，满足 $a_i=-a_1$（$i\ne1$）．

否则，当 n 充分大时，

$$|c_n|=|a_1^n[1+\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^n+\cdots+\left(\frac{a_8}{a_1}\right)]|>0$$

不失一般性可设　　　　$a_2=-a_1$

由于使 $c_n=0$ 的 n 必是奇数，所以 $a_1^n+a_2^n=0$．把 a_1^n，a_2^n 去掉后所得的和 c_n 仍然有无穷多个为 0．根据上面的推理，有（适当调整编号）：

$$a_3=-a_4，a_5=-a_6，a_7=-a_8$$

因而 n 为奇数时，$c_n=0$．

B6-054　一次竞赛在 n（>1）轮中共发了 m 枚奖章．第一轮发了一枚又余下的 $m-1$ 枚的 $\frac{1}{7}$，第二轮发了 2 枚又余下的 $\frac{1}{7}$，…．直至第 n 轮正好发了 n 枚而没有余下的奖章．这个竞赛共包括几轮？一共发了多少奖章？【题说】第九届（1967 年）国际数学奥林匹克题 6．本题由匈牙利提供．

【解】因为 $\left\{[\cdots\left(\left(m-1\right)\cdot\frac{6}{7}-2\right)\cdot\frac{6}{7}-\cdots]\cdot\frac{6}{7}-n+1\right\}\cdot\frac{6}{7}=n$

而 $\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}+2\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^{n-2}+\cdots+\left(n-1\right)\cdot\frac{6}{7}=6\times[\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}+\cdots+\frac{6}{7}-\left(n-1\right)]=6\left(n-1\right)+36[\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}-1]$，所以

$$m\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}-6n+6-36[\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}-1]=n$$

即　　　　$$(m-36)\cdot6^{n-1}=7^n\cdot(n-6)$$

所以　　　　　　　　　　$6^{n-1}|(n-6)$

但　　　　　　　　　　　$6^{n-1}>n-6$

所以　　　　　　　　　　$n=6$，$m=36$

B6-055　设 $\{a_n\}$ 为有下列性质的实数列：

$$1=a_0\le a_1\le a_2\le\cdots\le a_n\le\cdots \quad (1)$$

又 $\{b_n\}$ 是由下式定义的数列：

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_k-1}{a_k}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{a_k}},\quad n=1,2,3\cdots \quad (2)$$

证明：(a) 对所有 $n=1,2,3,\cdots$，有 $0\le b_n<2$；

(b) 对 $0\le c<2$ 的任一 c，总存在一个具有性质 (1) 的数列 $\{a_n\}$，使得由 (2) 导出的数列 $\{b_n\}$ 中有无限多个下标 n 满足 $b_n>c$．

【题说】第十二届（1970 年）国际数学奥林匹克题 3．本题由瑞士提供．

【证】(a)

$$\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{\sqrt{a_k}}=\frac{a_{k-1}}{\sqrt{a_k}}\left(\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}\right)$$

$$=\frac{a_{k-1}}{\sqrt{a_k}}\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}+\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}-\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)$$

$$=\left(\sqrt{\frac{a_{k-1}}{a_k}}+\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}-\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)$$

$$<2\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}-\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)$$

所以

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{\sqrt{a_k}}<2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}-\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)<\frac{2}{\sqrt{a_0}}$$

$=2$

(b) 令 $1/\sqrt{a_k}=d^k$，则当 $0<d<1$ 时条件 (1) 满足．又和式 b_n 中第 k 项是

$$\left(1-\frac{d^{-2(k-1)}}{d^{-2k}}\right)d^k=(1-d^2)d^k$$

因此
$$b_n=\sum_{k=1}^{n}(1-d^2)d^k=(1-d^2)\sum_{k=1}^{n}d^k$$

$$=(1-d^2)\frac{d-d^{n+1}}{1-d}=d(1+d)(1-d^n)$$

现在要求对无穷多个 n，$d(1+d)(1-d^n)>c$，则

$$d^n<1-\frac{c}{d(1-d)} \quad (3)$$

为此，只要选择 d，满足 $\sqrt{\frac{c}{2}}<d<1$．

事实上，这时有 d（1+d）＞c．故（3）右端为一正数．因为 0＜d＜1 时，$d^n\to 0$，所以存在一个确切的自然数 N（如取 N=[ln（1-c/（d（1+d）/lnd））]），使得当 n＞N 时（3）成立．于是（b）得证．

B6-056　证明：如果｛a_n｝是两两互异的自然数组成的无穷序列，并且这些自然数的十进制表达式中不含数字 0，那么

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}<29$$

【题说】1970 年～1971 年波兰数学奥林匹克三试题 1．

【证】k 位数中，数字不含 0 的共 9^k 个，其中首位数字为 1，2，…，9 的各 9^{k-1} 个，因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{9^k}{10^k}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{9}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{9}\right)\times\frac{1}{1-\frac{9}{10}}$$

$$=10\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{9}\right)<29$$

B6-057　证明：数列｛2^n-3｝，n=2，3，4，…中至少有一个无穷子列，其中的项两两互素．

【题说】第十三届（1971 年）国际数学奥林匹克题 3．本题由波兰提供．

【证】我们用归纳法来构造一个这样的子列．

取 $n_1=2$．若 n_1，…，n_k 已经取定，且 $2^{n_i}-3$（1≤i≤k）两两互素，将它们分解成素因子的积，设在这些积中出现的素因子为

$$p_j\ (1\le j\le n)$$

令
$$n_{k+1}=(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_m-1)+2$$

则
$$2^{n_{k+1}}-3=4\cdot 2^{(p_1-1)\cdots(p_m-1)}-3$$

$$\equiv 4-3=1\ (\mathrm{mod}\ p_j)\quad(1\le j\le n)$$

故 $2^{n_{k+1}}-3$ 不能被任一 p_j 整除，因而它与 2^{n_i}（1≤j≤k）都互素，这样，子列｛$2^{n_k}-3$｝就是满足题目要求的一个子列．

B6-058　设 a_1，a_2，a_3，…是正整数无穷数列，且对所有 k≥1 有 $a_k<a_{k+1}$．证明：在上述数列出，有无穷多个 a_m 可以表示成

$$a_m=xa_p+ya_q$$

的形式，其中 x，y 是适当的正整数，并且 p≠q．

【题说】第十七届（1975 年）国际数学奥林匹克题 2．本题由英国提供．

【证】考虑模 a_1 的剩余类．因为关于模 a_1 的剩余类只有有限个，所以必存在一个剩余类，其中包含所给数列的无穷多项，设 a_p 是该剩余类中的最小的异于 a_1 的数，则此类中其余的 $a_m>a_p$，都可表成 $a_m=a_p+ya_1$，y 为正整数．

B6-059　在一个实数的有限数列中，任何七个连续项之和都是负

数，而任何十一个连续项之和都是正数．试问：这样一个数列最多能包含多少个项？

【题说】第十九届（1977 年）国际数学奥林匹克题 2．本题由越南提供．

【解】设所求的有最大项数的数列为 a_1，a_2，…，a_n．

首先，n≤16．否则，

$$0<\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=i}^{i+10}a_i=\sum_{i=1}^{11}\sum_{j=i}^{i+6}a_i<0$$

矛盾．

其次，n=16 是可能的．例如数列（5，5，-13，5，5，5，-13，5，5，-13，5，5，5，-13，5，5），因此所求的最大数为 16．

B6-060　在正整数集上定义一个函数 f（n）如下：当 n 为偶数时，f（n）=n/2；当 n 为奇数时，f（n）=n+3．

1．证明：对任何正整数 m，数列

a_0=m，a_1=f（a_0），…，a_n=f（a_{n-1}），…

中总有一项为 1 或 3．

2．在全部正整数中，哪些 m 使上述数列必然出现 3？哪些 m 使上述数列必然出现 1？

【题说】1979 年全国联赛二试题 5．

【解】1．若 $a_k>3$，则 a_k 为偶数时，$a_{k+1}=a_k/2<a_k$；a_k 为奇数时，$a_{k+2}=(a_k+3)/2<a_k$．由于数列取正整数值，任一无限子列不能严格递减，所以必有一项≤3．如果这项为 2，则下一项为 1，故数列中必有一项为 1 或 3．

2．当 m 是 3 的倍数时，一切项都是 3 的倍数，因此，数列必然出现 3．当 m 不是 3 的倍数时，一切项都不是 3 的倍数，因此，数列必然出现 1．

B6-061　无穷正实数列｛x_n｝具有以下性质：

$$x_0=1,\ x_{i+1}\le x_i\ (i\ge 0)$$

（1）试证：对具有上述性质的任一数列，总能找到一个 n≥1，使下式成立．

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\ge 3.999$$

（2）寻找这样一个数列，下列不等式：

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}<4$$

对任一 n 均成立．

【题说】第二十三届（1981 年）国际数学奥林匹克题 3．

【证】（1）$\dfrac{x_0^2}{x_1}+\dfrac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\dfrac{x_{n-1}^2}{x_n}$

$$\ge\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-2}^2}{x_{n-1}}+\frac{x_{n-1}}{1}$$

$$\geq \frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-3}^2}{x_{n-2}}+2x_{n-2}$$

$$\geq \frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-4}^2}{x_{n-3}}+2\sqrt{2}x_{n-3}$$

$$\geq\cdots$$

$$\geq \frac{x_0^2}{x_1}+2^{1+\frac{1}{2}+\cdots+2^{\frac{1}{n-3}}}x_1$$

$$\geq 2^{1+\frac{1}{2}+\cdots 2^{\frac{1}{n-2}}}=2^{2-\frac{1}{2^{n-2}}}\to 4$$

因此当 n 足够大时，就有

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\geq 3.999$$

（2）取无穷递缩等比数列$x_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$，$n=0$，1，…，

则

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}$$

$$=2+1+\frac{1}{2}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}<4$$

B6-062　n 个不同的数，依递增次序写成一行，再把这些数写在第二行，顺序不拘．将上、下两行的每对数相加，和数写在第三行．如果第三行的数是按递增顺序排列，求证：第一、二两行数的次序完全一致．

【题说】第十八届（1984 年）全苏数学奥林匹克十年级题 2．

【证】设给定的（第一行）数为

$$a_1<a_2<\cdots<a_m<a_{m+1}<\cdots<a_n$$

第二行数是 b_1，b_2，…，b_n．**则**

$$a_1+b_1<a_2+b_2<\cdots<a_n+b_n \qquad (1)$$

若 $b_1\neq a_1$，**设** $b_m=a_1$（$m\geq 2$），**则由（1），对** $i=1$，2，…，$m-1$，**有**

$$a_i+b_i<a_m+a_1$$

由于 $a_i\geq a_1$，**所以** $b_i<a_m$．**于是** a_1，b_2，b_2，…，b_{m-1} **这 m 个不同的数均小于** a_m．**但** $a_1,a_2,\cdots,a_n$ **中只有** $m-1$ **个数小于** a_m．**矛盾．因此** $b_1=a_1$．

同理 $b_2=a_2$，…，$b_n=a_n$．**因此第二行与第一行的次序完全相同．**

B6-063　设 a_1，a_2，a_3，…**是一不减的正整数序列，对于** $m\geq 1$，**定义** $b_m=\min\{n|a_n\geq m\}$ **（即** b_m **是使** $a_n\geq m$ **的 n 最小值），若** $a_{19}=85$，**试求** $a_1+a_2+\cdots+a_{19}+b_1+b_2+\cdots+b_{85}$ **的最大值．**

【题说】第十四届（1985 年）美国数学奥林匹克题 5．本命题的一般情况容易入手．

【解】我们证明一般命题：若 $a_q=p$，**则**

$$a_1+a_2+\cdots+a_q+b_1+\cdots+b_p=p(q+1) \qquad (1)$$

如果 $a_1=a_2=\cdots=a_q=p$，**则** $b_1=b_2=\cdots=b_p=1$，**易得（1）式．**

若有 a_i＜p（1≤i＜q），令 t 为使 a_t＜p 的最大下标，且令 a_t=u，若 a_t 增加 1，则 b_j（j≠u+1）保持不变，而 b_{u+1} 减少 1．所以（1）左边总和不变．经过不断调整，最后可得常数序列．由此可导出所求证的结果．

因此，当 q=19，p=85 时，$a_1+\cdots+a_{19}+b_1+\cdots+b_{85}=85\times(19+1)=1700$．

[别解]考虑坐标平面上的矩形｛（x，y）：1≤x≤q；1≤y≤p｝．将点（i，a_i）用水平与竖直线段连结起来形成阶梯形，（i，a_i）都是阶梯形的顶点．这时，$a_1+a_2+\cdots+a_q$ 是阶梯形中整点的个数．$b_1+b_2+\cdots+b_p$ 是另一阶梯形（它与前一阶梯形合成整个矩形）中整点的个数．每条水平线段 y=j（1≤j≤p）上有一点被计算了两次．所以

$$a_1+a_2+\cdots+a_q+b_1+b_2+\cdots+b_p=pq+p=p(q+1)$$

B6-064　递增数列 1，3，4，9，10，12，13，…由一些正整数组成，它们或者是 3 的幂，或者是若干个不同的 3 的幂之和．求此数列的第 100 项．

【题说】第四届（1986 年）美国数学邀请赛题 7．

[设] 由前 6 个 3 的幂：1，3，9，27，81，243 可以组成 $2^6-1=63$ 个不同的 3 的幂之和，它是数列的前 63 项；第 64 项是 $3^7=729$．第 65项开始，不含243的项有$C_5^1+C_5^2+\cdots+C_5^5=31$个．第96项应是729＋243，接下去是

729+243+1，729+243+3，729+243+1+3

故第 100 项是 729+243+9=981．

[别解]注意在三进制中，数列由不含数字 2 组成．

B6-065　已给实数 a＞1，构造一个有界无穷数列 x_0，x_1，x_2，…，使得对每一对不同的非负整数 i、j 有

$$|x_i-x_j|\cdot|i-j|^a\geq 1$$

【题说】第三十二届（1991 年）国际数学奥林匹克题 6．本题由荷兰提供．

【解】设 p 为正整数，q 为非负整数．

当q≤p时，$|p-q\sqrt{2}|=\dfrac{|p^2-2q^2|}{p+q\sqrt{2}}\geq\dfrac{1}{p+q\sqrt{2}}\geq\dfrac{1}{p(\sqrt{2}+1)}$

当q＞p时，$|p-q\sqrt{2}|=q\sqrt{2}-p>p(\sqrt{2}-1)\geq\dfrac{1}{p(\sqrt{2}+1)}$

因此恒有

$$|p-q\sqrt{2}|\geq\frac{1}{(\sqrt{2}+1)p}>\frac{\sqrt{2}}{4p}\qquad(1)$$

取$x_j=4(j/\sqrt{2}-[j/\sqrt{2}])$，j=0，1，2，…，则$\{x_j\}$为无穷有界数列，并且对每一对不同的非负整数 i、j，由（1），

$$|x_i-x_j|=|4\frac{i-j}{\sqrt{2}}-([\frac{i}{\sqrt{2}}]-[\frac{j}{\sqrt{2}}])|>\frac{4}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4|i-j|}$$

B6-066　对任一实数序列 A=（a_1，a_2，a_3，…），定义△A 为序列（a_2-a_1，a_3-a_2，a_4-a_3，…），它的第 n 项是 $a_{n+1}-a_n$．假定序列△（△A）

的所有的项都是 1，且 $a_{19}=a_{92}=0$，试求 a_1．

【题说】第十届（1992 年）美国数学邀请赛题 8．

【解】设△A 的首项是 d，则依条件，△A 为（d，d+1，d+2，…），其中第 n 项是 d+（n-1）．因此序列 A 可写成

（a_1，a_1+d，$a_1+d+(d+1)$，$a_1+d+(d+1)+(d+2)$，…），

其中第n项是$a_n=a_1+(n-1)d+\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$．

由此可知a_n是n的二次多项式，首项系数是$\frac{1}{2}$．因为$a_{19}=a_{92}=0$，所以

$$a_n=\frac{1}{2}(n-19)(n-92)$$

从而
$$a_1=\frac{1}{2}(1-19)(1-92)=819$$

B6-067　设正数数列 a_1，a_2，…，a_n，…满足：

$$\frac{1}{a_1a_2a_3}+\frac{1}{a_2a_3a_4}+\cdots+\frac{1}{a_{k-2}a_{k-1}a_k}=\frac{(k+1)a_{k-2}}{4a_{k-1}a_k}\quad(k=3,4,\cdots)$$

且 $a_4=4$，$a_5=5$．

（1）求 a_1，a_2，a_3；

（2）证明 a_1，a_2，…，a_n，…是自然数数列，即 $a_k=k$（k=1，2，…）．

【题说】1993 年四川省赛题 6．

【证】（1）由$\frac{1}{a_1a_2a_3}=\frac{4a_1}{4a_2a_3}$，得$a_1=1$．

由$\frac{1}{a_1a_2a_3}+\frac{1}{a_2a_3a_4}=\frac{5a_2}{4a_3a_4}$及$a_4=4$不难得$a_2=2$．同理可得$a_3=3$．

（2）假设 3≤k＜n 时结论成立．

则在 k=n 时，在已知等式中令 k=n-1，n 并将两式相减得

$$\frac{1}{(n-2)(n-1)a_n}=\frac{(n+1)(n-2)}{4(n-1)a_n}-\frac{n(n-3)}{4(n-2)(n-1)}$$

从而

$$a_n=\frac{(n+1)(n-2)^2-4}{n(n-3)}=n$$

于是对一切自然数 k，均有 $a_k=k$．

B6-068　设 a、b 是正奇数，序列 f_n 定义下：$f_1=a$，$f_2=b$，对 n≥3，f_n 是 $f_{n-1}+f_{n-2}$ 的最大奇约数．证明，当 n 充分大时 f_n 为常数，并确定此常数之值（用关于 a，b 的函数表示）．

【题说】第二十二届（1993 年）美国数学奥林匹克题 4．

【证】因为 f_{n-1}、f_{n-2} 都是奇数，所以 $f_{n-1}+f_{n-2}$ 是偶数，从而它的最大的奇约数

$$f_n \le \frac{f_{n-1}+f_{n-2}}{2} \qquad (n\ge 3)$$

所以 $f_n \le \max\{f_{n-1}, f_{n-2}\}$，当且仅当 $f_{n-1}=f_{n-2}$ 时等号成立．

对 $k\ge 1$，令 $C_k=\max\{f_{2k}, f_{2k-1}\}$，则

$$f_{2k+1}\le \max\{f_{2k}, f_{2k-1}\}=C_k$$

且 $$f_{2k+2}\le \max\{f_{2k+1}, f_{2k}\}\le \max\{C_{k+1}, C_k\}=C_k$$

于是，$C_{k+1}\le C_k$，当且仅当 $f_{2k}=f_{2k-1}$ 时等号成立．

因 $\{C_n\}$ 是不增的正整数序列，所以它最终是一个常数，$\{f_n\}$ 同样如此．

当 n 充分大时，f_n=常数 C，所以

$$(a, b)=(a, b, f_3)=(a+b, b, f_3)=(b, f_3)$$
$$=\cdots=(f_{n-1}, f_n)=f_{n+1}=C$$

B6-069 以 $a_k' = \frac{a_k+a_{k+1}}{2}$ 为项的数列 $\{a_k'\}$ 叫做实数数列 $\{a_k\}$ 的平均，考虑如下数列：$\{a_k\}$，$\{a_k'\}$ —— $\{a_k\}$ 的平均，$\{a_k''\}$ —— $\{a_k'\}$ 的平均，…．如果这些数列都是由整数组成，则称数列 $\{a_k\}$ 是好数列．试证：如果数列 $\{x_k\}$ 是好数列，则数列 $\{x_k^2\}$ 也是好数列．

【题说】第十九届（1993 年）全俄数学奥林匹克十年级二试题 8．

【解】若一个数列的前 m 次平均都是整数数列，则称这个数列为 m-好数列．

设数列 $\{x_k\}$ 是好数列．显然 $\{x_k^2\}$ 是0-好数列．假设对非负整数m，每个好数列的各项平方必组成m-好数列，则由于 $\left\{\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right\}$，$\left\{\frac{x_k+x_{k+1}}{2}-x_{k+1}\right\}$ 都是好数列，所以 $\left\{\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)^2\right\}$，$\left\{\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}-x_{k+1}\right)^2\right\}$ 也都是m-好数列，从而和

$$\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)^2+\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}+x_{k+1}\right)^2=\frac{x_k^2+x_{k+1}^2}{2}$$

组成的数列也是m-好数列，即 $\{x_k^2\}$ 是 $(m+1)$-好数列．

于是，对任意非负整数m，$\{x_k^2\}$ 是m-好数列．这就是说，$\{x_k^2\}$ 是好数列．

[注 1]公差为偶数的等差数列，如果由整数组成，那么它就是好数列（例如 1，3，5，7，…）．

[注2]可将数列“平均”的定义改为更一般的 $a_k' = \frac{a_k+a_{k+1}+\cdots+a_{k+p-1}}{p}$（$p\in N$）．如果 (x_k) 是好数列，当且仅当p为素数时，$\{x_k^p\}$ 也是好数列．

B6-070 将与 105 互素的所有正整数，从小到大排成一个数列，试

求出该数的第 1000 项．

【题说】1994 年全国联赛二试题 2．

【解】105=3×5×7．由容斥原理，每连续 105 个数中，有

$$105-\left(\frac{105}{3}+\frac{105}{5}+\frac{105}{7}\right)+\frac{105}{3\times5}+\frac{105}{5\times7}+\frac{105}{3\times7}-\frac{105}{3\times5\times7}$$

$$=105\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)=48$$

个数与 105 互素．

$$1000=48\times20+40=48\times20+48-8$$

$$a_{48\times20}=105\times20=2100$$

而自 105 向前倒数，第 9 个与 105 互素的数是 86，所以

$$a_{1000}=2100+86=2186$$

B6-071　由能被 3 整除且比完全平方数小 1 的整数组成递增序列 3，15，24，48，…，这个序列的第 1994 项除以 100 的余数是多少？

【题说】第十二届（1994 年）美国数学邀请赛题 1．

【解】一个比完全平方数小 1 的数具有形式

$$n^2-1=(n+1)(n-1)，n=2，3，\cdots$$

当且仅当 n 不能被 3 整除时，n^2-1 是 3 的倍数．所以这个序列的第（2k-1）项和第（2k）项分别是 $(3k-1)^2-1$ 和 $(3k+1)^2-1$．因此，这个序列的第 1994 项是

$$(3\cdot997+1)^2-1=(3000-8)^2-1=3000^2-16\cdot3000+63$$

故它除以 100 的余数为 63．

B6-072　设 a_1，a_2，a_3，…是正实数数列，对所有的 $n\geq1$ 满足条件 $\sum_{j=1}^{n}a_j\geq\sqrt{n}$．证明对所有的 $n\geq1$，$\sum_{j=1}^{n}a_j^2>\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$．

【题说】第二十三届（1994 年）美国数学奥林匹克题 4．

【证】先证一个更一般的命题：

设 a_1，a_2，…，a_n 和 b_1，b_2，…，b_n 是正数，且

$$b_1>b_2>\cdots>b_n \qquad (1)$$

若对所有的 k=1，2，…，n

$$\sum_{j=1}^{k}b_j\leq\sum_{j=1}^{k}a_j^2 \qquad (2)$$

则有

$$\sum_{k=1}^{k}b_j^2\leq\sum_{j=1}^{k}a_j^2 \qquad (3)$$

事实上，设 $b_{n+1}=0$，由（1）和（3）可得

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k-b_{k+1})\sum_{j=1}^{k}b_j\leq\sum_{k=1}^{n}(b_k-b_{k+1})\sum_{j=1}^{k}a_j$$

改变求和的次序得

$$\sum_{j=1}^{n}b_j\sum_{k=j}^{n}b_k-b_{k+1}\leq\sum_{j=1}^{n}a_j\sum_{k=j}^{n}(b_k-b_{k+1})$$

由此可得

$$\sum_{j=1}^{n} b_j^2 \le \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$$

两边同时平方，再利用 Cauchy 不等式就可以得到

$$\sum_{j=1}^{n} b_j^2 \le \sum_{j=1}^{n} a_j^2$$

为了证明本题的不等式，令

$$b_j = \sqrt{j} - \sqrt{j-1} = \frac{1}{\sqrt{j}+\sqrt{j-1}} \qquad (j=1, 2\cdots, n)$$

则
$$\sum_{j=1}^{n} a_j^2 \ge \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(\sqrt{j}+\sqrt{j-1})^2}$$

$$> \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(2\sqrt{j})^2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

B6-073　设 2n 个实数 a_1，a_2，…，a_n；b_1，…，b_n（$n\ge3$）满足条件：

（1）$a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

（2）$0<a_1=a_2$，$a_i+a_{i+1}=a_{i+2}$　　　　（$i=1, 2, \cdots, n-2$）

（3）$0<b_1\le b_2$，$b_i+b_{i+1}\le b_{i+2}$　　　　（$i=1, 2, \cdots, n-2$）

求证：$a_{n-1}+a_n\le b_{n-1}+b_n$．

【题说】1995 年中国数学奥林匹克（第十届数学冬令营）题 1．

【证】设 $c_i=a_i-b_i$（$1\le i\le n$），则 $c_1\ge c_2$，$c_{i+2}\le c_i+c_{i+1}$（$i=1, 2, \cdots, n-2$）．

并且

$$c_1+c_2+\cdots+c_n=0 \qquad (1)$$

我们证明更强一点的命题：如果对于 k（$2\le k\le n$）有

$$c_1+c_2+\cdots+c_k\ge0 \qquad (2)$$

那么

$$c_1+c_2+\cdots+c_{k-1}\ge0 \qquad (3)$$

事实上，若有连续两项 c_{i-1}，$c_i\le0$（$2\le i\le k$），则 $c_{i+1}\le0$，$c_{i+2}\le0$，$c_k\le0$．由（2）立即得出（3）．若每连续两项 c_{i-1}，c_i 中至少有一个>0，则 $c_1>0$．并且对每个≤0 的 c_i，c_{i-1} 与 c_{i+1} 均为正，从而 $c_{i-1}+c_i\ge c_{i+1}>0$．于是将 c_1，c_2，…，c_{k-1} 中，每个负项与它前面一项合并，$c_1+c_2+\cdots+c_{k-1}$ 就变成若干正项的和，当然（3）成立．

由于上述命题及(1)，我们有 $c_1+c_2+\cdots+c_{n-1}\ge0$，$c_1+c_2+\cdots+c_{n-2}\ge0$．再由（1）减去此式，便得

$$c_{n-1}+c_n\le0$$

即

$$a_{n-1}+a_n\le b_{n-1}+b_n$$

B6-074　一个数列的前五项是 1，2，3，4，5，从第六项开始，每项比前面所有项的乘积少 1．证明：此数列的前 70 项的乘积恰是它们的平方和．

【题说】1995 年城市数学联赛低年级高水平题 2．

【证】设第 n 项为 a_n，$a_6=119$．$n\ge 6$ 时，

$$a_{n+1}=a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n-1=a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_{n-1}\cdot a_{n-1}$$
$$=a_n(a_n+1)-1$$

所以，$a_{n+1}-a_n+1=a_n^2$，而

$$\sum_{n=1}^{70}a_n^2=\sum_{n=6}^{70}a_n^2+55$$
$$=\sum_{n=6}^{70}(a_{n+1}-a_n+1)+55$$
$$=a_{71}-119+65+55$$
$$=a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_{70}$$

[别证]记第 n 项为 a_n，则 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=3$，$a_4=4$，$a_5=5$，$a_6=119$，$n\ge 6$ 时，

$$a_{n+1}=a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n-1$$
$$=(a_n+1)a_n-1$$

所以，$a_{n+1}-a_n+1=a_n^2$．从而

$$\sum_{n=1}^{70}a_n^2=(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)+\sum_{n=6}^{70}(a_{n+1}-a_n+1)$$
$$=55+(a_{71}-a_6+65)$$
$$=a_{71}+1$$
$$=a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_{70}$$

B6-075　设 p 是奇素数．各项不同的数列 a_n，$n\ge 0$ 定义如下：$a_0=0$，$a_1=1$，…，$a_{p-2}=p-2$，并且对所有的 $n\ge p-1$，a_n 是这样一个最小的正整数，使得它和它前面的任何项都不能组成长度为 p 的等差数列．证明：对所有的 n，a_n 是将 n 写成 p-1 进制数而将它看作是 p 进制数时所得出的数．

【题说】第二十四届（1995 年）美国数学奥林匹克题 1．

【证】用归纳法．对 $n<p-1$，结论显然．假设命题对$<n$ 的数均成立．设 b 是将 n 写成 p-1 进制数 $c_k(p-1)^k+c_{k-1}(p-1)^{k-1}+\cdots+c_0$ 后，看成 p 进制得出的数 $c_kp^k+c_{k-1}p^{k-1}+\cdots+c_0$．

b 以及 a_1，a_2，…，a_{n-1} 的 p 进制表示中，各位数字都不为 p-1．如果 b 与其中一些项组成长为 p 的等差数列，设首项为 a，公差为 d，将 d 表成 p 进制时右数第一个非零数字为 d′，在右数第 t 位；a 写成 p 进制时在右数第 t 位上的数字为 a′，则

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ \cdots,\ a+(p-1)d$$

写成 p 进制时，右数第 t 位上的数字为

$$a', a'+d', a'+2d', \cdots, a'+(p-1)d' \qquad (1)$$

（超过 p 的则往上进一位）由于（1）构成 modp 的完全剩余系，其中必有一个为 p-1（mod p），这与 b，a_1，…，a_{n-1} 的各位数字都不为 p-1 矛盾．所以，所说的等差数列不存在，从而 $a_n \le b$．

另一方面，设正整数 c＜b 且与 a_1，…，a_{n-1} 均不相同，将 c 写成 p 进制，如果其中各位数字均不为 p-1，则可将它看作（p-1）进制的数 c′．但由 c 的定义，c′＜n 并且与 1，2，…，n-1 均不相同，这是不可能的．因此 c 的数字中必有 p-1．设将这些 p-1 改为 1，其余≠p-1 的数字改为 0 所得的 p 进制数为 d，则 c-d，c-2d，…，c-（p-1）d 这些数的 p 进制中数字均不为 p-1，并且均小于 b，因而它们即是 a_1，a_2，…，a_{n-1} 中的 p-1 个数．由于它们与 c 构成 p 项的等差数列，所以 $a_n \ge b$．

综上所述，$a_n=b$．于是结论对一切自然数 n 成立．

B6-076　设 q_0，q_1，q_2，…是满足下列两个条件的无限整数数列：

（i）对所有的 m＞n≥0，m-n 整除 q_m-q_n．

（ii）对所有 n 存在多项式 p，使得 $|q_n|<p(n)$．

证明：存在多项式 Q，对所有的 n 有 $q_n=Q(n)$．

【题说】第二十四届（1995 年）美国数学奥林匹克题 4．

【证】设 d 是多项式 p 的次数，一次数不超过 d 的多项式

$$Q(x)=\sum_{i=0}^{d} q_i \prod_{\substack{0\le j\le d\\ j\ne i}} \frac{x-j}{i-j}$$

满足 $Q(i)=q_i$（i=0，1，2，…，d），这个多项式称为 Lagrange 插值多项式，我们将证明：对所有的 n≥0，有 $q_n=Q(n)$．

Q 的系数显然都是有理数,设 K≥1 是 Q 的所有系数的公分母.令 $r_n=K(Q(n)-q_n)$，则 $r_i=0$，对 i=0，1，…，d 成立．因为对任一整系数多项式 L（x）和任意两个不相同的整数 m、n，m-n 整除 L（m）-L（n），又已知 m-n 整除 q_m-q_n，所以 m-n 整除 r_m-r_n，对所有 m＞n≥0 成立．

因为 $|r_n|\le K(|Q(n)|+|q_n|)<K(|Q(n)|+p(n))$，所以存在充分大的正数 a、b，使得对 n≥0，

$$|r_n|<an^d+b \qquad (1)$$

另一方面，对任意 n＞d 与 0≤i≤d，n-i 整除 $r_n-r_i=r_n$．所以 n，n-1，…，n-d 的最小公倍数 M_n 整除 r_n．由于最大公约数（n-i，n-j）=（n-i，j-i）整除 j-i（0≤i≤j≤d），所以 $\prod_{0\le i<j\le d}(n-i, n-j) \le \prod_{0\le i<j\le d}(j-i)=A$，A 是仅与 d 有关的常数．易知 $M_n > \dfrac{n(n-1)\cdots(n-d)}{\prod_{0\le i<j\le d}(n-i, n-j)}$

（设一素因数 p 在 n，n-1，…，n-d 中次数分别为 a_0，a_1，…，a_d，$a_t=\max_{0\le i\le d} a_i$，则 $a_t=a_0+a_1+\cdots+a_d-\sum_{i\ne t}\min(a_t, a_i)$．$a_t$ 是 p 在 M_n 中的

次数，而$a_0+a_1+\cdots+a_d$是p在n（n-1）…（n-d）中的次数，$\sum_{i\neq t}\min$（a_t，a_i）小于p在$\prod_{0\leq i<j\leq d}$（n-i，n-j）中的次数），所以M_n＞$\frac{n(n-1)\cdots(n-d)}{A}$．由于n（n-1）…（n-d）是n的d+1次多项式，所以n≥N，N充分大时$M_n>an^d+b$．结合（1）及M_n整除r_n便得n≥N时$r_n=0$．

对N＞n＞d，取m≥N，则$r_m-r_n=-r_n$．m-n整除r_m-r_n，所以m-n整除r_n．由于m可任意大，所以此时亦有$r_n=0$．

于是，一切$r_n=0$（n≥0）即对所有n，Q（n）=q_n．

B6-077　自然数列｛a_i｝对所有i≠j有（a_i，a_j）=（i，j）．证明：对所有i∈N，$a_i=i$．（（m，n）表示自然数m和n的最大公约数．）

【题说】第二十一届（1995年）全俄数学奥林匹克十年级题5．

【证】每一个a_i被（a_i，a_{2i}）=（i，2i）=i整除，于是（a_{a_i}，a_i）=a_i，另一方面（a_{a_i}，a_i）=（a_i，i）=i，从而对所有i∈N，$a_i=i$．

B6-078　设D=｛1，2，…，10｝，f（x）是D到D上的一一映射，令$f_{n+1}(x)=f(f_n(x))$，$n\in N_+$；$f_1(x)=f(x)$．试求D的一个排列x_1，x_2，…，x_{10}，使

$$\sum_{i=1}^{10}x_i f_{2520}(i)=220$$

【题说】1996年江苏省赛题4．

【解】对任一个i（i=1，2，…，10），$f_0(i)=i$，$f_1(i)$，$f_2(i)$，…，$f_{10}(i)$中至少有两个相等，从而由f是一一映射推出有
$1\geq r_i\geq 10$，使$f_{r_i}(i)=i$．

因为$2520=2^3\times3^2\times5\times7$是1，2，3，…，10的最小公倍数，所以$r_i$整除2520（i=1，2，…，10）．由此得$f_{2520}(i)=i$（i=1，2，…，10）．

根据排序原理知$\sum_{i=1}^{10}x_i\cdot i\geq 10\times1+9\times2+8\times3+\cdots1\times10=220$，且等式成立的充要条件是$x_1$，$x_2$，…，$x_9$，$x_{10}$分别是10，9，8，…，2，1，故所求排列是10，9，8，7，6，5，4，3，2，1．

B6-079　设非整数的实数x＞1．证明：通项为$a_n=[x^{n+1}]-x[x^n]$（n=1，2，3，…）的数列｛a_n｝不是周期数列．即不存在正整数p，使得对任意自然数n都有$a_{p+n}=a_p$．（其中[x]表示不超过x的最大整数．）

【题说】1996年日本数学奥林匹克题3．

【证】若｛a_n｝是周期数列，则存在正整数p，对任意自然数k，n，均有$a_n=a_{n+kp}$，即

$$[x^{n+1}]-x[x^n]=[x^{n+kp+1}]-x[x^{n+kp}]$$

所以

$$x([x^{n+kp}]-[x^n])=[x^{n+kp+1}]-[x^{n+1}]$$

对于足够大的k，有$[x^{n+kp}]-[x^n]>0$，因而$x=\dfrac{[x^{n+kp+1}]-[x^{n+1}]}{[x^{n+kp}]-[x^n]}$是有理数．

记 $x=v/u$（其中 $u>1$，$(u,v)=1$），$b_n=x^n-[x^n]$，则 $0<b_n<1$（$n\geq 1$），且 b_n 是分母为 u^n 的既约分数，$b_{p+1}\neq b_1$．又由

$$\begin{aligned}a_n&=[x^{n+1}]-x[x^n]\\&=x^{n+1}-b_{n+1}-x(x^n-b_n)\\&=b_nx-b_{n+1}\end{aligned}$$

及 $a_{n+p}=a_n$ 得

$$b_{n+p}x-b_{n+p+1}=b_nx-b_{n+1}$$

即

$$b_{n+p+1}-b_{n+1}=x(b_{n+p}-b_n)$$

对任意自然数 n 都成立．因而

$$\begin{aligned}b_{p+2}-b_2&=x(b_{p+1}-b_1)\\b_{p+3}-b_3&=x(b_{p+2}-b_2)\\&=x^2(b_{p+1}-b_1)\\&\cdots\cdots\end{aligned}$$

所以，$x^{n-1}|b_{p+1}-b_1|=|b_{p+n}-b_n|<1$ 对任意自然数 n 都成立．但 $x>1$，且易知 $b_{p+1}\neq b_1$，从而当 $n\to+\infty$时，$x^{n-1}|b_{p+1}-b_1|\to+\infty$．矛盾．

B6-080　a_1，a_2，…，a_n 是正整数 1，2，…，n 的任一排列．设 f（n）是下述排列的个数，它们满足条件：

（1）$a_1=1$

（2）$|a_i-a_{i+1}|\leq 2$，$i=1, 2, \cdots, n-1$

试问 f（1996）能否被 3 整除．

【题说】第二十八届（1996 年）加拿大数学奥林匹克题 3．

【解】我们把满足条件（1）、（2）的排列 a_1，a_2，…，a_n 称作 n 项正则排列．对于 n 个数的正则排列，由于 $a_1=1$，故 $a_2=2$ 或 3．

（1）若 $a_2=2$，则 a_2，a_3，…，a_n（的各项减去 1 后）是 n-1 项的正则排列，其个数为 f（n-1）．

（2）若 $a_2=3$，$a_3=2$，则必有 $a_4=4$，故 a_4，a_5，…，a_n（的各项减去 3 后）是 n-3 项的正则排列，其个数为 f（n-3）．

（3）若 $a_2=3$，$a_4\geq 4$．设 a_{k+1} 是该排列中第一个出现的偶数，则前 k 个数应是 1，3，5，…，（2k-1），a_{k+1} 是 2k 或（2k-2）．因此，a_k 与 a_{k+1} 是相邻整数．

由条件（2），这排列在 a_{k+1} 后面的各数，要么都小于它，要么都大于它．因为 2 在 a_{k+1} 之后，故 a_{k+2}，…，a_n 均比 a_{k+1} 小．

这只有一种可能，即先依递增次序排出所有≤n 的正奇数，再接着依递减次序排出≤n 的正偶数．

综上所述，有递推关系

$$f(n)=f(n-1)+f(n-3)+1,\ n\geq 4$$

容易算出：f（1）=1，f（2）=1，f（3）=2，f（4）=4，等等模 3 的余数依次是

1，1，2，1，0，0，2，0，1，1，2，1，…

以 8 为周期．因为

$$1996\equiv 4 \pmod 8$$

所以

$$f(1996)\equiv f(4)\equiv 1 \pmod 8$$

故 f（1996）不能被 3 整除．

B6-081　n 项的 0、1 序列（x_1，x_2，…，x_n）称为长为 n 的二元序列．a_n 为无连续三项成 0，1，0 的、长为 n 的二元序列的个数．b_n 为无连续四项成 0，0，1，1 或 1，1，0，0 的、长为 n 的二元序列的个数．证明：对每一正整数 n，$b_{n+1}=2a_n$．

【题说】第二十五届（1996 年）美国数学奥林匹克题 4．

【解】对任一 n+1 项的 0、1 序列 y=（y_1，y_2，…，y_{n+1}），令它与 n 项的 0，1 序列 x=（x_1，…，x_n）对应，其中

$$x_i\equiv y_i+y_{i+1} \pmod 2 \qquad (1)$$

显然这样的 x 由 y 唯一确定．

反过来，对任一个 n 项的 0，1 序列 x=（x_1，…，x_n）及 y_1=0 或 1，有一个 n+1 项的 0、1 序列 y=（y_1，y_2，…，y_{n+1}），其中

$$y_{i+1}\equiv y_i+x_i \pmod 2 \qquad (2)$$

由于这时 $y_j+y_{j+1}\equiv y_j+y_j+x_j\equiv x_j \pmod 2$，所以由（2）定义的对应恰好是（1）的逆对应．

在由(1)定义的对应中,连续四项 0011 或 1100 产生连续三项 010.反之，由（2）定义的对应，连续三项 010 产生连续四项 0011 或 1100．

于是 a_n 个所述 n 项无连续三项成 010 的序列，每个恰好与两个无连续四项成 0011 或 1100 的所述 n+1 项序列对应．从而 $b_{n+1}=2a_n$．

B6-082　令 p_1，p_2，p_3，…为依递增次序排列的全体素数，实数 x_0 在 0，1 之间，对正整数 k，定义

$$x_k=\begin{cases}0, & 若 x_{k-1}\neq 0\\ \left\{\dfrac{p_k}{x_{k-1}}\right\}, & 若 x_{k-1}\neq 0\end{cases}$$

其中｛x｝=x-[x]表示 x 的小数部分．求出所有适合 0＜x_0＜1，并使序列 x_0，x_1，x_2，…最终成为 0 的 x_0，并予以证明．

【题说】第二十六届（1997 年）美国数学奥林匹克题 1．

【解】如果 x_0 是有理数 $\dfrac{n}{m}$，n、m 为自然数，n＜m，那么 $\left\{\dfrac{p_1}{x_0}\right\}=\left\{\dfrac{p_1 m}{n}\right\}$ 是一个分数，分母为 n 或 n 的约数，因此 x_1 仍是有理数，在 0、1 之间，并且分母小于 x_0 的分母．类似地，x_k 为有理数，分母严格小于 x_{k-1} 的分母（k=1，2，…）．于是，经有限多步后，序列成为 0．

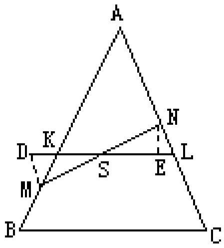
如果x_0是无理数，那么$\frac{p_1}{x_0}$是无理数，去掉整数$[\frac{p_1}{x_0}]$也是无理数，即 x_1 是无理数．类似地，x_k（k=1，2，…）都是无理数，序列永远不会为 0．

C 平面几何

C1 平面几何证明

C1－001　已知线段 MN 的两个端点在一个等腰三角形的两腰上，MN 的中点 S 作等腰三角形的底边的平行线，交两腰于点 K 和 L．证明：线段 MN 在三角形底边上的正投影等于线段 KL．

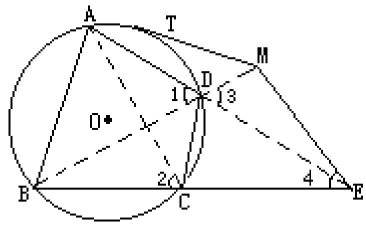
【题说】　1956 年～1957 年波兰数学奥林匹克三试题 2．



【证】　设 M、N 在直线 KL 上的射影分别为 D、E，由于 MS=SN，所以 MD=NE．由于 AB=AC，KL∥BC，所以∠DKM=∠AKL=∠ALK，又∠MDK=∠NEL=90°，所以△MDK≌△NEL，DK=EL，从而 DE=KL，即 MN 在 BC 上的正投影等于 KL．

C1－002　设四边形 ABCD 内接于圆 O，其对边 AD 与 BC 的延长线交于圆 O 外一点 E，自 E 引一直线平行于 AC，交 BD 延长线于点 M，自 M 引 MT 切圆 O 于 T 点，则 MT=ME．

【题说】　1957 年南京市赛初赛 5．利用切割线定理和相似三角形．



【证】　四边形 ABCD 内接于圆 O，故∠1=∠2．由 ME∥AC，得∠2=∠4，又∠1=∠3，所以∠3=∠4，又∠EMB=∠DME，所以△EMB∽△DME．从而有

$$\frac{MB}{ME}=\frac{ME}{MD}$$

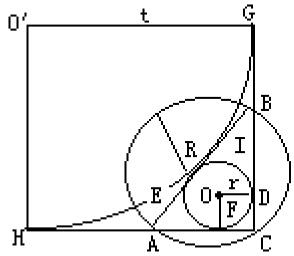
即　$$ME^2=MB\cdot MD$$

所以　$$MT^2=MB\cdot MD=ME^2$$

即　$$MT=ME$$

C1－003　若一直角三角形的外接圆半径为 R，其内切圆半径为 r，与斜边相切的旁切圆半径为 t，若 R 为 r 及 t 的比例中项，证明这直角三角形为等腰直角三角形．

【题说】　1957 年北京市赛高二题 4．



【证】　设直角△ABC的斜边长为c，两直角边长为a、b．易知

R=c/2

$$r=\frac{a+b-c}{2}$$

$$t=\frac{a+b+c}{2}$$

由已知

$$\frac{c^2}{4}=\frac{(a+b)^2-c^2}{4}$$

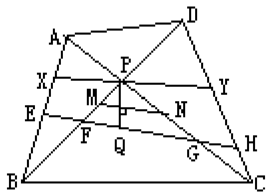
所以　　a=b．

C1－004　任意四边形ABCD的对角线AC与BD相交于P，而BD与AC的中点是M与N，设Q是P关于直线MN的对称点，过P作MN的平行线，分别交AB、CD于X、Y，又过Q作MN的平行线，顺次交AB、BD、AC、CD于E、F、G、H．试证：

1．EF=GH；

2．$\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle CPD}}=\frac{XP}{PY}$．

【题说】　1963年成都市赛高二二试题4．同本届高三二试题4．



【证】　1．P、Q关于MN对称，所以MN平分PQ，又FG∥MN，所以MP=MF，从而BF=PD，BP=FD．

同理，有AP=CG，AG=PC．

$$\frac{XP}{EF}=\frac{BP}{BF}=\frac{FD}{PD}=\frac{FH}{PY}=\frac{FG+GH}{PY} \qquad (1)$$

同理

$$\frac{PY}{GH}=\frac{EF+FG}{XP} \qquad (2)$$

比较（1）、（2）得EF=GH．

2．$\frac{S_{\triangle APB}}{S_{\triangle CPD}}=\frac{AP\cdot PB}{DP\cdot PC}=\frac{GC}{PC}\cdot\frac{BP}{BF}=\frac{GH}{PY}\cdot\frac{XP}{EF}=\frac{XP}{PY}$

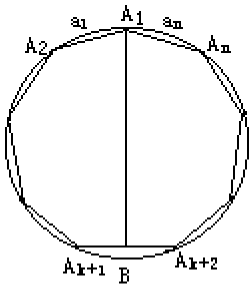
C1－005　在内角都相等的凸n边形中，设a_1，a_2，…，a_n依次为边的长度，而且满足不等式

$$a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n.$$

证明：必有$a_1=a_2=\cdots=a_n$．

【题说】　第五届（1963年）国际数学奥林匹克题3．本题由匈牙

利提供．



【证】　当 n 为奇数时，设 n=2k+1（k 为正整数），$\angle A_2A_1A_n$ 的平分线 A_1B 交 $A_{k+1}A_{k+2}$ 于点 B（如图）．

由于已知 n 边形的各角都相等，所以 $A_1B\perp A_{k+1}A_{k+2}$，因此折线 $A_1A_2\cdots A_{k+1}$ 与折线 $A_1A_n\cdots A_{k+2}$ 在这条角平分线上的射影都等于 A_1B．另一方面，$A_1A_2\geq A_1A_n$，并且它们与 A_1B 的交角相等，所以 A_1A_2 的射影$\geq A_1A_n$ 的射影．同理 A_2A_3 的射影$\geq A_nA_{n-1}$ 的射影…．所以上述各式中等号均应成立，即 $a_1=a_2=\cdots=a_n$．

当 n 为偶数时，作 A_1A_2 的中垂线 L．考虑各边在 L 上的射影，同样可得 $a_1=a_2=\cdots=a_n$．

C1－006　在平面上取四点 A、B、C、D，已知对任何点 P 都满足不等式 PA+PD≥PB+PC．证明；点 B 和 C 在线段 AD 上，并且 AB=CD．

【题说】　1966 年全俄数学奥林匹克九年级题 2．

【证】　由于点 P 是任意的．可以取 P=D，则应有 AD≥BD+DC；若取 P=A，则有 AD≥AB+AC．将二式相加，得

$$2AD\geq AB+AC+BD+CD \quad (1)$$

然而另一方面，总有 AD≤AC+CD 及 AD≤AB+BD．因此又得

$$2AD\leq AB+AC+BD+CD \quad (2)$$

由（1）、（2）知

$$2AD=AB+AC+BD+CD$$

从而其他 4 个不等式中皆取等号，亦即 B、C 两点一定在线段 AD 上，而且 AB=CD．

C1－007　凸多边形内一点 O 同每两个顶点都组成等腰三角形，证明：该点到多边形的各顶点等距．

【题说】　第六届（1972 年）全苏数学奥林匹克九年级题 6．

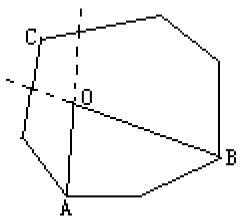


图 a

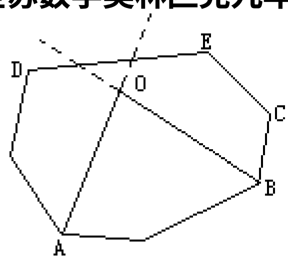


图 b

【证】　（1）如果凸多边形是△ABC，则结论显然成立．

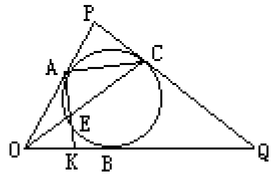
（2）对 n（n＞3）边形，设 A、B、C 为多边形的任意三个顶点，则 C 或在 AO、BO 的反向延长线组成的夹角内（图 a），或 C 在该角外，即该角与多边形的边 DE 相交（图 b）．

在图 a 中，点 O 在△ABC 内，由（1），AO=BO=CO．

在图 b 中，点 O 在△BDE 和△ADE 内，故有 AO=DO=EO=BO．

C1－008　设有一圆，它与∠O 两边相切，切点为 A、B．从点 A 引 OB 的平行线，交圆于点 C，线段 OC 与圆交于 E，直线 AE 与 OB 交于 K．证明：OK=KB．

【题说】　第七届（1973 年）全苏数学奥林匹克九年级题 2．



【证】　设圆在点 C 的切线与∠O 两边分别相交于 P、Q．因为 AP=PC，所以△APC 和△OPQ 皆为等腰三角形，从而 AO=CQ=OB=BQ．

又∠OAE=∠OCA=∠CQQ，且∠AOB=∠CQB，从而△OAK∽△QOC．所以

$$\frac{OK}{OA}=\frac{CQ}{OQ}=\frac{1}{2}$$

即

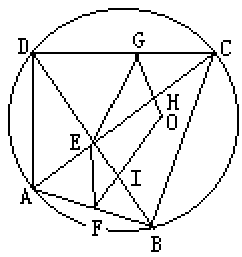
$$OK=\frac{OA}{2}=\frac{OB}{2}=\frac{OK+KB}{2}$$

亦即

$$OK=KB$$

C1－009　圆的内接四边形两条对角线互相垂直，则从对角线交点到一边中点的线段等于圆心到这一边的对边的距离．

【题说】　1978 年上海市赛二试题 6．



【证】　如图，已知 ABCD 为⊙O 的内接四边形，AC⊥BD 于 E，F 为 AB 中点，OG⊥DC，G 为垂足．

因为　AF=FB=EF

∠EAB=∠AEF

又　∠EAB=90°－∠EBA=90°－∠GCH

=∠GHC

所以　∠AEF＝∠GHC

EF∥GO

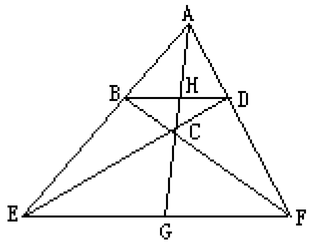
同理可证，EG∥FO．

所以 EGOF 是一个平行四边形，

从而 FE=OG．

C1－010　四边形两组对边延长后分别相交，且交点的连线与四边形的一条对角线平行，证明：另一条对角线的延长线平分对边交点连成的线段．

【题说】　1978 年全国联赛二试题 1．



【证】 设四边形 ABCD 的对边交点为 E、F，并且 BD∥EF，AC 交 BD 于 H，交 EF 于 G.

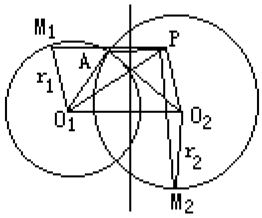
由于 BD∥EF，所以

$$\frac{DH}{GF}=\frac{AD}{AF}=\frac{DB}{EF}=\frac{DC}{CE}=\frac{DH}{EG}$$

GF=EG

C1－011 在平面上已知两相交圆 O_1 和 O_2，点 A 为交点之一，有两动点 M_1 和 M_2，从点 A 同时出发，分别以常速沿 O_1 和 O_2 同向运动，各绕行一周后恰好同时回到点 A．证明：在平面上存在一定点 P，P 到点 M_1 和 M_2 的距离在每一时刻都相等．

【题说】 第二十一届（1979 年）国际数学奥林匹克题 3．本题由原苏联提供．

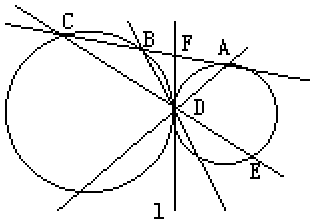


【证】 设 O_1 和 O_2 为已知圆的圆心，r_1 和 r_2 分别为它们的半径．作线段 O_1O_2 的垂直平分线 l 及点 A 关于 l 的对称点 P，则 $O_1P=r_2$，$O_2P=r_1$（如图）．由已知，$\angle AO_1M_1=\angle AO_2M_2$，由对称性，$\angle AO_1P=\angle AO_2P$．于是，$\angle M_1O_1P=\angle M_2O_2P$．又因为 $O_1M_1=O_2P=r_1$，$O_2M_2=O_1P=r_2$，故$\triangle O_1M_1P\cong O_2M_2P$，$M_1P=M_2P$．

[别证] 可以用复数来作．以 O_1 为原点，O_1O_2 为实轴建立复平面．

C1－012 二圆彼此外切于 D，一直线切一圆于 A，交另一圆于 B、C 两点．证明：A 点到直线 BD、CD 的距离相等．

【题说】 第十三届（1987 年）全俄数学奥林匹克十年级题 3．

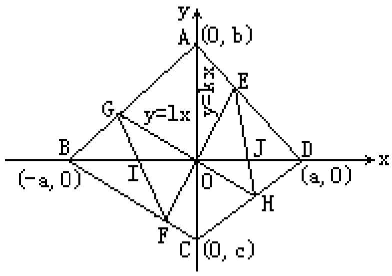


【证】 过切点 D 作二圆的公切线 l，交 AB 于 F．设 E 在 CD 的延长线上，则∠BDA=∠BDF+∠FDA=∠ACD+∠FAD=∠ADE，即 DA 平分∠BDE，所以，A 到 BD、CD 的距离相等．

C1－013 在“筝形”ABCD 中，AB=AD，BC=CD．经 AC、BD 的交点 O 任作两条直线，分别交 AD 于 E，交 BC 于 F，交 AB 于 G，交 CD 于 H．GF、

EH 分别交 BD 于 I、J．求证：IO=OJ．

【题说】 1990年全国冬令营选拔赛题3.本题宜用解析几何来证.本题是蝴蝶定理的一个推广．



【证】 易证 AC⊥BD．如图，以 O 为原点，BD 为 x 轴，CA 为 y 轴，建立直角坐标系．

设各点坐标为 A（0，b），B（－a，0），C（0，c），D（a，0），EF 的方程为 y=kx，GH 的方程为 y=lx，则 AD 的方程是

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0$，EH的方程是

$$\lambda(y-kx)+(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1)=0 \quad (1)$$

EH 的方程是

$$\mu(y-lx)+(\frac{x}{a}+\frac{y}{c}-1)=0 \quad (2)$$

比较常数项与 y 的系数有

$$\lambda+\frac{1}{b}=\mu+\frac{1}{c} \quad (3)$$

J 的横坐标 x 满足

$$-\lambda kx+\frac{x}{a}-1=0 \quad (1')$$

及

$$-\mu lx+\frac{x}{a}-1=0 \quad (2')$$

（1′）·l－（2′）·k 得

$$(\mu-\lambda)klx+(l-k)\frac{x}{a}=l-k$$

利用（3）得

$$(\frac{1}{b}-\frac{1}{c})klx+(l-k)\frac{x}{a}=l-k \quad (4)$$

同样可得 I 的横坐标 x 应满足

$$(\frac{1}{b}-\frac{1}{c})klx+(k-l)\frac{x}{-a}=k-l \quad (5)$$

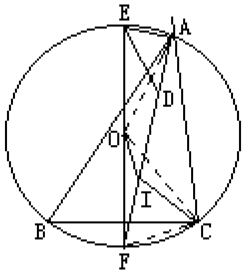
（将（4）中的 k 与 l 互换，a 换成－a）．由（4）、（5）立即看出 I、J 的横坐标互为相反数，即 IO=OJ．

C1－014 如图，设△ABC 的外接圆 O 的半径为 R，内心为 I，∠B=60°，∠A＜∠C，∠A 的外角平分线交⊙O 于 E．证明：

（1）IO=AE；

（2）$2R < IO + IA + IC < (1+\sqrt{3})R$.

【题说】　1994 年全国联赛二试题 3.



【证】　（1）连 AI，延交⊙O 于 F，则易知 EF 为⊙O 直径.

过 E 作 ED∥IO 交 AF 于 D，则 IO 是△FDE 的中位线，从而 IO＝$\frac{1}{2}DE$.

因∠AOC=2∠ABC=120°

$$\angle AIC = 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle C) = 120°$$

故 A、O、I、C 共圆．从而

$$\angle AIO = \angle ACO = \frac{1}{2}(180° - 120°) = 30°$$

所以$\angle ADE - \angle AIO = 30°$，$AE = \frac{1}{2}DE = IO$.

（2）连 CF，则　∠IFC=∠AFC=∠B=60°

∠ICF＝∠ICB+∠BCF

$$= \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle A = \frac{1}{2}(\angle A + \angle C) = 60°$$

故 IF=IC，又由（1）知 IO=AE，从而

IO+IA+IC=EA+AI+IF

=EA+AF≥EF=2R

令α=∠OAI，则（因∠A＜∠C）

$$\alpha = \angle OAI < \frac{1}{2}\angle A < 30°$$

又　AE+AF＝2Rsinα+2Rcosα

$$= 2\sqrt{2}R\sin(45° + \alpha)$$

当α∈（0，45°）时，sin（45°+α）为增函数，

故　AE+AF＜2R（sin30°+cos30°）

$$= (1+\sqrt{3})R$$

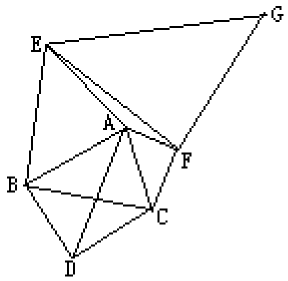
即　$$IO + IA + IC < (1+\sqrt{3})R$$

C1－015　设△ABC 是锐角三角形，在△ABC 外分别作等腰 Rt△BCD、△ABE、△CAF．在这三个三角形中，∠BDC、∠BAE、∠CFA 是直角．又在四边形 BCFE 外作等腰 Rt△EFG，∠EFG 是直角．求证：

（1）$GA = \sqrt{2}AD$；

（2）∠GAD=135°.

【题说】　1994 年上海市赛高三二试题 2.



【证】　以点 A 为原点建立直角坐标系，与 B 相应的复数记为 Z_B，等等.

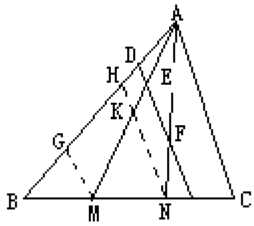
$$
\begin{aligned}
Z_G &= \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FG} \\
&= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{EF} i \\
&= \overrightarrow{AF} + (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF}) i \\
&= \overrightarrow{AF}(1+i) + \overrightarrow{BA}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(-1+i) Z_D &= (-1+i)\overrightarrow{AD} \\
&= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD} i \\
&= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DB} + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) i \\
&= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} \cdot i \\
&= \overrightarrow{BA} + (\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FC}) i \\
&= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF}(1+i)
\end{aligned}
$$

所以$Z_G = (-1+i) Z_D$，$AG = \sqrt{2}AD$，且$\angle GAD = 135°$.

C1－016　设 M、N 为三角形 ABC 的边 BC 上的两点，且满足 BM=MN=NC.一平行 AC 的直线分别交 AB、AM、AN 于 D,E 和 F,求证:EF=3DE.

【题说】　1994 年澳大利亚数学奥林匹克一试题 1.



【证】　如图，过 N、M 分别作 AC 的平行线交 AB 于 H、G 点．NH 交 AM 于 K 点．则 BG=GH=HA.

易知$HK = \frac{1}{2}GM = \frac{1}{4}HN$．所以

HK∶KN=1∶3

又由于 DF∥HN，于是

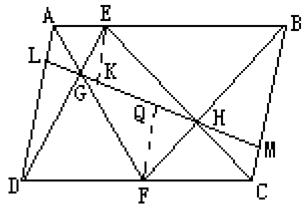
DE∶EF=HK∶KN=1∶3

故 EF=3DE.

C1－017　ABCD 是一个平行四边形，E 是 AB 上的一点，F 为 CD 上一点．AF 交 ED 于 G，EC 交 FB 于 H．连接 G，H 并延长交 AD 于 L，交 BC 于 M，求证：

DL=BM

【题说】　1994 年澳大利亚数学奥林匹克二试题 4.



【证】 如图，过 E、F 分别作 EK∥AD，FQ∥AD，则

$$\frac{AL}{QF}=\frac{AG}{GF}=\frac{GE}{DG}=\frac{EK}{DL}$$

所以 AL·DL=QF·EK．

同理，CM·MB=QF·EK．故

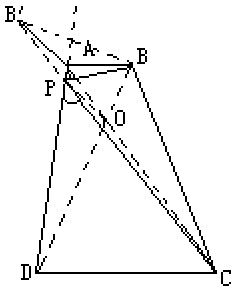
$$AL\cdot DL=CM\cdot MB$$

又由于 AL+DL=CM+MB，所以

$$DL=BM$$

C1－018 在梯形 ABCD（AB∥DC）中，两腰 AD、BC 上分别有点 P、Q 满足∠APB=∠CPD，∠AQB=∠CQD．证明：点 P 和 Q 到梯形对角线交点 O 的距离相等．

【题说】 第二十届（1994 年）全俄数学奥林匹克九年级（决赛）题 7．



【证】 如图，设 B′是 B 点关于 AD 的对称点，则 P 点就是 B′C 与 AD 的交点．

在△APB 和△DPC 中，∠APB=∠DPC，∠PAB=180°－∠PDC，由正弦定理知

$$\frac{BP}{AB}=\frac{\sin\angle PAB}{\sin\angle APB}=\frac{\sin\angle PDC}{\sin\angle DPC}=\frac{PC}{DC}$$

所以 $$\frac{B'P}{PC}=\frac{BP}{PC}=\frac{AB}{CD}$$

由△AOB∽△COD，得 $\frac{AO}{OC}=\frac{AB}{CD}$．所以

$$\frac{B'P+PC}{PC}=\frac{AB+CD}{CD}=\frac{AO+OC}{OC}$$

即 $\frac{B'C}{PC}=\frac{AC}{OC}$．所以

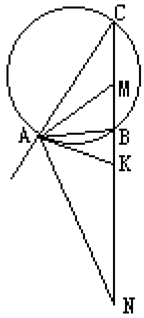
$$\triangle COP\backsim\triangle CAB'$$

所以 $$OP=\frac{OC}{AC}\cdot AB'=\frac{CD\cdot AB}{AB+CD}$$

同理$OQ=\frac{CD\cdot AB}{AB+CD}$，所以$OP=OQ$．

C1－019　从△ABC 的顶点 A 引 3 条线段，∠A 的平分线 AM，∠A 的外角平分线 AN，三角形外接圆的切线 AK，点 M、N、K 依次排列在直线 BC 上．证明：MK=KN．

【题说】　1995 年城市数学联赛低年级普通水平题 4．



【证】　由于

∠KAM=∠KAB+∠BAM
=∠ACB+∠CAM
=∠AMK

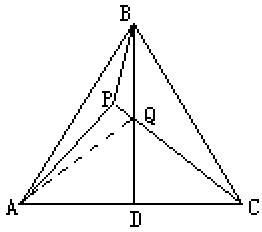
所以，KA=KM．另一方面，∠NAM=90°，且

∠ANM=90°－∠AMN
=90°－∠KAM
=∠NAK

故 KN=AK=KM．

C1－020　△ABC 具有下面性质：存在一个内部的点 P 使∠PAB=10°，∠PBA=20°，∠PCA=30°，∠PAC=40°．证明：△ABC 是等腰三角形．

【题说】　第 25 届（1996 年）美国数学奥林匹克题 5．



[解]　作 AC 边上的高 BD，又作 AQ 使∠QAD=30°，AQ 交 BD 于 Q，连 PQ．设直线 PQ 交 AC 于 C′．

因为∠BAD=10°+40°=50°，所以∠ABD=90°－50°=40°，∠PBQ=40°－∠PBA=20°=∠PBA，∠PAQ=∠PAC－∠QAD=10°=∠PAB，从而 P 是△ABQ 的内心，∠PQA=∠PQB=

$\frac{180°-40°-20°}{2}=60°$，$\angle PC'A=\angle PQA-\angle QAC=30°$．

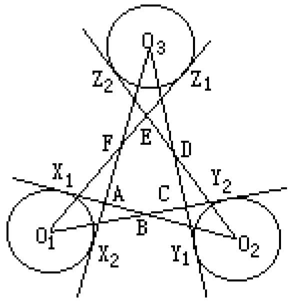
而∠PCA=30°，所以 C′与 C 重合．

从而 QA=QC，QD 平分 AC，BA=BC．

C1－021　半径相等的三个互不相交的圆的圆心 O_1、O_2、O_3 位于三

角形的顶点处．分别从点 O_1、O_2、O_3 引已知圆的切线，如图所示，已知这些切线相交成凸六边形，而六边形相邻的边分别涂成红色和蓝色．证明：红色线段长度之和等于蓝色线段长度之和．

【题说】 第二十二届（1996 年）全俄数学奥林匹克九年级题 2．



【证】 如图所示，X_1、X_2、Y_1、Y_2、Z_1、Z_2 分别为切点．切线围成的六边形为 ABCDEF．因⊙O_1，⊙O_2，⊙O_3 的半径相等，易得 $X_1O_2=O_1Y_2$，$Y_1O_3=O_2Z_2$，$Z_1O_1=O_3X_2$．即

$$X_1A+AB+BO_2=O_1B+BC+CY_2$$

$$Y_1C+CD+DO_3=O_2D+DE+EZ_2$$

$$Z_1E+EF+FO_1=O_3F+FA+AX_2$$

以上三式两边相加，并利用 $X_1A=AX_2$，$Y_1C=CY_2$，$Z_1E=EZ_2$，及 $BO_2=O_1B$，$DO_3=O_2D$，$FO_1=O_3F$，得

$$AB+CD+EF=BC+DE+FA$$

C1－022 在等腰△ABC 中（AB=BC），CD 是角平分线．过△ABC 的外心作直线垂直于 CD，交 BC 于 E 点，再过 E 点作 CD 的平行线交 AB 于 F，证明：BE=FD．

【题说】 第二十二届（1996 年）全俄数学奥林匹克十一年级题 6．

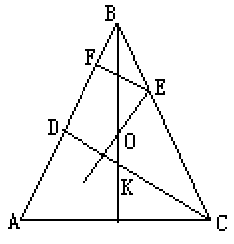


图 a

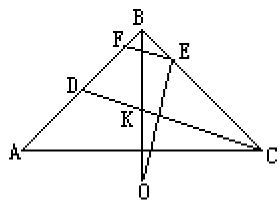


图 b

【证】 设 O 是△ABC 的外心，K 是直线 BO 和 CD 的交点．

先设 O 在 B、K 之间（图 a），∠BOE=90°－∠DKO=∠DCA，所以，点 K、O、E、C 四点共圆．

$$\angle OKE=\angle OCE$$

因为 OB=OC，所以∠OCE=∠OBE．

于是 $\angle BKE=\angle OCE=\angle KBE$

所以 $BE=KE$

又 $\angle BKE=\angle KBE=\angle KBA$

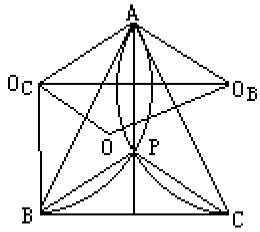
所以 KE∥AB．从而 KEFD 为平行四边形，则

$$DF=KE=BE$$

K 在 O、B 之间（图 b）或 K、O 重合的情况可用类似方法证明．

C1－023　直角三角形 ABC 中，C 为直角，证明：在△ABC 中至少有一点 P，使∠PAB＝∠PBC＝∠PCA．

【题说】　1963 年合肥市赛高二二试题 2．



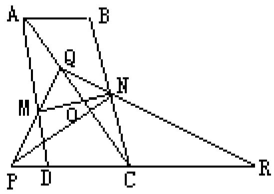
【证】　我们证明结论对任意△ABC 成立．

不妨设∠A、∠B 为锐角，过 A 作 AB 的垂线，与边 AC 的中垂线相交于点 O_B．过 B 作 BC 的垂线交 AB 的中垂线于点 O_C，分别以 O_B、O_C 为心，过 A 点作圆．设 P 为这两个圆的另一个公共点，则 $AP\perp O_BO_C$．连 PB、PC．

设 O 为△ABC 的外心，则 $OO_C\parallel AO_B$，四边形 OO_BAO_C 为梯形，对角线 O_BO_C 在梯形内，$\angle AO_BO_C<\angle AO_BO$，所以$\angle PAO_B=90°-\angle AO_BO_C>90°-\angle AO_BO=\angle CAO_B$．同样$\angle PAO_C>\angle BAO_C$，所以射线 AP 在∠CAB 内，P 是 AP 与$\overset{\frown}{AB}$的交点，$\overset{\frown}{AB}$与 A 在 BC 的同侧，所以 P 在△ABC 内．由于 BC 与$\odot O_C$相切，所以∠PBC=∠PAB．同理∠PAB=∠PCA．因此，P 合乎要求．

C1－024　在矩形 ABCD 内，M 是 AD 的中点，N 是 BC 的中点，在线段 CD 的延长线上取一点 P，用 Q 表示直线 PM 和 AC 的交点．证明：∠QNM=∠MNP．

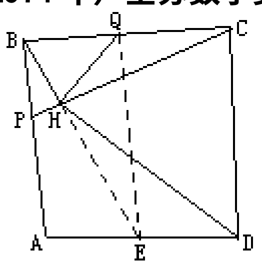
【题说】　第六届（1972 年）全苏数学奥林匹克八年级题 1．



【证】　设 R 是直线 QN 和 CD 的交点，O 是矩形 ABCD 的中心，由 OM=ON 得：PC=CR．因此三角形 PNR 是等腰三角形（NC 是该三角形的中线和高，也就是△PQN 的外角∠PNR 的平分线，又 NC⊥MN），问题的结论由此即得．

C1－025　已知正方形 ABCD，点 P 和 Q 分别在 AB 和 BC 上，且 BP=BQ，BH⊥PC 于 H．证明：∠DHQ 是直角．

【题说】　第八届（1974 年）全苏数学奥林匹克十年级题 2．



【证】　延长 BH 交 AD 于 E，则 Rt△ABE≌Rt△BCP，于是 AE=BP=BQ，因此，QC=ED，从而得矩形 CDEQ．这个矩形的外接圆直径就是其对角线 CE 与 DQ，而∠CHE=90°，所以 H 点在矩形的外接圆上，即 C、D、E、H、Q 五点共圆．对着直径 DQ 的圆周角：

$$\angle DHQ=\angle DCQ=90°$$

即∠DHQ 是直角．

C1－026　设 ABCD 是矩形，BC=3AB，证明：如果 P、Q 是 BC 边上的点，BP=PQ=QC，那么∠DBC+∠DPC=∠DQC．

【题说】　第六届（1974 年）加拿大数学奥林匹克题 2．

【证】　如图所示，即证

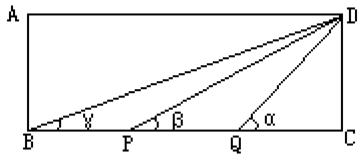


图 a

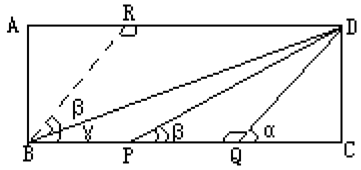


图 b

$$\beta+\gamma=\alpha$$

或 $$\tan(\beta+\gamma)=\tan\alpha=1$$

事实上 $$\tan\beta=\frac{1}{2},\ \tan\gamma=\frac{1}{3}$$

$$\tan(\beta+\gamma)=\frac{\tan\beta+\tan\gamma}{1-\tan\beta\tan\gamma}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1$$

[别证] 设R是AD三等分点之一，即$AR=\frac{1}{3}AD=AB$．连结BR．

易知$\angle BRD=\angle DQB$，$BR:DR=\sqrt{2}:2=1:\sqrt{2}=PQ:QD$．因此△BRD∽△PQD．于是∠RBD=∠DPC=β，从而有β+γ＝∠RBC=α．

C1－027　在任一△ABC 的边上，向外作△BPC、△CQA 和△ARB，使得

$$\angle PBC=\angle CAQ=\frac{\pi}{4}$$

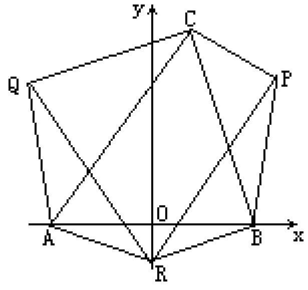
$$\angle BCP=\angle QCA=\frac{\pi}{6}$$

$$\angle ABR=\angle BAR=\frac{\pi}{12}$$

证明：1．$\angle QRP=\frac{\pi}{2}$；

2．QR=RP．

【题说】　第十七届（1975 年）国际数学奥林匹克题 3．本题由荷兰提供．



【证】　建立一个复平面，令 A 和 B 的坐标分别为－1 和 1，C 的坐标为Z，R的坐标为$-\mathrm{itg}\frac{\pi}{12}=-\mathrm{i}(2-\sqrt{3})$，则有

$$\overrightarrow{RP}=1+(Z-1)\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}+i(2-\sqrt{3})$$
$$=Ze^{-\frac{i\pi}{4}}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}+\frac{3-\sqrt{3}}{2}+\frac{3-\sqrt{3}}{2}i$$
$$\overrightarrow{RQ}=-1+(Z+1)\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}+i(2-\sqrt{3})$$
$$=Ze^{-\frac{i\pi}{4}}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}-3}{2}+\frac{3-\sqrt{3}}{2}i$$

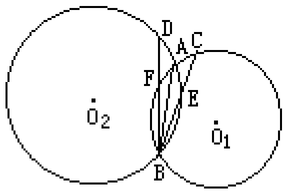
因而$\overrightarrow{RP}=i\overrightarrow{RQ}$，于是 RQ⊥RP，RQ=RP．

C1－028　如图，两圆 O_1、O_2 相交于 A、B，圆 O_1 的弦 BC 交圆 O_2 于 E，圆 O_2 的弦 BD 交圆 O_1 于 F，证明：

1．若∠DBA=∠CBA，则 DF=CE；

2．若 DF=CE，则∠DBA=∠CBA．

【题说】　1979 年全国联赛二试题 6．



【证】　1．连 AD、AE、AF、AC，则∠DFA=∠ECA．

又　　∠DBA=∠CBA

所以　　AD=AE，AC=AF

所以　　△DAF≌△EAC

DF=CE

2．由于∠DFA=∠ACE，∠AEC=∠ADF，DF=CE，所以△DAF≌△EAC，AD=AE．从而∠DBA=∠EBA．

C1－029　两圆相切（内切或外切）于 P 点，一条直线切一个圆于 A，交另一圆于 B、C．证明：直线 PA 是∠BPC 的平分线（如果两圆内切）或∠BPC 的补角的平分线（如果两圆外切）．

【题说】　1980 年五国国际数学竞赛题 4．本题由比利时提供．

【证】　设两圆外切（图 a），作公切线 PT，则

∠APB=∠APT+∠TPB=∠BAP+∠BCP

=∠BPC 的补角－∠APB

即 AP 是∠BPC 的补角的平分线．

若两圆内切（图 b），设公切线与 BC 相交于 T．因为∠CPT、∠APT、∠TAP 都是弦切角，故∠BPA=∠APC，因此，PA 是∠BPC 的平分线．

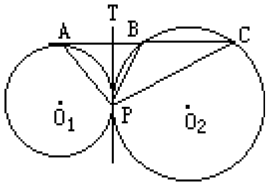


图 a

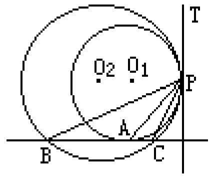
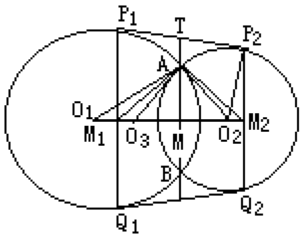


图 b

C1－030　已知 A 为平面上两条半径不等的圆 O_1 和 O_2 的一个交点，两外公切线 P_1P_2、Q_1Q_2 分别切两圆于 P_1、P_2、Q_1、Q_2，M_1、M_2 分别为 P_1Q_1、P_2Q_2 的中点，求证：$\angle O_1AO_2=\angle M_1AM_2$．

【题说】　第二十四届（1983 年）国际数学奥林匹克题 2．本题由原苏联提供．



【证】　设 B 是两圆的另一交点，T、M 分别是 P_1P_2、O_1O_2 与 AB 的交点．

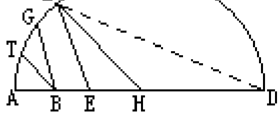
因为 $TP_1^2=TA\cdot TB=TP_2^2$，**即** $TP_1=TP_2$；

又
$$P_1M_1\parallel TM\parallel P_2M_2$$
所以
$$MM_1=MM_2$$
因为
$$AB\perp O_1O_2$$
所以 TM 是 M1M2 的中垂线．

在 O_1O_2 上，取 $MO_3=MO_2$，则 $\angle O_3AM_1=\angle O_2AM_2$．因为
$$O_1P_1\parallel O_2P_2,\ O_1M_1\parallel O_2M_2,\ P_1M_1\parallel P_2M_2$$
$$\triangle O_1P_1M_1\backsim\triangle O_2P_2M_2$$
所以
$$\frac{O_1M_1}{M_1O_3}=\frac{O_1M_1}{O_2M_2}=\frac{O_1P_1}{O_2P_2}=\frac{O_1A}{O_2A}=\frac{O_1A}{O_3A}$$
由此可知，AM_1 是 $\angle O_1AO_3$ 的角平分线．所以
$$\angle O_1AM_1=\angle O_3AM_1=\angle O_2AM_2$$
故有
$$\angle O_1AO_2=\angle O_1AM_1+\angle M_1AO_2$$
$$=\angle O_2AM_2+\angle M_1AO_2=\angle M_1AM_2$$

C1－031　如图，延长线段 AB 至 D，以 AD 为直径作半圆，圆心为 H．G 是半圆上一点，$\angle ABG$ 为锐角．E 在线段 BH 上，Z 在半圆上， $EZ\parallel BG$，**且** $EH\cdot ED=EZ^2$．$BT\parallel HZ$．**证明：**$\angle TBG=\frac{1}{3}\angle ABG$．

【题说】　1992 年澳大利亚数学奥林匹克题 5．



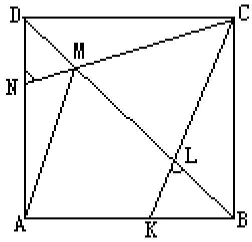
【证】 由 $EH\cdot ED=EZ^2$ 知△HEZ∽△ZED，所以∠EZH=∠EDZ=∠DZH．于是

$$\angle AEZ=3\angle EZH$$

又BT∥HZ，BG∥EZ，所以$\angle TBG=\angle EZH=\frac{1}{3}\angle AEZ=\frac{1}{3}\angle ABG$．

C1－032 在正方形 ABCD 的 AB、AD 边各取点 K、N，使得 AK·AN=2BK·DN．线段 CK、CN 各交对角线 BD 于 L、M．试证：∠BLK=∠DNC=∠BAM．

【题说】 第三届（1993 年）澳门数学奥林匹克第二轮题 4．



【证】 令 AB=a，BK=b，DN=c，则

$$(a-b)(a-c)=2bc$$

即

$$a^2-bc=a(b+c)$$

而$\operatorname{tg}(\angle BCK+\angle DCN)=\dfrac{\frac{b}{a}+\frac{c}{a}}{1-\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{a}}=\dfrac{a(b+c)}{a^2-bc}=1$

所以

$$\angle BCK+\angle DCN=45°$$

$$\angle BLK=\angle BCK+45°=90°-\angle DCN=\angle DNC$$

再由△ABM≌△CBM，得

$$\angle BAM=\angle BCM=\angle BCK+\angle LCM$$

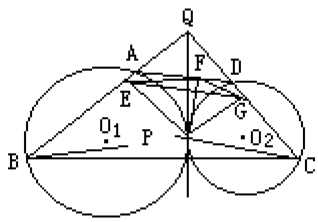
$$=\angle BCK+(90°-45°)=\angle BLK$$

C1－033 如图，⊙O_1 与⊙O_2 外切于点 P，Q 是过 P 的公切线上任一点，QAB 和 QDC 分别是⊙O_1 与⊙O_2 的割线，P 在 AB、AD 和 DC 上的射影分别为 E、F、G．求证：

(1) ∠BPC=∠EFG；

(2) △EFG∽△PBC．

【题说】 1994 年四川省赛题 3．



【证】 (1) 因 PQ 切⊙O_1 与⊙O_2 于 P，

所以 ∠QPA=∠PBA (1)

因为 ∠AEP=∠AFP=90°

所以 A、E、P、F 四点共圆．

故有 $\angle FEP=\angle FAP=\angle DAP$ (2)

同理，F、D、G、P 四点共圆．且

$$\angle BPC=\angle BAP+\angle PDC=\angle EFP+\angle PFG$$
$$=\angle EFG \quad (3)$$

（2）因为 $\angle PEQ=\angle PGQ=90°$

所以 Q、E、P、G 四点共圆，于是

$$\angle GEP=\angle GQP=\angle DQP \quad (4)$$

由（2）、（4）与 $\angle DAP+\angle QPA=\angle QDA+\angle DQP$ 得

$$\angle FEG=\angle FEP-\angle GEP$$
$$=\angle DAP-\angle DQP$$
$$=\angle QDA-\angle QPA \quad (5)$$

又 A、B、C、D 四点共圆，有 $\angle QDA=\angle QBC$．

于是由（1）、（5）得

$$\angle FEG=\angle QBC-\angle PBA=\angle PBC \quad (6)$$

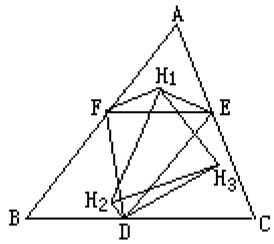
由（3）、（6）得 $\triangle EFG\backsim\triangle PBC$．

C1－034　D、E、F 分别为△ABC 的边 BC、CA、AB 上的点，且 $\angle FDE=\angle A$，$\angle DEF=\angle B$，又设△AFE、△BDF、△CED 均为锐角三角形，它们的垂心依次为 H_1、H_2、H_3，求证：

（1）$\angle H_2DH_3=\angle FH_1E$；

（2）$\triangle H_1H_2H_3\cong\triangle DEF$．

【题说】　1994 年江苏省赛题 5．



【证】　如图，（1）$\angle H_2DB=90°-\angle B$，$\angle H_3DC=90°-\angle C$，所以 $\angle H_2DH_3=180°-\angle H2DB-\angle H_3DC=\angle B+\angle C$．

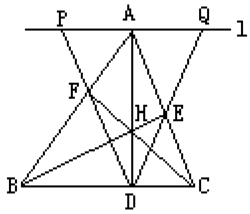
而 $\angle EH_1F=180°-\angle H_1EF-\angle H_1FE=180°-(90°-\angle AFE)-(90°-\angle AEF)=180°-\angle A=\angle B+\angle C$．

所以　$\angle H_2DH_3=\angle FH_1E$

（2）由（1）知 $\angle FH_1E+\angle EDF=180°$，所以，$H_1$ 在△DEF 的外接圆上．同理 H_2、H_3 也在此圆上，因此 D、E、F、H_1、H_2、H_3 六点共圆．又由（1）知 $\angle EH_1F=\angle H_2DH_3$，所以 $EF=H_2H_3$．同理 $DF=H_1H_3$，$DE=H_1H_2$，故 $\triangle DEF\cong\triangle H_1H_2H_3$．

C1－035　△ABC 为锐角三角形．AD 为 BC 边的高，H 为 AD 内一点．直线 BH、CH 分别交 AC、AB 于 E、F．证明：$\angle EDH=\angle FDH$．

【题说】　第 26 届（1994 年）加拿大数学奥林匹克题 5．又见第 3 届（1993 年）澳门数学奥林匹克题 3．



[解]　过 A 作直线 l 平行于 BC．延长 DE、EF，分别交 l 于 Q、P．

由相似三角形，

$$\frac{AP}{BD}=\frac{AF}{FB}，\frac{AQ}{CD}=\frac{AE}{EC}$$

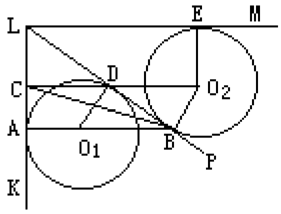
又由Ceva定理，$\frac{AF}{FB}\times\frac{BD}{CD}\times\frac{EC}{AE}=1$，所以

AP=AQ

于是△DPQ 的高 DA 平分 PQ，所以△DPQ 是等腰三角形，并且∠EDH=∠FDH．

C1－036　在直角 KLM 内取一点 P．以 O_1 点为圆心的圆 ω_1 分别切∠KLP 的两边 LK 和 LP 于 A、D 两点；以 O_2 点为圆心半径与圆 ω_1 半径相等的圆 ω_2 分别切∠MLP 的两边 LP、LM 于 B、E 两点．点 O_1 在线段 AB 上．设 O_2D 的延长线与 KL 交于 C 点．证明：BC 是∠ABD 的平分线．

【题说】　第二十届（1994 年）全俄数学奥林匹克九年级题 6．



【证】　连结 O_1D 及 O_2B，则 $O_1D=BO_2$．因为 $O_1D\perp LP$，$O_2B\perp LP$，所以 $O_1D∥BO_2$，O_1BO_2D 为平行四边形，从而 $CO_2∥AB$，∠LDC=∠O_1BD．

∠LCD=∠LAB=90°　　　　　　　　(1)

因为 $O_2E\perp LM$，所以 O_2ELC 是矩形．因此

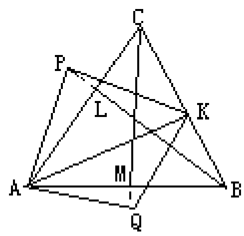
$CL=O_2E=O_2B=DO_1$　　　　　　　　(2)

由（1）、（2）得 Rt△LCD≌Rt△O_1DB，所以 CD=DB．于是∠ABC=∠BCD=∠CBD，即 BC 是∠ABD 的平分线．

C1－037　设 AK、BL、CM 是△ABC 的角平分线，K 在 BC 上，令 P、Q 分别是 BL，CM 上的点，使得 AP=PK，AQ=QK．证明：

$\angle PAQ=90°-\frac{1}{2}\angle BAC$．

【题说】　1995 年城市数学联赛低年级较高水平题 3．



【证】　如图，设 BL 交△ABK 的外接圆于点 D．

则

$$\angle DAK=\angle DBK=\angle DBA$$
$$=\angle DKA$$

所以，DA=DK，从而 D 与 P 重合．即有

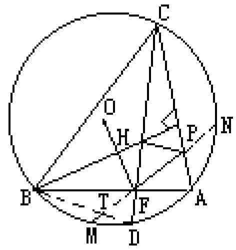
$$\angle PAK=\frac{1}{2}\angle ABC$$

同理可证，$\angle QAK=\frac{1}{2}\angle ACB$．故有

$$\angle PAQ=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)$$
$$=90°-\frac{1}{2}\angle BAC$$

C1－038　设△ABC 是锐角三角形，且 BC＞CA，O 是它的外心，H 是它的垂心，F 是高 CH 的垂足，过 F 作 OF 的垂线交边 CA 于 P．证明：∠FHP=∠BAC．

【题说】　第三十七届（1996 年）IMO 预选题．



【证】　延长 CF 交⊙O 于 D 点，连 BD、BH．

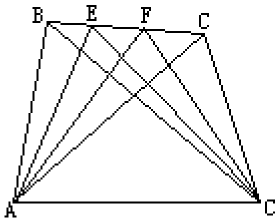
由于∠BHF=∠CAF=∠D 且 BF⊥HD，所以 F 为 HD 的中点．

设 FP 所在直线交⊙O 于 M、N 两点，交 BD 于 T 点．

由 OF⊥MN 知 F 为 MN 的中点．由蝴蝶定理即得 F 为 PT 的中点．又因 F 为 HD 的中点，故 HP∥TD，所以，∠FHP=∠D=∠BAC．

C1－039　在凸凹边形 ABCD 的 BC 边上取 E 和 F(点 E 比 F 更靠近点 B)．已知∠BAE=∠CDF 及∠EAF=∠FDE．证明：∠FAC=∠EDB．

【题说】　第二十二届（1996 年）全俄数学奥林匹克十年级题 1．



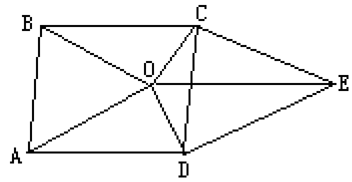
【证】　因为∠EAF=∠FDE，所以 A、E、F、D 共圆，∠AEF+∠FDA=180°，又∠BAE=∠CDF，所以

$$\angle ADC+\angle ABC=\angle FDA+\angle CDF+\angle AEF-\angle BAE$$
$$=180°$$

因此 A、B、C、D 共圆，∠BAC=∠BDC，由此得∠FAC=∠EDB．

C1－040　在平行四边形 ABCD 中有一点 O，使得∠AOB+∠COD=180°．证明：∠OBC=∠ODC．

【题说】　第二十九届（1997 年）加拿大数学奥林匹克题 4．



[解]　过O作OE$\underline{\underline{\parallel}}$BA，连EC、ED，则四边形EOAD、EOBC都是平行四边形，所以CE∥BO，ED∥OA，

$$\angle CED+\angle COD=\angle AOB+\angle COD=180°$$

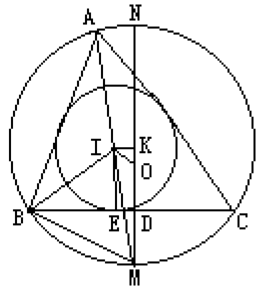
O、C、E、D四点共圆，从而

$$\angle ODC=\angle OEC=\angle OBC$$

C1－041　已知一个等腰三角形，外接圆半径为 R，内切圆半径为r．证明：外接圆和内切圆的圆心距离d为

$$d=\sqrt{R(R-2r)}$$

【题说】　第四届（1962 年）国际数学奥林匹克题 6．本题由原东德提供．



【证】　本题结论（即欧拉公式）对任意三角形（不限于等腰三角形）均成立．设M为BC的中点，O与I分别为外接圆和内切圆的圆心，外接圆直径MN交BC于D．连IB、BM、AM必过I．

又设　　IE⊥BC

IK⊥MN

E、K为垂足．

因为$\angle MIB=\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle ABC)$

$=\angle IBM$

所以　　$MI=MB$

又　　$IO^2=MI^2+MO^2-2MO\cdot MK$

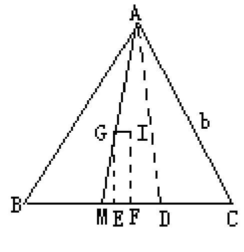
而　　$MB^2=MD\cdot MN=2R\cdot MD$

所以　　$d^2=2R\cdot MD+R^2-2R\cdot MK$

$=R^2-2R\times DK=R^2-2Rr$

C1－042　设过三角形的内心和重心的直线平行于一边．求证：其它二边长的和等于这一边长的两倍．

【题说】　1963 年西安市赛高二题 3．



【证】　设△ABC 的三边为 a、b、c、M 为 BC 之中点，G、I 分别为△ABC 的重心和内心，且 IG∥BC．

因为　　　　　　IG∥BC

所以 G 到 BC 的距离

GE=r（内切圆半径）

BC 边上的高 h=3GE=3r，而

ha=r（a+b+c）

$(=2S_{\triangle ABC})$

所以　　　　　3a=a+b+c

即　　　　　　b+c=2a

C1－043　1．在凸六边形 ABCDEF 中，所有角都相等．证明：

AB－DE=EF－BC=CD－FA

2．反之，若六条边 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6 满足等式 $a_1-a_4=a_5-a_2=a_3-a_6$．证明：它们可以组成各内角相等的凸六边形．

【题说】　1964 年全俄数学奥林匹克八年级题 5（1）、十年级题 3（2）．

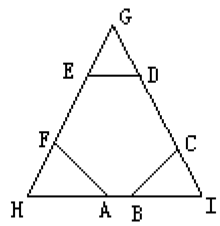
【证】　1．直线 AB、CD、EF 构成△GHI．由已知六边形各角相等知，每个角都是 120°，从而△GHI 的每个角都是 60°，因此它是正三角形．并且 AF、BC、DE 分别与边 GI、GH、HI 平行．

AB+AC=AB+BI=AI=GF

=GE+EF=DE+EF

所以　　AB-DE=EF=BC

同理　　EF-BC=CD-FA

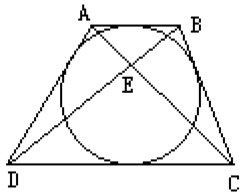


2．以 $a_1+a_2+a_6$ 为边作正三角形 GHI，然后在各边取 A、B、C、D、E、F，使 $BI=IC=a_2$，$DG=GE=a_4$，$FH=HA=a_6$，则 BC∥GH，DE∥HI，AF∥GI，所以六边形 ABCDEF 各角相等，并且 $AB=a_1$，$BC=BI=a_2$，$AF=AH=a_6$，$DE=DG=a_4$，$CD=(a_1+a_2+a_6)-a_2-a_4=a_3$．$EF=(a_1+a_2+a_6)-a_4-a_6=a_5$．

C1-044　已知 ABCD 为一圆外切梯形，E 是对角线 AC 和 BD 的交点，r_1、r_2、r_3、r_4 分别是△ABE、△BCE、△CDE 和△DAE 的内切圆半径．证明：

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4} \qquad (1)$$

【题说】　1964 年全俄数学奥林匹克十一年级题 2．



【证】 设△ABE、△BCE、△CDE、△DAE 的面积和周长分别为 S_1、S_2、S_3、S_4；l_1、l_2、l_3、l_4．

由于 AB+CD=AD+BC

所以 $l_1+l_3=l_2+l_4$ （2）

因为 AB∥CD

所以 $S_2=S_4$

记之为 S．则

$$\frac{S_1}{S}=\frac{S}{S_3}=\frac{AE}{CE}=\frac{BE}{DE}=\frac{AB}{CD}=\frac{l_1}{l_3}$$

从而

$$\frac{l_1}{S_1}=\frac{l_3}{S}, \quad \frac{l_3}{S_3}=\frac{l_1}{S}$$

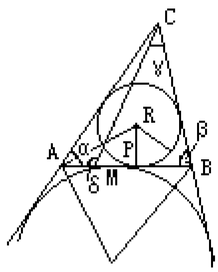
相加并利用（2）得

$$\frac{l_1}{S_1}=\frac{l_3}{S_3}=\frac{l_1+l_3}{S}=\frac{l_2+l_4}{S}=\frac{l_2}{S_2}+\frac{l_4}{S_4}$$

即（1）成立．

C1-045 设点 M 是△ABC 的 AB 边上的任一内点，r_1、r_2、r 分别是△AMC、△BMC、△ABC 的内切圆半径；q_1、q_2、q 分别是这些三角形在∠ACM、∠BCM、∠ACB 内的旁切圆半径．试证：

$$\frac{r_1}{q_1}\cdot\frac{r_2}{q_2}=\frac{r}{q}$$



【题说】 第十二届（1970 年）国际数学奥林匹克题 1．本题由波兰提供．

【证】 设∠CAB=α，∠ABC=β，∠BCA=γ，∠AMC=δ；又设△ABC 的内切圆的圆心为 R，且与 AB 切于 P（如图）．于是

$$\angle APR=\angle BPR=\frac{\pi}{2}$$

从而有

$$AB = r\cot\frac{\alpha}{2} + r\cot\frac{\beta}{2}$$

$$= r\left(\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2}\right) \quad (1)$$

由于三角形的角的内、外分角线互相垂直，因而类似地有

$$AB = q\tan\frac{\alpha}{2} + r\cot\frac{\beta}{2}$$

$$= q\left(\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2}\right) \quad (2)$$

由（1）和（2）可得

$$\frac{r}{q} = \frac{\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2}}{\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2}} = \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} \quad (3)$$

类似的结论对于△AMC 和△BMC 也成立，故有

$$\frac{r_1}{q_1} = \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} \quad (4)$$

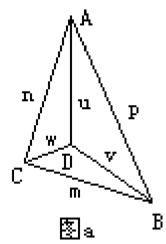
和 $$\frac{r_2}{q_2} = \tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\pi-\delta}{2} = \tan\frac{\beta}{2}\cot\frac{\delta}{2} \quad (5)$$

将（4）、（5）相乘，并利用（3）得

$$\frac{r_1}{q_1} \cdot \frac{r_2}{q_2} = \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\delta}{2} \cdot \tan\frac{\beta}{2}\cot\frac{\delta}{2} = \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2} = \frac{r}{q}$$

C1-046 考虑如图 a、图 b 所示的△ABC 和△PQR．在△ABC 中，∠ADB=∠BDC=∠CDA=∠120°．试证：

x=u+v+w．



图a

【题说】 第三届（1974 年）美国数学奥林匹克题 5．

【证】 △BCD 绕 B 逆时针方向旋转 60°，至△BEF，如图 c．这时易知 A、D、F、E 在一直线上，且 AE=u+v+w．再将△EAC 绕 E 顺时针方向旋转 60°，至△EGB．则△AEG 为正三角形且易证它与△PQR 全等，其中 B 相当于 O 点．得证．

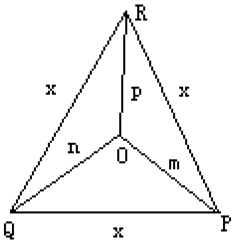


图 b

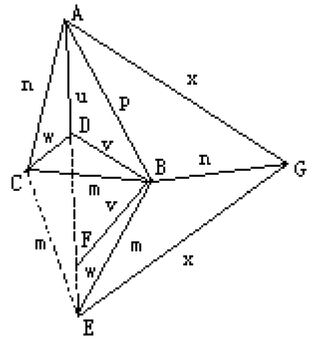


图 c

【别证】 (1)△PQR 绕 R 逆时针旋转 60°,至△SPR,如图 d.这时作正△ROT 外接圆,设交 RP 于 D′.易证∠OD′T=∠TD′P=∠PD′O=120°.由△ABC 中 D 点的唯一性及△ABC≌△TOP 知 PD′=w,OD′=v,TD′=u.又由托勒密定理,知 RD′=u+v,故 x=u+v+w.

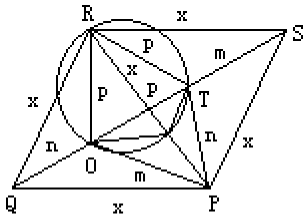


图 d

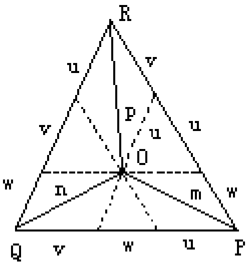
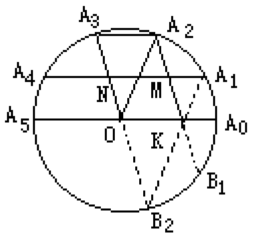


图 e

(2)过 O 作△PQR 三边平行线,如图 e,也可以得结论.

C1-047 直径 A0A5 把圆 O 分成两个半圆,其中一个半圆分成五段等弧 $\overset{\frown}{A_0A_1}$、$\overset{\frown}{A_1A_2}$、$\overset{\frown}{A_2A_3}$、$\overset{\frown}{A_3A_4}$、$\overset{\frown}{A_4A_5}$.直线 A_1A_4 交 OA_2、OA_3 于点 M、N.证明:线段 A_2A_3 与 MN 之和等于圆的半径.



【题说】 第十九届(1985 年)全苏数学奥林匹克八年级题 6.

【证】 在圆上分别标出点 A_1、A_2、A_3、A_4 关于直径 A_0A_5 的对称点 B_1、B_2、B_3、B_4,得圆的内接正十边形 $A_0A_1\cdots A_5B_4B_3\cdots B_1$(如图).则 A_2B_1 ∥ A_3B_2,A_2B_1 ∥ A_1A_0,OA_2 ∥ B_2A_1,A_0A_5 ∥ A_1A_4 ∥ A_2A_3.由对称性知 A_2B_1 和 B_2A_1 的交点 K 在 A_0A_5 上.又设 A_2B_1 和 A_1A_4 相交于点 L.于是 KA_2A_3O、A_0A_1LK、A_1MOK、LNOK 都是平行四边形.所以 $A_2A_3=KO=A_1M=LN$,从而 $MN=A_1L=A_0K$.因此,$A_2A_3+MN=A_0O$.

C1-048 四边形 ABCD 内接于圆,另一圆的圆心 O 在边 AB 上且与其余三边相切.求证:AD+BC=AB.

【题说】 第二十六届(1985 年)国际数学奥林匹克题 1.本题由英国提供.

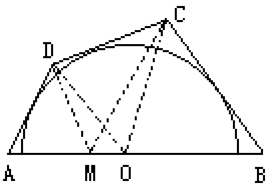


图 a

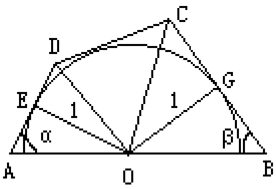


图 b

【证】 在 AB 上取点 M，使 MB=BC．连结 OD、OC、MD 和 MC．

因为 $$\angle CMB=\frac{1}{2}(180°-\angle B)$$
$$=\frac{1}{2}\angle CDA=\angle CDO$$

所以 C、D、M、O 四点共圆．

因此 $$\angle AMD=\angle OCD=\frac{1}{2}\angle DCB=\frac{1}{2}(180°-\angle A)$$

所以∠AMD=∠ADM，故 AM=AD．从而

AB=AM+MB=AD+BC

【别证】 设半圆半径为 1，∠OAE=α，则 AE=cotα．

又因 $$\angle OCG=\frac{1}{2}(180°-\alpha)=90°-\frac{1}{2}\alpha$$

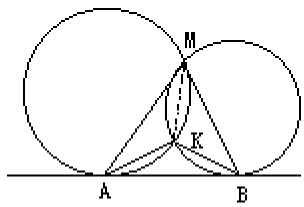
所以 $$CG=\cot\angle OCG=\tan\frac{\alpha}{2}$$

而 $$AE+CG=\cot\alpha+\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha}=AO$$

同理可证 BG+ED=BO

故 AD+BC=AB

C1-049 已知两圆相交于 M 和 K,引两圆的公切线,切点为 A 和 B.证明：∠AMB+∠AKB=180°．



【题说】 第十四届（1988 年）全俄数学奥林匹克八年级题 2．

【证】 如图，连结 MK，则

∠AMK=∠KAB

∠BMK=∠KBA

两式相加得

∠AMB=∠KAB+∠KBA

因此 ∠AMB+∠AKB=∠KAB+∠KBA+∠AKB=180°

C1-050 在一个三角形中，以 h_a、h_b、h_c 表示它的三条高，以 r 表示它的内切圆半径.证明：当且仅当三角形为等边三角形时，$h_a+h_b+h_c=9r$．

【题说】 1988 年原联邦德国数学奥林匹克（第一轮）题 2．

【证】 设三角形三边为 a、b、c，周长为 p，面积为 S，则

$$2S=rp=ah_a=bh_b=ch_c$$

所以 $h_a+h_b+h_c=\frac{rp}{a}+\frac{rp}{b}+\frac{rp}{c}$

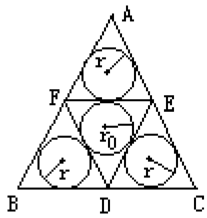
$$=r(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9r$$

当且仅当 a=b=c，即三角形为等边三角形时取等号，即

$$h_a+h_b+h_c=9r$$

C1-051 设点 D、E、F 分别在△ABC 的三边 BC、CA、AB 上，且△AEF、△BFD、△CDE 的内切圆有相等的半径 r，又以 r_0 和 R 分别表示△DEF 和△ABC 的内切圆半径．求证：

$$r+r_0=R$$



【题说】 第四届（1989 年）全国冬令营赛题 4．

【证】 设 p 为△ABC 的半周长，q 为△DEF 的半周长．因为

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AEF}+S_{\triangle BFD}+S_{\triangle CDE}+S_{\triangle DEF}$$

所以

$$R\cdot p=r\cdot p+(r_0+r)\cdot q \qquad (1)$$

又

$$R\cdot\sum\cot\frac{A}{2}=p \qquad (2)$$

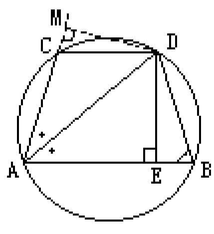
$$r\cdot\sum\cot\frac{A}{2}=p-q \qquad (3)$$

所以 $R(p-q)=Pr$ (4)

由（1）、（4）得 $Rq=(r_0+r)q$，即 $R=r_0+r$．

C1-052 在圆内引弦 AB 和 AC，∠BAC 平分线交圆于 D 点．过 D 作DE⊥AB于E．证明：$AE=\frac{1}{2}(AB+AC)$．

【题说】 第十六届（1990 年第三阶段）全俄数学奥林匹克九年级题 8．



【证】 作 DM⊥AC 于 M（如图）．因为 ABDC 内接于圆，所以

$$\angle MCD=\angle B$$

若 B 与 E 重合，则

$$\angle B=90°=\angle ACD$$

Rt△ABD≌Rt△ACD，结论显然成立．

若 B 与 E 不重合，则∠B 为锐角或钝角．不妨设∠B 为锐角（钝角情形同样讨论），则∠ACD 为钝角，M 在 AC 延长线上，而 E 点在 AB 线段内．

由于 AD 平分∠BAC，所以 DE=DM，AE=AM．从而△BDE≌△CDM，则

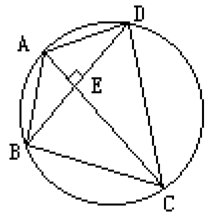
$$BE = CM，AE = \frac{1}{2}（AB + AC）．$$

C1-053 四边形ABCD内接于半径为 r 的圆，对角线 AC、BD 相交于 E．证明：若 AC⊥BD，则

$$EA^2+EB^2+EC^2+ED^2=4r^2 \qquad (1)$$

若（1）成立，是否必有 AC⊥BD？说明你的理由．

【题说】 1991 年英国数学奥林匹克题 3．



【解】 若 AC⊥BD，则 $EA^2+EB^2+EC^2+ED^2=AB^2+CD^2$．

由正弦定理

$$AB^2=4r^2\sin^2\angle ACB$$

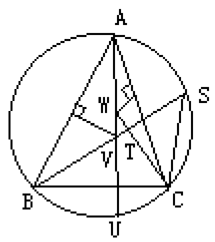
$$CD^2=4r^2\sin^2\angle CBD=4r^2\cos^2\angle ACB$$

所以
$$EA^2+EB^2+EC^2+ED^2$$
$$=4r^2\sin^2\angle ACB+4r^2\cos^2\angle ACB$$
$$=4r^2$$

反之，若（1）成立，未必有 AC⊥BD．例如 AC、BD 为任两条直径，则交点 E 即为圆心．（1）式显然成立．

C1-054 设∠A 是三角形 ABC 中最小的内角．点 B 和 C 将这个三角形的外接圆分成两段弧．设 U 是落在不含 A 的那段弧上且不等于 B 与 C 的一个点．线段 AB 和 AC 的垂直平分线分别交线段 AU 于 V 和 W．直线 BV 和 CW 相交于 T．

证明：AU=TB+TC．



【题说】 第三十八届（1997 年）国际数学奥林匹克题 2．本题由英国提供．

【证】 如图所示，因为点 V 在线段 AB 的垂直平分线上，所以∠VAB=∠VBA．又因∠A 是△ABC 的最小内角，且∠VAB=∠UAB＜∠CAB

故 ∠VBA=∠VAB＜∠CAB≤∠CBA

即 V 在∠ABC 内．

同理 W 在∠ACB 内．BV 与 CW 的交点 T 在△ABC 内．

延长 BT 交外接圆于 S．由于 AU 与 BS 关于弦 AB 的中垂线对称，所以 AU=BS．

因为∠TCS=∠TCA+∠ACS=∠WAC+∠ABS=∠WAC+∠VAB=∠BAC=∠BSC，所以 TS=TC，从而

$$AU=BT+TS=BT+TC$$

C1-055 在圆上取六个点 A、B、C、D、E、F，使弦 AB 与 DE 平行，弦 DC 与 AF 平行．证明：弦 BC 与弦 EF 平行．

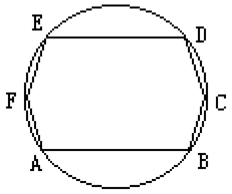


图 a

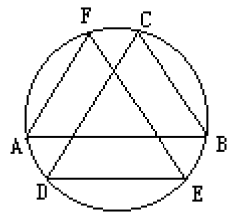


图 b

【题说】 1959 年～1960 年波兰数学奥林匹克三试题 5．

【证】 圆上六点的顺序有种种情况．以图 a、图 b 所示的两种为例，其他情况可仿此证明．

在图 a 中，因 AB∥DE，DC∥AF，故有

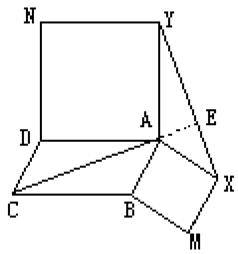
$$\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{AF}+\overset{\frown}{FE}，\quad \overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{EF}+\overset{\frown}{ED}$$

由此可得 $$\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AE}$$

所以 $$BC∥EF$$

在图 b 中，因 AB ∥ DE， AF ∥ CD，故 $\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CF}$，即 $\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{CF}$．所以，BC∥EF．

C1-056 在平行四边形 ABCD 的两边 AB、AD 上，向外作两个正方形 ABMX、ADNY．求证：CA⊥XY．



【题说】 1963 年武汉市赛高三一试题 4．

【证】 如图，延长 CA 交 XY 于 E，因

∠ABC=180°-∠BAD

=180°-（360°-∠BAX-∠XAY-∠YAD）

=∠XAY

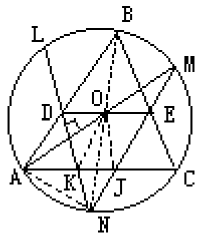
又 AY=AD=BC 及 AX=BA

所以 △XAY≌△ABC，从而

$$∠XYA=∠ACB=∠CAD$$

所以 ∠AEY=180°-∠EAY-∠EYA=180°-∠EAY-∠CAD=∠DAY=90°．亦即 AC⊥XY．

C1-057 作△ABC 外接圆，连接 AC 中点与 AB、BC 中点的弦，分别交 AB 于 D，交 BC 于 E．证明：DE∥AC 且通过三角形的内心．



【题说】 1965 年全俄数学奥林匹克八年级题 3．

【证】如图，设 N 、 M 、 L 分别是 $\overset{\frown}{AC}$ 、 $\overset{\frown}{CB}$ 、 $\overset{\frown}{BA}$ 中点， O 为△ABC 的内心，则 AM、BN 过 O．又设 LN 与 AC 交于 K，连结 OK．

$$\text{因为}\overset{\frown}{LM}+\overset{\frown}{AN}=\overset{\frown}{LB}=\overset{\frown}{BM}+\overset{\frown}{AN}=\frac{1}{2}\text{圆周，所以}$$

$$LN\perp AM$$

在△AON 中，易知∠AON=∠NAO．从而 ND 平分 AO．又 AO 平分∠A．从而 AO 平分 DK．因此在四边形 AKOD 中二对角线 AO、DK 互相垂直平分，故 AKOD 是菱形．于是 DO∥AK．

同理，四边形 CEOJ 是菱形，从而 OE∥CJ，从而 D、O、E 在一条直线上，即 DE∥AC，而且 DE 过△ABC 内心 O．

C1-058 某个平面四边形，各边之长顺次为 a，b，c，d，对角线互相垂直．试证：任何其它四边形，若其各边长顺次为 a，b，c，d，则其对角线也互相垂直．

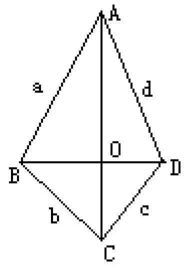


图 a

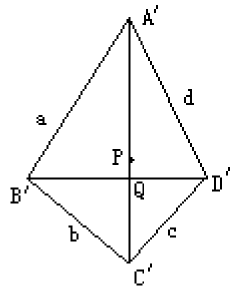


图 b

【题说】 1975 年～1976 年波兰数学奥林匹克三试题 4．

【证】 设四边形 ABCD、A′B′C′D′的边长顺次为 a，b，c，d，AC 与 BD 相交于 O，并且 AC⊥BD（如图）．

显然 $$a^2-b^2=AO^2-OC^2=d^2-c^2$$

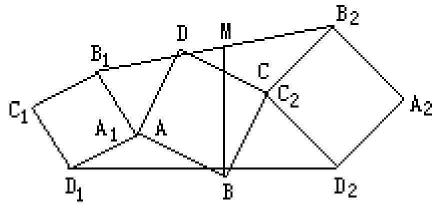
设 B′在 A′C′上的射影为 P，D′在 A′C′上的射影为 Q，则

$$A'P^2-PC'^2=a^2-b^2=d^2-c^2$$
$$=A'Q^2-QC'^2$$

即 $$A'C'\times(A'P-PC')=A'C'\times(A'Q-QC')$$

从而 A′P-PC′=A′Q-QC′，又 A′P+PC′=A′C′=A′Q+QC′，所以 A′P=A′Q，P 与 Q 重合，并且均在 B′D′上．于是 B′D′⊥A′C′．

C1-059 已知平面上的三个正方形 ABCD、$A_1B_1C_1D_1$ 和 $A_2B_2C_2D_2$（正方形的顶点是沿逆时针方向标写的）．并且顶点 A_1 与 A 重合，而 C_2 与 C 重合，试证：线段 D_1D_2 与 BM（其中 M 为线段 B_1B_2 的中点）互相垂直并且 $|D_1D_2|=2|BM|$．



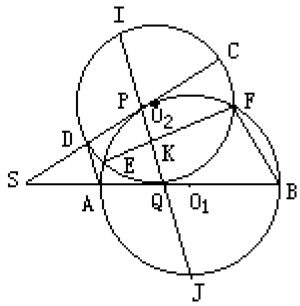
【题说】 第六届（1981 年）全俄数学奥林匹克十年级题 5．

【证】 设 B 为原点，其它各点的复数表示仍用同样的字母，则由于 M 是线段 B_1B_2 中点，

$$
\begin{aligned}
2\cdot M=B_1+B_2&=(B_1-A)+(B_2-C)+A+C\\
&=(D_1-A)\cdot(-i)+(D_2-C)\cdot i+A+C\\
&=(D_2-D_1)i+A\cdot(1+i)+C\cdot(1-i)\\
&=(D_2-D_1)i+C\cdot i(1+i)+C\cdot(1-i)\\
&=(D_2-D_1)i
\end{aligned}
$$

因此线段 $D_1D_2\perp BM$，并且$|D_1D_2|=2|BM|$．

C1-060 如图，在凸四边形 ABCD 中，AB 与 CD 不平行．圆 O_1 过 A、B 且与边 CD 相切于 P，圆 O_2 过 C、D 且与边 AB 相切于 Q，圆 O_1 与圆 O_2 相交于 E、F．求证：EF 平分线段 PQ 的充分必要条件是 BC∥AD．



【题说】 第五届（1990 年）全国冬令营赛题 1．

【证】 首先证明：

$$BC\parallel AD \Leftrightarrow PD\cdot PC=QA\cdot QB$$

如图，分别延长 CD 与 BA，记它们的交点为 S．并记 SC，SD，SP，SA，SB，SQ 为 c，d，p，a，b，q，则 $p^2=ab$，$q^2=cd$．于是

$$(p-d)(c-p)=(q-a)(b-q)\Leftrightarrow(c+d)p=(a+b)q$$

$$\Leftrightarrow(c+d)^2ab=(a+b)^2cd\Leftrightarrow(bc-ad)(ac-bd)=0$$

$$\Leftrightarrow ac=bd\Leftrightarrow AD\parallel BC$$

其次，证明：$PD\cdot PC=QA\cdot QB\Leftrightarrow KP=KQ$（即EF平分线段PQ）．

延长 PQ 分别交圆 O_1、O_2 于 J、I，则由相交弦定理可知

$$PD\cdot PC=PI\cdot PQ,\ QA\cdot QB=QJ\cdot PQ$$

因此，$PD\cdot PC=QA\cdot QB\Leftrightarrow PI=QJ$．因EF为两圆的公共弦，再由相交弦定理可知

$$KP\cdot KJ=KE\cdot KF=KQ\cdot KI$$

即
$$KP(KQ+QJ)=KQ(KP=PI)$$

于是
$$KP\cdot QJ=KQ\cdot PI$$

从而
$$PI=QJ\Leftrightarrow KP=KQ$$

所以 $PD \cdot PC = QA \cdot QB \Leftrightarrow KP = KQ$

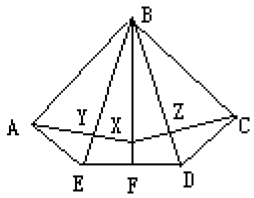
综上所述，命题得证．

C1-061 △ABC是直角三角形，以直角边AC和BC为边分别向外作两个菱形ACDE和CBFG，其中心分别为P和Q，且∠EAC=∠GCB＜90°，如果M和N分别为AB和DG的中点．证明：PQ⊥MN．

【题说】 1992年友谊杯国际数学竞赛八年级题2．

【证】 容易证明，△ACG≌△BCD，所以AG=BD．从而以四边形ADGB各边中点为顶点的四边形P，N，Q，M是菱形，故PQ⊥MN．

C1-062 ABCDE是凸五边形，AB=BC，∠BCD=∠EAB=90°．X为此五边形内一点，使得AX⊥BE且CX⊥BD．证明：BX⊥DE．



【题说】 1992年澳大利亚数学奥林匹克题3．

【证】 设AX交BE于Y，CX交BD于Z，BX交DE于F．则

$$AB^2=BY \cdot BE=BZ \cdot BD$$

所以D，E，Y，Z四点共圆．又由于B，Y，X，Z四点共圆，所以

$$\angle BXZ=\angle BYZ=\angle ZDF$$

故D，F，X，Z四点共圆，从而∠BFD=∠DZX=90°，即BX⊥DE．

C1-063 已知△ABC以O_1、O_2、O_3为旁切圆圆心．证明：$\triangle O_1O_2O_3$是锐角三角形．

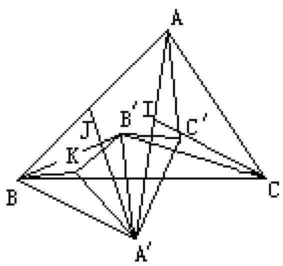
【题说】 第三届（1993年）澳门数学奥林匹克第一轮题3．

【证】 易知$\triangle O_1O_2O_3$包含△ABC，△ABC三内角平分线是$\triangle O_1O_2O_3$三高，△ABC内心O是$\triangle O_1O_2O_3$垂心．O在△ABC内，更在$\triangle O_1O_2O_3$内，故$\triangle O_1O_2O_3$为锐角三角形．

C1-064 在△ABC中，∠A的平分线交AB边中垂线于A′，∠B的平分线交BC边中垂线于B′，∠C的平分线交CA边中垂线于C′．求证：

(1) 若A′与B′重合，则△ABC为正三角形；

(2) 若A′，B′，C′互异，则$\angle B'A'C' = 90° - \frac{1}{2}\angle BAC$．



【题说】 1993年德国数学奥林匹克（第二轮）题3．

【证】 (1) 若A′与B′重合，则△ABC的内心与外心重合，从而△ABC为正三角形．

(2) 将△A′AC′绕A旋转，使A与B重合．设这时C′转到

K，则$BK=AC'=C'C$，$\angle A'BK=\angle A'AC'=\frac{1}{2}(\angle BAC-\angle ACB)$．

又$BB'=B'C$，$\angle B'BK=\frac{1}{2}\angle BAC-\frac{1}{2}\angle ABC-\angle A'BK=\frac{1}{2}(\angle BAC-\angle ABC-\angle BAC+\angle ACB)=\angle B'CC'$．所以△B'BK≌△B'CC'，B'K=B'C'．从而△B'A'K≌△B'A'C'，$\angle B'A'C'=\angle B'A'K=\angle\frac{1}{2}C'A'K=\angle\frac{1}{2}AA'B=90°-\angle\frac{1}{2}BAC.$

【注】 设 I 为内心，AB 的垂直平分线交 BB'于 J，则可以证明△A'C'I∽△A'B'J，从而导出结论，但需要稍多的计算．

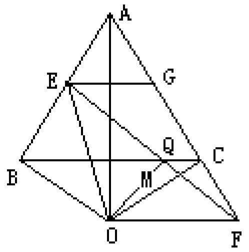
C1-065 ABC 是一个等腰三角形，AB=AC，假如

（i）M 是 BC 的中点，O 是直线 AM 上的点，使得 OB 垂直于 AB；

（ii）Q 是线段 BC 上不同于 B 和 C 的一个任意点；

（iii）E 在直线 AB 上，F 在直线 AC 上，使得 E，Q，F 是不同的和共线的．

求证：OQ⊥EF 当且仅当 QE=QF．



【题说】 第三十五届（1994 年）国际数学奥林匹克题 2．本题由亚美尼亚-澳大利亚提供．

【证】 连线段 OE、OF、OC．由对称性，OC⊥AC，∠OBQ=∠OCQ．若 OQ⊥EF，则 O、Q、B、E 四点共圆，O、Q、C、F 四点共圆，故

$$\angle OEQ=\angle OBQ,\ \angle OFQ=\angle OCQ\quad(1)$$

于是 $$\angle OEQ=\angle OFQ,\ OE=OF$$

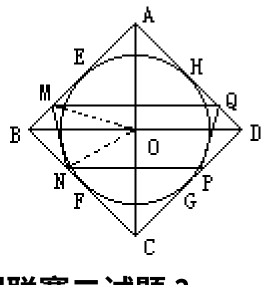
又 OQ⊥EF，故 QE=QF．

反之，若 QE=QF，过 E 作 EG∥BC 交 AC 于 G，则易知 EB=GC=CF．

又 OB=OC，∠OBE=∠OCF=90°，所以△OBE≌△OCF，OE=OF．

从而 OQ⊥EF．

C1-066 如图，菱形 ABCD 的内切圆 O 与各边分别切于 E、F、G、H，在$\overset{\frown}{EF}$与$\overset{\frown}{GH}$上分别作⊙O 的切线交 AB 于 M，交 BC 于 N，交 CD 于 P，交 DA 于 Q．求证：MQ∥NP．



【题说】 1995 年全国联赛二试题 3．

【证】 连结 AC，则 O 为 AC 中点，再连结 MO、NO．则

$$\angle AMO=\angle OMN=\frac{1}{2}（\angle B+\angle BMN）$$

$$\angle MNO=\angle ONC=\frac{1}{2}（\angle B+\angle BNM）$$

$$\angle MON=180°-（\angle OMN+\angle MNO）$$

$$=90°-\frac{1}{2}\angle B=\angle BAC=\angle ACB$$

因此 $\triangle AMO \backsim \triangle OMN \backsim \triangle CON$

$$\frac{AM}{AO}=\frac{CO}{CN}，AM \cdot CN=OA^2$$

同理 $AQ \cdot CP=OA^2$，从而

$$AM \cdot CN=AQ \cdot CP$$

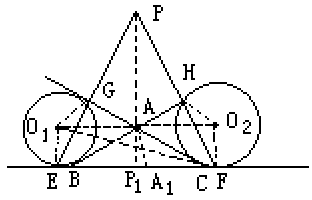
即 $AM:AQ=CP:CN$

又 $\angle MAQ=\angle PCN$，故$\triangle AMQ \backsim \triangle CPN$．因此

$$\angle AMQ=\angle CPN$$

从而 $MQ \parallel NP$．

C1-067 如图，⊙O_1和⊙O_2与△ABC 的三边所在直线都相切．E、F、G、H 为切点，且 EG、FH 的延长线交于 P 点．求证：PA⊥BC．



【题说】 1996 年全国联赛二试题 3．

【证】 由旁切圆性质知，

$$CE=p（\triangle ABC 半周长）=BF$$

分别过 P、A 作 $PP_1 \perp BC$，$AA_1 \perp BC$．连 O_1E、O_1C，易知 $Rt\triangle O_1EC \backsim Rt\triangle P_1EP$．从而

$$EP_1:O_1E=PP_1:CE$$

同理 $Rt\triangle O_2FB \backsim Rt\triangle P_1FP$

$$FP_1:O_2F_2=PP_1:BF$$

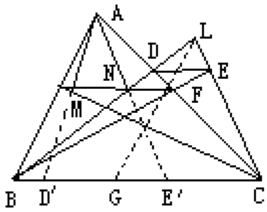
故 $EP_1:O_1E=FP_1:O_2F_2$

因 $\triangle AGO_1 \backsim \triangle AHO_2$

故 $$\frac{EP_1}{FP_1}=\frac{O_1E}{O_2F}=\frac{O_1G}{O_2H}=\frac{O_1A}{O_2A}=\frac{EA_1}{FA_1}$$

因此 P_1 与 A_1 重合，即 PA⊥BC．

C1-068 在△ABC 中，AM 是 A 到∠C 的平分线所作的垂线，M 为垂足；AN、CL 分别是 A、C 到∠B 的平分线所作的垂线，N、L 为垂足，MN 的延长线交 AC 于 F，BF 的延长线交 CL 于 E，BL 交 AC 于 D．求证：DE∥MN．



【题说】 1996 年江苏省竞赛题 3．

【证】 (1) 延长 AM 交 BC 于 D′，延长 AN 交 BC 于 E′，则由已知可得，AN=NE′，AM=MD′，故

MN∥BC (1)

注意到 AM=MD′，故 AF=FC．连 LF 并延长交 BC 于 G，设 CL 交 BA 延长线于 G，则 L 平分 CG，所以 LF∥AB，故

BG=GC (2)

又在△BCL中，因BE、CD、LG相交于一点F，由塞瓦定量得 $\frac{BG}{GC}\cdot\frac{CE}{EL}\cdot\frac{LD}{DB}=1$．由 (2) 得 $\frac{CE}{EL}=\frac{DB}{LD}$，故DE∥BC．结合 (1) 得DE∥MN．

C1-069 在等腰△ABC 中，AC=BC．O 是它的外心，I 是它的内心，点 D 在 BC 边上，使得 OD 与 BI 垂直．证明：直线 ID 与 AC 平行．

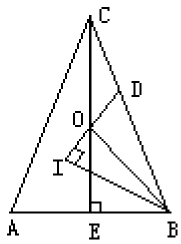


图 a

【题说】 第二十二届 (1996 年) 全俄数学奥林匹克九年级题 6．

【证】 如果△ABC 是等边的 (点 O 与 I 重合)，那么结论显然成立．

设点 O 在点 I 与 C 之间 (如图 a)，作高 CE，则

$$\angle EIB = 90° - \frac{1}{2}\angle ABC$$

$$\angle ODB = 90° - \frac{1}{2}\angle ABC$$

$$\angle EIB=\angle ODB$$

所以 B、I、O 和 D 四点共圆，于是∠IDB=∠IOB．

又 $\angle IOB = \frac{1}{2}\angle AOB = \angle ACB$

于是∠IDB=∠ACB，ID∥AC．

当点 I 在点 O 与 C 之间时，证法同上．见图 b、图 c．

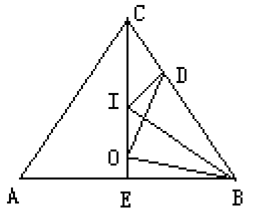


图 b

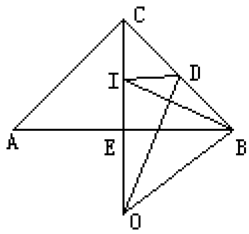
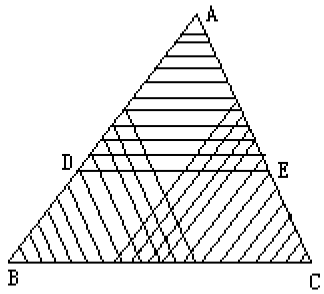


图 c

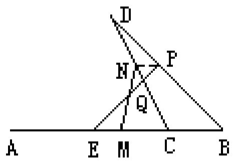
C1-070 三只苍蝇沿三角形 ABC 的边爬行，它们形成的三角形的重心都在同一位置，证明：如果它们中的一只苍蝇沿三角形的整个边界爬过，那末它们的重心与△ABC 的重心重合.

【题说】 第九届（1975 年）全苏数学奥林匹克八年级题 5.

【证】 如果一只苍蝇位于顶点 A，那末，由苍蝇形成的三角形的重心位于三角形 ADE 内（如图），这里 DE∶BC=2∶3. 因为一只苍蝇游遍了所有顶点，所以“苍蝇三角形”的重心应属于图中带斜线的三个三角形. 而它们唯一的公共点就是△ABC 的重心.



C1-071 设线段 AB 的中点为 M，从 AB 上另一点 C 向直线 AB 的一侧引线段 CD；令 CD 的中点为 N，BD 的中点为 P，MN 的中点为 Q. 求证：直线 PQ 平分线段 AC.



【题说】 1978 年全国联赛一试题 6.

【证】 如图，设 PQ 交 AB 于 E，连 PN，因为 P 为 BD 的中点，N 为 CD 的中点，所以

$$PN \overset{\parallel}{=} CB$$

又 Q 为 MN 的中点，故

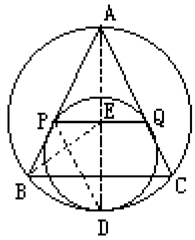
$$\triangle QME \cong \triangle QNP$$

从而
$$EM = PN = \frac{1}{2}CB$$

$$AE = \frac{1}{2}AB - EM = BM - EM$$

$$=CM+BC-EM=CM+EM=CE$$

C1-072 在△ABC 中，边 AB=AC，有一个圆内切于△ABC 的外接圆，并且与 AB、AC 分别相切于 P、Q. 求证：P、Q 两点连线的中点是△ABC 的内切圆圆心.



【题说】 第二十届（1978 年）国际数学奥林匹克题 4．本题由美国提供．

【证】 如图．设 D 是两圆的切点，E 是 PQ 的中点，连接 AD、BE、PD、BD．由于△ABC 是等腰三角形，易知 AD 是△ABC 外接圆的直径．

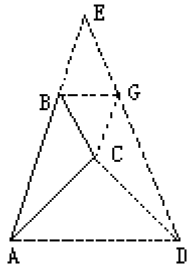
又因 AB、AC 和△ABC 的内切圆相切于点 P、Q，所以 AP=AQ．因此 E 点一定在 AD 上，并且 AE 平分∠A， AE⊥PQ．于是$\overset{\frown}{PD}=\overset{\frown}{QD}$，所以∠BPD=∠EPD．又因为 PD 是公共边，所以，Rt△BPD≌Rt△EPD，所以 PB=PE，∠PBE=∠PEB．

又因为 AD⊥BC，AD⊥PQ，所以 BC∥PQ，∠PEB=∠EBC，于是有

∠PBE=∠EBC

即 BE 平分∠ABC．因此 E 点是△ABC 的内心．

C1-073 已知△ABC 三内角比为 1∶2∶6，又 a、b、c 为角 A、B、C 所对之边．求证：a∶b=（a+b）∶（a+b+c）．



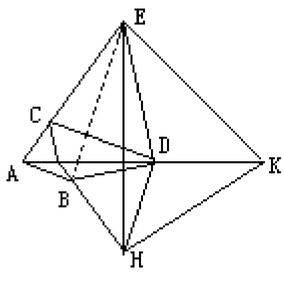
【题说】 1979 年芜湖市赛题 8．

【证】 因∠A+∠B+∠C=180°．故

∠A=20°，∠B=40°，∠C=120°

延长 AC 到 G，使 CG=CB，延长 BC 到 D，使 CD=CA．设直线 AB、DG 相交于 E．易知△EAD 是等腰三角形，BG∥AD，△BCG 与△ACD 都是等边三角形，并且，∠BDE=∠BAC=20°，∠BED=∠ABC-∠BDE=20°=∠BDE．所以，BE=BD=BC+CD=a+b．由于 BG∥AD，所以$=\frac{BG}{AD}=\frac{EB}{EA}$，即$a:b=(a+b):(a+b+c)$．

C1-074 已知位于同一平面内的正三角形 ABC、CDE 和 EHK（顶点依反时针方向排列），并且$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DK}$．证明：△BHD 也是正三角形．

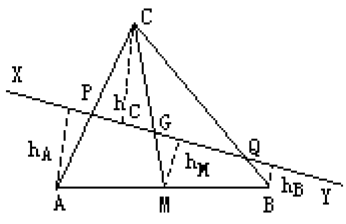


【题说】 第十五届（1981年）全苏数学奥林匹克九年级题2．要证△BHD为正三角形，只须证它的一边绕着一顶点向另一边旋转60°后重合于这一边．

【证】 将△CAD绕点C逆时针旋转60°，那末它将变为△CBE．所以|AD|=|BE|，且$\overrightarrow{AD}$和$\overrightarrow{BE}$之间的夹角等于60°．因为$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DK}$，所以|DK|=|AD|=|BE|，再将△HBE绕H顺时针旋转60°，因为△EHK是正三角形，所以点E变为点K；线段EB变为线段KD；点B变为点D，于是|HB|=|HD|，∠BHD=60°，△BHD是正三角形．

C1-075 1．△ABC为任意三角形，它的重心G有如下的性质：过它任作直线XY与边交于P、Q，以A、B、C为顶点，以PQ为底边的三个顶点三角形，分居X、Y的两侧，若以一侧的三角形面积为正，另一侧的为负，则所有顶点三角形面积之值的代数和为零（即一侧的顶点三角形面积（和），等于另一侧顶点三角形面积（和）），试证之．2．对于任意四边形ABCD，具有上述性质的点是否存在？若存在，请找出来；若不存在，请证明．

【题说】 1981年芜湖市赛题6．



图a

【证】 1．若XY过一顶点，结论显然．

若XY不过顶点，则必有两个顶点，不妨设A、B在ZY的同一侧，如图a所示．

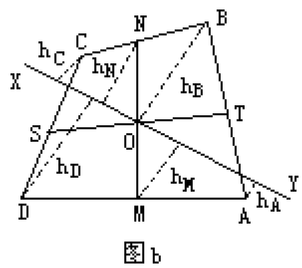
令h_A、h_B、h_C分别为A、B、C到XY的距离，M为AB中点，h_M为M到XY的距离，则有

$$h_A+h_B=2h_M$$

易知
$$h_C=2h_M$$

所以
$$h_A+h_B=h_C，S_{\triangle APQ}+S_{\triangle BPQ}=S_{\triangle CPQ}$$

即
$$S_{\triangle APQ}+S_{\triangle BPQ}-S_{\triangle CPQ}=0$$



图b

2．四边形ABCD对边中点连线MN和ST的交点O，具有类似性质．过O任作直线XY．不妨设XY交CD于X，交AB于Y，h_A、h_B、h_C、h_D、h_M、h_N分别为A、B、C、D、M、N到XY的距离，则

$$h_B+h_C=2h_N \quad (1)$$

$$h_A+h_D=2h_M \quad (2)$$

又易知四边形 MTNS 是平行四边形，O 为 MN 中点，所以

$$h_M=h_N \qquad (3)$$

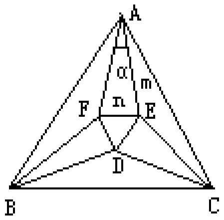
由（1）、（2）、（3）得

$$S_{\triangle AXY}+S_{\triangle DXY}+S_{\triangle CXY}+S_{\triangle BXY}=0 \qquad (4)$$

另一方面，设 O′为这样的点，过 O′作直线分别交 CD 于 X、交 AB 于 Y，则（沿用上面的符号）（1）、（2）、（4）成立，所以（3）成立，即 O′为 MN 中点，从而 O′与 O 重合，即具有上述性质的点是唯一的．

C1-076 如图，AE 和 AF、BF 和 BD、CD 和 CE 分别是△ABC 中∠A、∠B、∠C 的三等分线．求证：△DEF 是等边三角形．

【题说】 1982 年上海市赛二试题 6．这结果是 F．Morley 在 1899 年发现的，故称为 Morley 定理．



【证】 如图，记 A=3α，B=3β，C=3γ，AE=m，AF=n，△ABC 的三边长为 a、b、c．

由于 3α+3β+3γ=180°．所以α+β+γ=60°．α+β=60°-γ，而 $n\sin(\alpha+\beta)=c\sin\beta$，所以 $n=\frac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{c\sin\beta}{\sin(60°-\gamma)}$．

类似地 $$m=\frac{b\sin\gamma}{\sin(60°-\beta)}$$

在△ABC 中有 bsin3γ=csin3β，从而

$$\frac{m}{n}=\frac{\sin3\beta\cdot\sin\gamma\cdot\sin(60°-\gamma)}{\sin3\gamma\cdot\sin\beta\cdot\sin(60°-\beta)}=\frac{\sin(60°+\beta)}{\sin(60°+\gamma)}$$

由于α+β+γ=60°．所以存在以 60°+β，60°+γ和α为内角的三角形，夹α角的两边之比为

$$\frac{\sin(60°+\beta)}{\sin(60°+\gamma)}=\frac{m}{n}$$

△EAF 与这三角形相似，从而

$$\angle AFE=60°+\beta$$
$$\angle AEF=60°+\gamma$$

同法可证∠BFD=60°+α，而

$$\angle AFB=180°-(\alpha+\beta)$$

因此

∠EFA+∠AFB+∠BFD=(60°+β)+(180°-α-β)+(60°+α)=300°

所以∠DFE=60°．

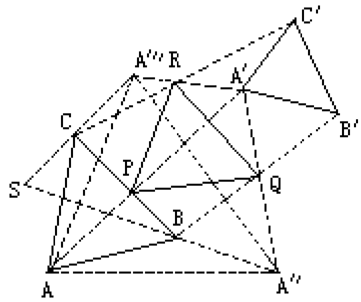
类似地，△DEF 的另两个内角也为 60°．

因此△DEF 是等边三角形．

C1-077 如图所示，△ABC、△A′B′C′为二正三角形．P、Q、R

分别为 AA′、BB′、CC′的中点．试证：△PQR 也是正三角形．

【题说】 1983 年芜湖市赛题 4．

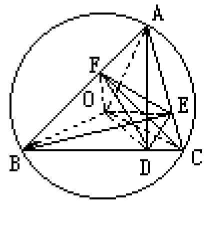


【证】 连 A′Q 并延长至 A″，使 A″Q=A′Q，连 A′R 并延长至A‴使A′R＝A‴R．连AA″，AA‴，A″A‴，则有PQ∥AA″，PR∥A‴A，RQ∥A″A‴．延长 A″B交 A‴C 延长线于 S．因 A″B $\underline{\underline{\parallel}}$ A′B′，CA‴ $\underline{\underline{\parallel}}$ A′C′，所以 CA‴=BA″，且∠CSB=∠C′A′B′=60°=∠CAB．从而 C、B、A、S 四点共圆．故∠SCA=∠SBA，所以∠ABA″=∠ACA″．又 AC=AB．所以△ABA″≌△ACA‴．所以 AA″=AA‴．∠CAA‴=∠BAA″．

于是∠A″AA‴=60°，△AA″A‴为正三角形．从而△PQR 也是正三角形．

C1-078 已知锐角三角形 ABC 的外接圆半径是 R，点 D、E、F 分别在边 BC、CA、AB 上．求证：AD、BE、CF 是△ABC 的三条高的充要条件是$S=\frac{1}{2}R(EF+FD+DE)$，式中S是三角形ABC的面积．

【题说】 1986 年全国联赛二试题 2．



【证】 $S=S_{OEAF}+S_{OFBD}+S_{ODCE}$

$$\leq\frac{1}{2}OA\cdot EF+\frac{1}{2}OB\cdot FD+\frac{1}{2}OC\cdot DE$$

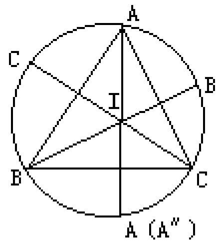
等号当且仅当 OA⊥EF、OB⊥FD、OC⊥DE 时成立．这样的△DEF 唯一存在，它就是垂足三角形．事实上，由 BE⊥AC、CF⊥AB 和 B、C、E、F 四点共圆，从而∠AFE=∠ACB；又由∠AOB=2∠ACB 及 OA=OB 知∠OAB=90°-∠ACB．所以 OA⊥EF，同理 OB⊥FD，OC⊥DE．

设另有△D′E′F′三边分别垂直于 OA、OB、OC，即分别平行于垂足三角形 DEF 的对应边，且 D′、E′、F′分别在 BC、AC、AB 上，则△DEF 与△D′E′F′位似，A 为位似中心．D′必在 AD 上，因为 D′又在 BC 上，所以 D′与 D 重合，同理 E′、F′也分别与 E、F 重合．于是命题得证．

C1-079 设 I 为三角形 ABC 内心，且 A′、B′、C′分别是△IBC、△ICA、△IAB 的外心，求证：△ABC 与△A′B′C′有相同外心．

【题说】 第十七届（1988 年）美国数学奥林匹克题 4．此题结论即

为△ABC 与△A′B′C′有共同的外接圆.



【证】 作△ABC 外接圆，延长 AI 交圆于 A″，连 BA″、CA″，易知

$$\angle BIA'' = \frac{1}{2}(A+B) = IBA''$$

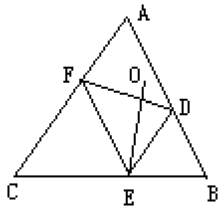
$$\angle CIA'' = \frac{1}{2}(A+C) = \angle ICA''$$

故 A″B=A″I=A″C．即 A″是△BIC 的外心，即 A″与 A′重合.

同理，B′与 B″、C′与 C″分别重合．因此，△ABC 与△A′B′C′有同一个外接圆.

C1-080 在△ABC 的边 AB、BC、CA 上分别取 D、E、F，使得 DE=BE，FE=CE．证明：△ADF 的外心在∠DEF 的平分线上.

【题说】 第二十三届（1989 年）全苏数学奥林匹克十年级题 2.

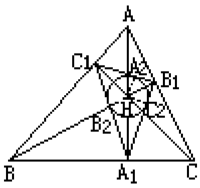


【证】 如图，∠DEF=180°-（180°-2∠B）-（180°-2∠C）=180°-2∠A．因此∠A 是锐角，从而△ADF 的外心与顶点 A 在 DF 的同侧，∠DOF=2∠A=180°-∠DEF．因此 D，E、F、O 四点共圆．于是∠DEO=∠DFO=∠FDO=∠FEO．即 O 在∠DEF 平分线上.

C1-081 $\triangle A_1B_1C_1$ 是不等边锐角△ABC 的垂足三角形，A_2、B_2、C_2 是 $\triangle A_1B_1C_1$ 内切圆分别与各边的切点．证明：$\triangle A_2B_2C_2$ 与△ABC 的欧拉线重合.

注：三角形的欧拉线是指垂心和外心的连线.

【题说】第七届（1990 年）巴尔干地区数学奥林匹克题 3.



【证】如图，设△ABC 的垂心为 H，则

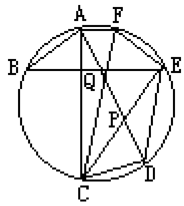
$$\angle HA_1B=\angle HC_1B=\angle BA_1A$$
$$=\angle BB_1A=90°$$

所以 A_1、H、C_1、B 与 A_1、B_1、A、B 分别共圆，因此 $\angle HA_1C_1=\angle HBC_1=\angle HA_1B_1$．即 A_1H 是 $\angle B_1A_1C_1$ 的平分线．同理，B_1H、C_1H 分别是 $\angle A_1B_1C_1$、$\angle A_1C_1B_1$ 的平分线．因此 H 是 $\angle A_1B_1C_1$ 的内心，从而 H 是 $\triangle A_2B_2C_2$ 的外心，

并且 B_2、C_2 关于 A_1H 对称，所以 B_2C_2∥BC．同理，A_2C_2∥AC，A_2B_2∥AB．故△ABC 与△$A_2B_2C_2$ 是位似形，于是这两个三角形的欧拉线或者平行或者重合．由于 H 是△ABC 的垂心又是△$A_2B_2C_2$ 的外心，且在这两个三角形的欧拉线上，所以这两个三角形的欧拉线重合．

C1-082 凸六边形 ABCDEF 内接于圆，并且 AB=CD=EF，对角线 AD、BE和CF共点于Q．设AD和CE相交于P．求证：$\frac{CP}{PF}=\frac{AC^2}{CE^2}$．

【题说】第二十三届（1994 年）美国数学奥林匹克题 3．



【证】因为 CD=EF，所以 CF∥DE．由此可得△CPQ∽△EPD，因而

$$\frac{CP}{PE}=\frac{CQ}{DE}$$

又 ∠QDE=∠ACE，∠QED=∠AEC．所以△QDE∽△ACE，$\frac{QD}{DE}=\frac{AC}{CE}$，同理，△CQD∽△ACE，$\frac{CQ}{QD}=\frac{AC}{CE}$．

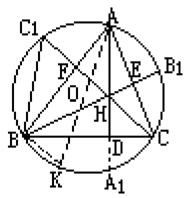
所以 $\frac{CD}{PE}=\frac{CQ}{DE}=\frac{CQ}{DQ}\cdot\frac{DQ}{DE}=\frac{AC^2}{CE^2}$．

C1-083 锐角△ABC 的高 AD、BE、CF 交于点 H，AD、BE、CF 的延长线分别△ABC 的外接圆于点 A_1、B_1、C_1．试证：

(1) 六边形 $AC_1BA_1CB_1$ 的周长等于三线段 AH、BH、CH 之和的两倍；

(2) R（DE+EF+FD）=2S，这里 R、S 分别为△ABC 外接圆的半径与△ABC 的面积．

【题说】1997 年江苏省赛题 3．



【证】（1）如图所示，$\angle AC_1H=\angle ABC$，∠BCF+∠ABC=90°，$\angle BCF+\angle AHC_1=90°$，故 $\angle ABC=\angle AHC_1$，从而 $\angle AHC_1=\angle AC_1H$，$Rt\triangle AHF\cong Rt\triangle AC_1F$，$AC_1=AH$．同理可证 $BC_1=BH=BA_1$，$C_1A=CH=CB_1$，$AB_1=AH$，因此 $AC_1+C_1B+BA_1+A_1C+CB_1+B_1A=2$（AH+BH+CH）；

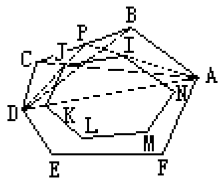
（2）设 O 为外接圆心，连接 AO 并延长交△ABC 外接圆于点 K，连接 BK，则∠ABK=90°，于是∠BAK+∠BKA=90°，又∠BKA=∠ACB．连接 FE，因为 B、C、E、F 四点共圆，故∠AFE=∠ACB，从而∠BAK+∠AFE=90°，AK⊥EF，即 AO⊥EF．

同理 BO⊥DF，CO⊥ED．故 $S=S_{四边形AFOE}+S_{四边形BDOF}+S_{四}$

边形CDOE $=\frac{1}{2}\cdot$（EF×OA＋FD×OB＋DE×OC）$=\frac{1}{2}R$（EF＋FD＋DE）．

C1-084　在任意六边形中，以相邻三顶点为顶点的三角形共有 6 个．试证：这六个三角形的重心顺次连接起来，必成一个平行六边形（即三组对边分别平行且相等）．

【题说】1962 年成都市赛高三一试题 4．



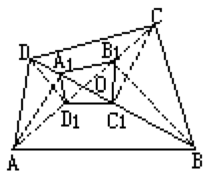
【证】如图，设 I、J、 K、 L、M、 N 分别为△ABC、△BCD、△CDE、△DEF、△EFA、△FAB 的重心．

设 BC 的中点为 P，则 AP、DP 分别是△ABC、△BCD 的中线，因而 I、J 分别在 AP、DP 上，且 PI：IA=PJ：JD=1：2，从而 IJ∥AD，且 $IJ=\frac{1}{3}AD$．

同理可证　$LM \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{3}AD$．所以 $IJ \mathrel{\underline{\parallel}} LM$．

C1-085 从凸四边形 ABCD 顶点引对角线的垂线，垂足分别为 A_1、B_1、C_1、D_1．证明：四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 与 ABCD 相似．

【题说】1964 年全俄数学奥林匹克九年级题 3．



【证】设 AC 与 BD 的交点为 O，$\angle A_1OD_1=\alpha$．易知 A、D、A_1、D_1 共圆，

$\triangle OA_1D_1 \backsim \triangle OAD$

$\angle OA_1D_1=\angle OAD$

$\frac{A_1D_1}{AD}=\frac{OA_1}{OA}=\cos\alpha$

同理　$\angle OA_1B_1=\angle OAB$，所以 $\angle D_1A_1B_1=\angle DAB$，进而四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 与 ABCD 的角均对应相等，并且，

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{A_1D_1}{AD}=\cos\alpha$$

所以两四边形相似．

C1-086 在平面上有 n 个点（n≥4），其中任意四个点都是一个凸四边形的顶点．证明：这 n 个点是一个凸多边形的顶点．

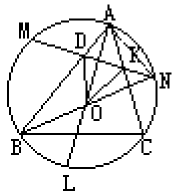
【题说】1967 年～1968 年波兰数学奥林匹克三试题 1．

【证】考虑这 n 个已知点 A_1、A_2、…、A_n 的凸包 F．F 是凸多边形，而且顶点∈{A_1，A_2，…，A_n}．不妨设 $F=A_1A_2\cdots A_m$．若 m＜n，用对角线将 F 分成三角形，A_n 在 F 内，因而必在某个$\triangle A_iA_jA_k$内，这与 A_i、A_j、A_k、

A_n 组成凸四边形矛盾．因此 $F=A_1A_2\cdots A_n$，即 n 个已知点组成一个凸多边形．

C1-087 连接△ABC的外接圆的 $\overset{\frown}{AB}$、 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点M、N的线段，与边 AB、AC 分别相交于 D 和 K．证明：点 A、D、K 和△ABC 的内心 O 组成菱形．

【题说】第十一届（1977 年）全苏数学奥林匹克八年级题 3．



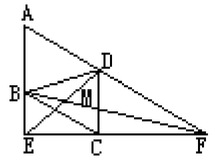
【证】设L为 $\overset{\frown}{BC}$ 中点，易知AL⊥MN，且O为AL、BN的交点，D、K 在∠ANB 的平分线上，从而

$$AD=AK=KO=OD$$

因此，四边形 ADOK 为菱形．

C1-088 菱形 ABCD 的边和一条对角线 BD 的长都是 a，过顶点 C，在菱形外作直线，分别交 AB 与 AD 的延长线于 E、F．连 ED、FB，设它们的交点是 M 若△BEM 与△DFM 的外接圆半径分别是 R_1、R_2．证明$R_1R_2=\frac{1}{3}a_2$．

【题说】1980 年安徽省赛题 3．



【证】因为 BE∥DC,BC∥DF,所以△BEC∽△DCF,BE·DF=DC·BC=a^2.因为 DB=a，所以 BE：BD=BD：DF．又∠EBD=∠BDF=120°，所以△BED∽△DBF，∠BED=∠DBF．因为∠BED+∠MBE=∠DBF+∠MBE=∠EBD=120°

所以 ∠EMB=60°

由正弦定理 $BE=2R_1\sin\angle BME=\sqrt{3}R_1$，$DF=\sqrt{3}R_2$

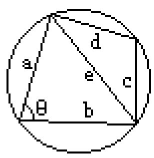
所以 $\sqrt{3}R_1\cdot\sqrt{3}R_2=BE\cdot DF=a^2$

即 $\frac{1}{3}R_1R_2=a^2$．

C1-089 已知内接于圆的四边形的边长分别为 a、b、c、d．l．求

由于$\frac{13}{4}>3$，所以有一个小三棱锥内至少含有四个已知点，以这四点为顶点的三棱锥的体积小于$\sqrt{2}/48$．

【题说】1982 年上海市赛一试题 2．



【证】1．如图，设 a、b 边所夹的角为θ．连对角线 e，则

$$s=\frac{1}{2}ab\sin\theta+\frac{1}{2}cd\sin(\pi-\theta)$$

$$=\frac{1}{2}(ab+cd)\sin\theta \quad (1)$$

又 $$e^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta \quad (2)$$

$$e^2=c^2+d^2+2cd\cos\theta \quad (3)$$

(2)-(3)得 $a^2+b^2-c^2-d^2-2(ab+cd)\cos\theta=0$

即 $$\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2-d^2)=\frac{1}{2}(ab+cd)\cos\theta \quad (4)$$

$(1)^2+(4)^2$得 $$s^2+\frac{1}{16}(a^2+b^2-c^2-d^2)^2=\frac{1}{4}(ab+cd)^2$$

即 $$s=\frac{1}{4}\sqrt{4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}$$

记 $p=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$，上式可写成

$$s=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \quad (5)$$

2．如果这个四边形又有内切圆，那么

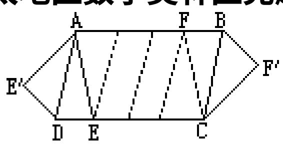
$$a+c=b+d$$

代入（5）式，即得

$$s=\sqrt{abcd}$$

C1-090 证明：对每个偶数 n≥6，存在一个凸六边形，它可以分为 n 个全等的三角形．

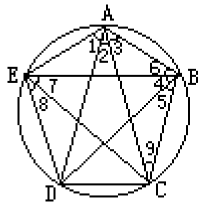
【题说】 1990 年亚太地区数学奥林匹克题 5．



【证】可以考虑平行四边形 ABCD，其中∠A 为钝角，用平行于 AD 的直线将这个平行四边形分为 n 个全等的平行四边形，每个平行四边形又用其一条对角线分为两个全等的三角形，共得 2n 个全等的三角形．如图所示，再将左边的一个△ADE 以 AD 为轴反射到△ADE′，将右边的一个△BCF 以 BC 为轴反射到△BCF′，则得凸六边形 ABF′CDE′，它可分为 2n+2 个全等的三角形，显然这样的凸六边形合乎要求（这里 n 为不小于 2 的任一自然数）．

C1-091 设 ABCDE 是圆内接五边形，假设 AC、BD、CE、DA 和 EB 分别平行于 DE、EA、AB、BC 和 CD．问是否可以推出这个五边形是正五边形？证明你的结论．

【题说】1992 年英国数学奥林匹克题 2．



【解】结论是肯定的．

易知∠1=∠4，∠2=∠5，又由于 AB∥CE，所以∠6=∠7=∠3．从而∠A=∠B．

∠B-∠C=∠D=∠E．

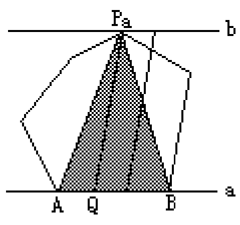
又∠2=∠8=∠9=∠3，所以 BC=CD．同理，有

CD=DE=EA=AB．

综上知，ABCDE 是正五边形．

C1-092 已知凸多边形的任意两边均不平行，对于它的每条边，考察与边所在直线距离最远的顶点对该边的张角．证明：所有这样的张角之和等于 180°．

【题说】第二十二届（1996 年）全俄数学奥林匹克十年级题 7．



【证】对多边形的边 AB，恰有一个顶点到 AB 所在直线 a 的距离最远，记这个顶点为 P_a。

在平面上任取一点 O，过 O 作两条直线分别平行于 P_aA、P_aB，这两条直线构成的对顶角称为边 AB 的对应角．

对每一条边，都可作出顶点为 O 的对应角．

首先证明：不同边的对应角决不重叠．

设以 O 为端点的射线 l，在边 AB 的对应角内．边 AB 所在直线为 a，对应顶点为 P_a，过 P_a 作 l 的平行线必交边 AB 于它内部的点 Q．

过 P_a 作直线 a 的平行线 b．由于 P_a 到 a 的距离最远，所以多边形在平行线 a、b 所夹的带形中，由于多边形的边互不平行，在 b 上只有 P_a 这一点属于多边形．于是线段 P_aQ 是 l 的平行线截多边形所得的线段中最长的，而且最长的只有 P_aQ 这一条．

如果 l 又在边 A′B′的对应角内，那么将得到另一条线段 $P_a{}'$，Q′，也是 l 的平行线截多边形所得线段中最长的．这就产生矛盾．

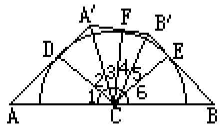
其次，证明这些对应角覆盖整个平面．

设 l 是以 O 为端点的射线，它与多边形的边及对角线均不平行．l 的平行线截多边形所得线段，端点在多边形的边上，可以平行移动使得一个端点与多边形的顶点重合，而线段的长度比原来增加．在过顶点的这些截线中又有一条最长．设它为 PQ，P 是多边形的顶点，Q 在边 AB 的内部．过 P 作 AB 所在直线 a 的平行线 b．因为 PQ 最长，所以多边形夹在 a、b 之间，从而 P 是距 a 最远的顶点 P_a，l 在 AB 的对应角内．

根据以上所述，对应角的和为 360°，而所有张角之和是它的一半，即 180°．

C1-093 设线段 AB 的长为 $2l$，中点为 C，以点 C 为圆心，小于 l 的任意长为半径，在 AB 上作一半圆，并从 A、B 作这半圆的切线，切点分别记为 D、E．若 DE 弧上任意一点 F 处的切线与自 A、B 所作切线分别交于 A′、B′．证明：$AA'\cdot BB'=l^2$．

【题说】1956 年武汉市赛题 5．利用相似三角形．



【证】按题意，作出图，因为 $AC=BC=l$，$CD=CE=r$（半径）．

故 Rt△ADC≌Rt△BEC，从而有∠1=∠6，∠DAC=∠EBC．

又由切线性质知，∠2=∠3，∠4=∠5，所以

$$\angle 2+\angle 5+\angle 6=90°$$

从而有 $\angle A'AC=90°-\angle 2$

$$=\angle 5+\angle 6=\angle B'CB$$

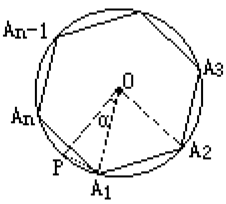
故 $\triangle A'AC\backsim\triangle CBB'$

$$\frac{A'A}{CB}=\frac{AC}{B'B}$$

即 $A'A\cdot B'B=l^2$．

C1-094 设 P 为单位圆周上的任意一点，A_1、A_2、…、A_n 为圆内接正 n 边形的顶点．求证：$PA_1^2+PA_2^2+\cdots+PA_n^2$ 是常数．

【题说】 1957 年上海市赛高三决赛题 5．



【证】如图，在△PA_1O 内，令∠POA_1=α，则由余弦定理，

$$PA_1^2=PO^2+A_1O^2-2PO\cdot A_1O\cos\alpha$$

$$=2-2\cos\alpha$$

$$PA_2^2=2-2\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$PA_3^2=2-2\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{n}\right)$$

……

$$PA_n^2=2-2\cos\left[\alpha+\frac{(n-1)\cdot 2\pi}{n}\right]$$

所以 $PA_n^2+PA_2^2+\cdots+PA_n^2$

$$= 2n - 2\left\{\cos\alpha + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{n}\right) + \cdots\cdots + \cos\left[\alpha + \frac{(n-1)2\pi}{n}\right]\right\}$$

=2n-2S

其中 $S = \cos\alpha + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{n}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{n}\right) + \cdots\cdots + \cos\left[\alpha + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right]$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}\left[\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{n}\right) - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{n}\right) - \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{5\pi}{n}\right) - \sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{n}\right) + \cdots + \sin\alpha + \frac{(2n-1)\pi}{n} - \sin\frac{(2n-3)\pi}{n}\right]$$

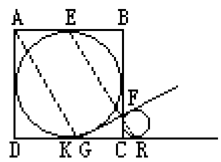
$$= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}\left[\sin\left(\alpha + \frac{(2n-1)\pi}{n}\right) - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{n}\right)\right] = 0$$

所以 $PA_1^2 + PA_2^2 + \cdots + PA_n^2 = 2n$

【别证】以 O 为原点，以 OA_1 为实轴，以 OA_1 为单位长，建立复平面，用复数方法来计算.

C1-095 假设 E 是正方形 ABCD 的边 AB 的中点，在边 BC 和 CD 上取点 F 和 G，使 AG 和 EF 平行．证明：线段 FG 和正方形 ABCD 的内切圆相切．

【题说】1960 年匈牙利数学奥林匹克题 3．题中正方形可以改为菱形．



【证】如果点 F 给定，那么点 G 由条件 AG∥EF 唯一确定．因此可改证：如果线段 FG 和正方形的内切圆相切，那么 AG∥EF．

正方形的内切圆是△FCG 的旁切圆．我们再画出该三角形的与 CF 边相切的旁切圆．设这个圆与 DC 的延长线切于 R 点．点 F 是两个圆的内相似心，因为它是内公切线的交点．这两个圆分别与平行直线 AB、DC 相切，切点 E、R 和内相似心 F 在一直线上并在 F 的两侧．

设 K 为 CD 的中点，则它也是△FCG 的一个旁切圆与 CG 延长线的切点，易知

$$CR = \frac{CG + GF + FC}{2} = CK = AE$$

所以，四边形 AERG 是平行四边形，AG∥EF．

C1-096 在一小岛上有一架探照灯，它照在海面上的光柱长为 a（如图），并绕一垂直轴旋转．其光柱末端以速度 v 运动．证明：以最大速度 v／8 行驶的快艇，不可能在不被探照灯照到的情况下驶到海岛．

【题说】1965 年全俄数学奥林匹克八年级题 5．

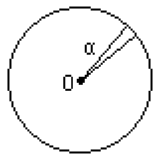


图 a

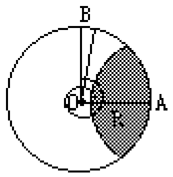


图 b

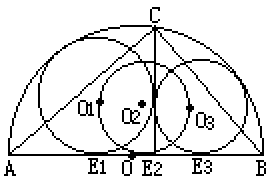
【证】假设快艇从 A 点进入探照区（以 O 为圆心、以 a 为半径的圆），

而探照灯光柱刚扫过A点，在时间$t=\frac{5\pi}{2}\cdot\frac{a}{v}$内，快艇走过路程$S=\frac{5\pi}{2}\cdot\frac{a}{v}\times\frac{v}{8}=\frac{5\pi}{16}a$（<a）．当未达到小岛O点，其活动范围不超过阴影部分 R（以 A 为圆心、S 为半径的圆与⊙O 的重叠部分）．

而在同样的时间内，探照灯光柱扫过角$\frac{5\pi}{2}a$，即$1\frac{1}{4}$圆，搜遍整个区域 R．因此，快艇一定会被探照灯照射到．

C1-097 一个半圆周 y 以线段 AB 为直径．C 是 y 上与 A、B 不同的一点．D 是 C 到 AB 的垂足．若 y_1、y_2、y_3 是以 AB 为公切线的三个圆，且 y_2 是△ABC 的内切圆，y_1、y_3 同时切 CD 和 y．求证：圆 y_1、y_2、y_3 有两条公切线．

【题说】第十一届（1969 年）国际数学奥林匹克题 4．本题由芬兰提供．



【证】令 AB=2r，∠CAB=α，则不难算出$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$（如图）的半径为

$$O_1E_1=2r\sin\alpha(1-\sin\alpha)$$
$$O_2E_2=r(\cos\alpha+\sin\alpha-1)$$
$$O_3E_3=2r\cos\alpha(1-\cos\alpha)$$

以及它们与 AB 的切点距 AB 中点 O 的距离

$$E_1O=r(2\sin\alpha-1)$$
$$E_2O=r(\cos\alpha-\sin\alpha)$$
$$E_3O=r(2\cos\alpha-1)$$

由此不难得出

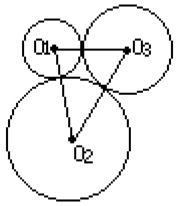
$$O_2E_2\cdot E_1E_3=O_1E_1\cdot E_2E_2+O_3E_3\cdot E_1E_2$$

于是 O_1、O_2、O_3 在一直线上．由对称性，这三个圆还有另一条公切线．

C1-098 大小不等的三个圆两两外切，半径成等差数列，以各圆心

为顶点的三角形，其三个内角的大小可否成等差数列？证明你的结论．

【题说】1979 年天津市赛一试题 3．



【解】如图．设三个圆的圆心分别为 O_1、O_2、O_3，半径依次为 r-d，r，r+d，于是△$O_1O_2O_3$ 的三边分别是

$$O_1O_2=2r-d,\ O_1O_3=2r,\ O_2O_3=2r+d.$$

若△$O_1O_2O_3$ 的三内角成等差数列，则必有一个角为 60°，并且夹这个角的两边必为 2r-d 与 2r+d．因此，由余弦定理有：

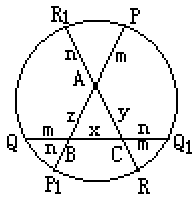
$$(2r-d)^2+(2r+d)^2-2(2r-d)\cdot(2r+d)\cos 60° = (2r)^2$$

此式左端=$4r^2+3d^2$，而右端=4r2，但由题设知 d≠0，故上式不能成立．

这就证明了△$O_1O_2O_3$ 的三个内角不能成等差数列．

C1-099 如图，圆中的三条弦 PP_1、QQ_1、RR_1 两两相交，交点分别为 A、B、C．已知 $AP=BQ=CR$，$AR_1=BP_1=CQ_1$．求证△ABC 是正三角形．

【题说】1979 年北京市赛一试题 3．



【证】如图，设 $AP=BQ=CR=m$，$AR_1=BP_1=CQ_1=n$，$BC=x$，$AC=y$，$AB=z$．则由相交弦定理得

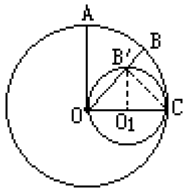
$$\begin{cases} m(n+z)=n(y+m) \\ m(n+x)=n(m+z) \\ m(n+y)=n(x+m) \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} mz=ny \\ mx=nz \\ my=nx \end{cases}$$

三式相加得 m=n，因此 x=y=z，故△ABC 是正三角形．

C1-100　位于圆形斗兽场中心的狗看见墙那里有一只兔子．兔子沿着墙跑，狗追赶兔子，它始终保持在圆心与兔子的连线上，速率与兔子相同．证明：当兔子跑了圆周 1／4 时被狗捉住．

【题说】第十一届（1979 年）加拿大数学奥林匹克题 4．



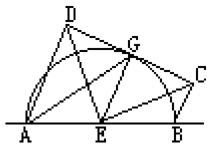
【证】如图，⊙O_1以OC为直径．设兔子从A点向C点跑，则狗沿着⊙O_1弧从O点跑到B′点．可以证明$\overset{\frown}{AB}$长＝$\overset{\frown}{OB'}$长．

事实上，设∠AOB=θ，∠OO_1B'=2∠OCB′=2θ，从而$\overset{\frown}{AB}$长=OA·θ，$\overset{\frown}{OB'}$长=O_1O·2θ=OA·θ因此$\overset{\frown}{AB}$长=$\overset{\frown}{OB'}$长.

由此可知，当兔子跑到C点时，狗沿着⊙O_1跑到C点捉住了兔子．

C1-101 设ABCD是凸四边形,直线CD是以AB为直径的圆的切线.证明：当且仅当BC与AD平行时，直线AB是以CD为直径的圆的切线．

【题说】第二十五届（1984年）国际数学奥林匹克题4．



【证】设E、G分别是AB、CD的中点．由题设知E到CD的距离$d=\frac{1}{2}AB$．我们要证的结论是：当且仅当BC∥AD时，G到AB的距离$d'=\frac{1}{2}CD$．

设BC∥AD．这时梯形ABCD的中位线EG∥AD，于是

$$S_{\triangle EGA}=S_{\triangle EGD} \quad (1)$$

即
$$\frac{1}{2}d'\times\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}d\times\frac{1}{2}CD \quad (2)$$

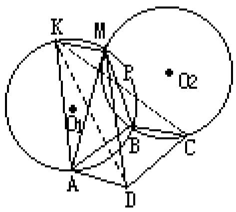
由于
$$d=\frac{1}{2}AB$$

故
$$d'=\frac{1}{2}CD$$

反之，若$d'=\frac{1}{2}CD$，则由$d=\frac{1}{2}AB$，便知（2）与（1）成立，因此AD∥EG．同理BC∥EG，于是AD∥BC．

C1-102 半径均为R的两个圆，一个过平行四边形ABCD的顶点A和B，另一个过顶点B和C．证明：如果M是该两圆的第二个交点，那么△AMD的外接圆半径也是R．

【题说】第十九届（1985年）全苏数学奥林匹克九年级题7．



【证】设P是BM的中点，K是点C关于P的对称点．K显然在⊙O_1

上，且 KM≜BC≜AD．所以四边形 AKMD 是平行四边形，从而△AMD≌△MAK．△AMD 的外接圆半径等于⊙O_1 的半径 R．

C1-103 圆 O 经过△ABC 的顶点 A 和 C，且与边 AB、BC 分别交于点 K 和 N，K 与 N 不同．△ABC 与△BKN 的外接圆相交于 B 和另一点 M．求证：∠OMB 是直角．

【题说】第二十六届（1985 年）国际数学奥林匹克题 5．本题由原苏联提供．

【证】若 AC∥KN，易知 BA=BC，M 与 B 重合．设 AC 与 KN 交于 P．易知直线 BM 也过 P．

因为　　∠BMN=∠AKN=∠NCP

所以 M、N、C、P 四点共圆．因而

$$BM\cdot BP=BN\cdot BC=BO^2-r^2$$

$$PM\cdot PB=PN\cdot PK=PO^2-r^2$$

其中 r 为圆 O 的半径．两式相减有

$$PO^2-BO^2=BP(PM-BM)$$

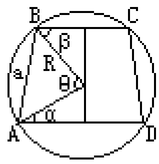
$$=PM^2-BM^2$$

于是　　$PO^2-PM^2=BO^2-BM^2$

故　OM 是△OBP 之 BP 边上的高，即∠OMB 是直角．

C1-104 证明：内接于定圆的所有腰长为 a 的等腰梯形的高与中位线的长度之比为定值．

【题说】第二十二届（1988 年）全苏数学奥林匹克八年级题 5．



【证】如图，设定圆半径为 R，∠AOB=θ，∠OAD=α，∠OBC=β，则梯形的高 h 与中位线 m 有关系式

$$h=R(\sin\alpha+\sin\beta)$$

$$=2R\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$m=R(\cos\alpha+\cos\beta)$$

$$=2R\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

又因 α+β=θ，所以

$$\frac{h}{m}=\tan\frac{\theta}{2}$$

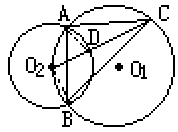
但在△OAB 中，

$$\cos\theta=\frac{2R^2-a^2}{2R^2}=1-\frac{a^2}{2R^2}$$

所以
$$\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\sqrt{\frac{a^2}{4R^2-a^2}}\text{（定值）}$$

C1-105 如图，⊙O_1 与⊙O_2 相交于 A、B 两点，且 O_2 在⊙O_1 的圆周上．弦 O_2C 交⊙O_2 于 D．证明：D 是△ABC 的内心．

【题说】第十六届（1990 年）全俄数学奥林匹克十年级题 6．



【证】因为

$$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BO_2D=\frac{1}{2}\angle BAC$$

所以 AD 平分∠BAC．同理可证 BD 平分∠ABC，即 D 是△ABC 的内心．

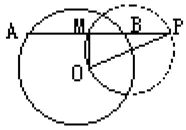
C1-106 已知内切于∠A 的两圆相交，其中一个交点为 B，C、D 分别是两圆与∠A 一边的切点．证明：直线 AB 切过点 B、C、D 的圆．

【题说】第二十四届（1990 年）全苏数学奥林匹克十一年级题 1。

【证】设直线 AB 与⊙O_2 的另一个交点为 F．⊙O_1、⊙O_2 关于点 A 位似，并且 B 的对应点为 F，所以∠CBA=∠DFA=∠CDB．于是直线 AB 切过点 B、C、D 的圆．

C1-107 在平面上，设 C 是一个圆，P 是一给定的点，过 P 作直线交 C 于 A、B 两点．证明：所有弦 AB 中点在一个圆上．

【题说】第 23 届（1991 年）加拿大数学奥林匹克题 3．

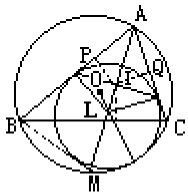


【证】设圆心为 O，弦 AB 的中点为 M，连 OM，则 OM⊥AB，即∠OMP=90°，M 在以线段 OP 为直径的圆上．

当然点 M 的轨迹只是这圆含于圆 C 中的一段圆弧，而非整个圆．

C1-108 设 I 是△ABC 的内心，过 I 作 AI 的垂线，分别交 AB、AC 于 P、Q．求证：分别与 AB 及 AC 相切于 P 及 Q 的圆 L 必与△ABC 的外接圆 O 相切．

【题说】第一届（1992 年）中国台北数学奥林匹克题 5．



【证】如图，延长 AI 交⊙O 于 M，⊙O 的半径为 R，则 L 对⊙O 的幂为

$R^2-LO^2=LA\cdot LM$

所以，$LO^2=R^2-LA\cdot LM$

$=R^2-LA（IM-LI）$

$=R^2-LA\cdot IM+LA\cdot LI$

$=R^2-LA\cdot IM+LP^2$

因为 $\angle MIC=\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle C$

$$=\angle BCM+\frac{1}{2}\angle C=\angle MCI$$

所以 $$MI=MC=2R\sin\frac{1}{2}\angle A=2R\frac{PL}{AL}$$

从而 $$LO^2=R^2-2R\cdot PL+LP^2$$

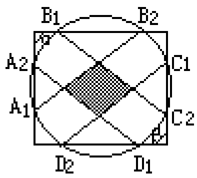
$$=(R-LP)^2$$

即 $$LO=R-LP$$

因此⊙L 与⊙O 相内切．

【注】本题可视为 IMO20 题 4 的推广和引申．

C1-109 在圆内有一个凸四边形，它的边的延长线交圆周于 A_1，A_2，B_1，B_2，C_1，C_2，D_1 和 D_2（如图）．



试证：如果 $A_1B_2=B_1C_2=C_1D_2=D_1A_2$，则由直线 A_1A_2，B_1B_2，C_1C_2 和 D_1D_2 所围成的四边形一定存在外接圆．

【题说】第十九届（1993 年）全俄数学奥林匹克九年级二试题 6．

【证】设直线 A_1A_2，B_1B_2，C_1C_2，D_1D_2 构成的四边形中，两个对角分别等于 α 和 β（如图）．因为

$$A_1B_2=B_1C_2=C_1D_2=D_1A_2$$

所以弧 $\overset{\frown}{A_1D_1B_2}$，$\overset{\frown}{B_1A_1C_2}$，$\overset{\frown}{C_1B_1D_2}$ 和 $\overset{\frown}{D_1C_1A_2}$ 相等．于是，

$$2\alpha\overset{m}{=}\overset{\frown}{A_1D_1B_2}-\overset{\frown}{A_2B_1}=\overset{\frown}{B_1A_1C_2}-\overset{\frown}{A_2B_1}=\overset{\frown}{A_2A_1C_2}$$

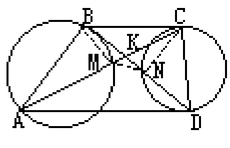
$$2\beta\overset{m}{=}\overset{\frown}{C_1B_1D_2}-\overset{\frown}{C_2D_1}=\overset{\frown}{D_1C_1A_2}-\overset{\frown}{C_2D_1}=\overset{\frown}{C_2C_1A_2}$$

相加得 $2\alpha+2\beta=2\pi$

从而 $\alpha+\beta=\pi$，结论成立．

C1-110 梯形 ABCD 的两条对角线相交于点 K．分别以梯形的两腰为直径各作一圆．点 K 位于这两个圆之外．证明：由点 K 向这两个圆所作的切线长度相等．

【题说】第五十八届（1995 年）莫斯科数学奥林匹克十年级题 15．



【证】设梯形的两腰为 AB 与 CD（见图），并设直线 AC 与 BD 同相应二圆的第二个交点分别为 M 与 N．

由于∠AMB 是半圆上的圆周角，所以

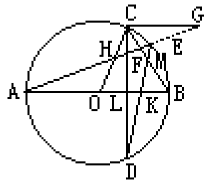
$$\angle BMC=\angle AMB=90°$$

同理∠BNC=90°．

从而 B、M、N、C 四点共圆．故∠MNK=∠ACB=∠KAD．于是 M、N、D、A 四点共圆，KM·KA=KN·KD，即 K 向两个已知圆所引的切线相等．

C1-111 弦 CD 垂直于圆 O 的直径 AB，L 为垂足．弦 AE 平分半径 OC 于 H．证明：弦 DE 平分弦 BC．

【题说】第二十一届（1995 年）全俄数学奥林匹克九年级题 2．



【证】如图，设 AE 与 BC 相交于 F 点，DE 交直径 AB 于 K 点，BC 交 DE 于 M．

注意到 $\overset{\frown}{AC}$ 与 $\overset{\frown}{AD}$ 关于直线AB为对称，因此，它们的度数相等．所以∠AED=∠ABC，因此，点 F、K、B 和 E 四点共圆．于是∠FKB=180°-∠FEB=90°，所以 FK∥CD．

作 CG∥AB 交 AF 的延长线于 G 点．

由△AOH≌△GCH 得 CG=AO=AB／2．又由△AFB∽△GFC，得

$$\frac{CF}{FB}=\frac{CG}{AB}=\frac{1}{2}$$

所以　BF=2CF．

再由△BLC∽△BKF，得

$$\frac{FK}{CL}=\frac{BF}{BC}=\frac{2}{3}$$

因为 $CL=\frac{1}{2}CD$，所以 $\frac{FK}{CD}=\frac{1}{3}$．

由△MKF∽△MDC，得

$$\frac{MF}{MC}=\frac{FK}{CD}=\frac{1}{3}$$

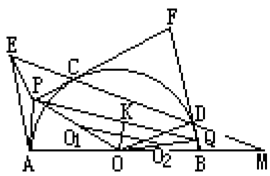
即 MC=3MF，CF=2MF．又因为 BF=2CF，所以

MB=BF-MF=2CF-MF

=4MF-MF=3MF=MC

C1-112 已知 AB 是半圆 O 的直径，一直线交半圆于 C、D，交 AB 于 M（MB＜MA，MD＜MC），设 K 是△AOC 和△DOB 外接圆的第二个交点．证明：∠MKO 是直角．

【题说】　第二十一届（1995 年）全俄数学奥林匹克十年级题 6．



【证】　设△AOC 的外接圆圆心为 O_1，OP 为直径；△DOB 的外接圆圆心为 O_2，OQ 为直径（如图）．连心线 O_1O_2 垂直平分公弦 OK 且 O_1O_2 是△OPQ 的中位线，所以直线 PQ 通过 K 点且垂直于 OK．

线段 PO 是过 A 点的圆 O_1 的直径，所以∠PAO 是直角，因此线段 PA 与半圆 O 相切，同理 PC、QB、QD 都与半圆 O 相切．

设 F 点是直线 PC 与 QD 的交点．过 P 引 PE∥QD 交 DC 的延长线于 E 点，则∠QDM=∠PEM．由 FC=FD 得∠QDM=∠FDC=∠FCD=∠PCE，所以 PC=PE，又 PC=PA，QB=QD．△PAE 与△QBD 都是等腰三角形，且边 PA∥QB，PE∥QD，所以∠PAE=（180°-∠APE）／2=（180°-∠BQD）／2=∠QBD，AE∥

BD．于是以 M 为位似中心，位似比为 MA：MB 的位似变换将点 B 变为点 A，点 D 变为点 E，又因为△PAE∽△QBD，所以点 Q 位似变换为点 P，这就是说 PQ 过 M 点，从而∠MKO=90°．

C1-113 在△ABC 的三边 AB、BC 与 CA 上分别取点 M、K、L（不与△ABC 的顶点重合），证明：△MAL、△KBM、△LCK 中至少有一个的面积不大于△ABC 面积的四分之一．

【题说】第八届（1966 年）国际数学奥林匹克题 6．本题由波兰提供．

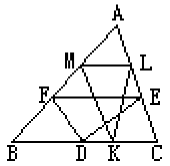


图 a

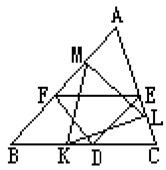


图 b

【证】因为

$$\frac{S_{\triangle KBM}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{BK\cdot BM}{AB\cdot BC}$$

$$\frac{S_{\triangle MAL}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AM\cdot AL}{AB\cdot AC}$$

$$\frac{S_{\triangle LCK}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{CL\cdot CK}{AC\cdot BC}$$

所以

$$\frac{S\triangle KBM}{S\triangle ABC}\frac{S\triangle MAL}{S\triangle ABC}\frac{S\triangle LCK}{S\triangle ABC}$$

$$=\left(\frac{BK}{BC}\cdot\frac{CK}{BC}\right)\left(\frac{AM}{AB}\cdot\frac{BM}{AB}\right)\left(\frac{AL}{AC}\cdot\frac{CL}{AC}\right)$$

$$\leq\left(\frac{BK+CK}{2BC}\right)^2\left(\frac{AM+BM}{2AB}\right)^2\cdot\left(\frac{AL+CL}{2AC}\right)^2$$

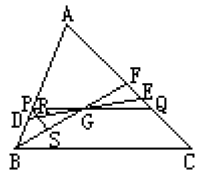
$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$$

从而$S\triangle KBM\leq\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$，$S_{\triangle MAL}\leq\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$，$S_{\triangle LCK}\leq\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$

到少有一个成立.

C1-114 过三角形的重心任作一直线，把这三角形分成两部分．证明：这两部分面积之差不大于整个三角形面积的 1／9．

【题说】1978 年安徽省赛二试题 3．



【证】设直线过△ABC 的重心 G，分别交 AB、AC 于 D、E．

过 G 作 BC 的平行线，分别交 AB、AC 于 P、Q．由于 G 是重心，所以 PG=GQ．

设 E 在线段 AQ 上，则 D 在线段 AP 延长线上．设 AC 上的中线为 BF．过 P 作 AC 的平行线，分别交 DE、BF 于 R、S．

易知 RG=GE，SG=GF，所以

$$S_{\triangle PDG}>S_{\triangle PRG}=S_{\triangle QEG} \quad (1)$$

$$S_{\triangle DBG}>S_{\triangle RSG}=S_{\triangle EFG} \quad (2)$$

由（1）得 $S_{\triangle ADE}>S_{\triangle APQ}=\frac{4}{9}S_{\triangle ABC}$ （3）

由（2）得 $S_{BDEC}>S_{\triangle BFC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$ （4）

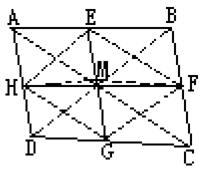
由（3）、（4）得

$$0<S_{BDEC}-S_{\triangle ADE}<\frac{1}{9}S_{\triangle ABC}$$

C1-115 设 ABCD 为任意给定的四边形，边 AB、BC、CD、DA 的中点分别为 E、F、G、H．证明：

$$\text{四边形ABCD面积} \leq EG\cdot HF \leq \frac{1}{2}(AB+CD)\times\frac{1}{2}(AD+BC)$$

【题说】1978 年全国联赛二试题 4．



【证】如图，HE∥DB∥GF，同理 EF∥HG，故 EFGH 为平行四边形．易证

$$\text{面积EFGH}=\frac{1}{2}\text{面积ABCD}$$

$$\text{面积EFGH} \leq \frac{1}{2}EG\cdot HF$$

所以　　面积 ABCD≤EG·HF

设 M 为 BD 的中点，则

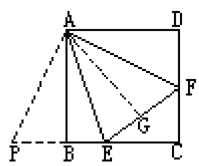
$$\frac{1}{2}(AB+CD)=HM+MF \geq HF$$

同理　　$\frac{1}{2}(AD+BC) \geq EG$

故　　$EG\cdot HF \leq \frac{1}{2}(AB+CD)\times\frac{1}{2}(AD+BC)$

C1-116 正方形 ABCD 的一个内接三角形是 EAF，如果∠EAF=45°，求证：正方形 ABCD 的面积与三角形 EAF 的面积之比等于 AB 与 EF 之比的 2 倍．

【题说】　1979 年上海市赛预赛题 6．



【证】 引△EAF 底边上的高 AG．延长 CB 至 P，使 BP=DF，连 AP，则 Rt△ABP≌Rt△ADF．所以∠DAF=∠BAP，AP=AF．

又 $\angle DAF+\angle EAB=45°$

所以 $\angle BAP+\angle EAB=\angle EAP=45°=\angle EAE$

$\triangle EAP\cong\triangle EAF$

而全等三角形的对应高相等，所以 AG=AB，从而

$$\frac{S_{\square ABCD}}{S_{\triangle EAF}}=\frac{AB^2}{\frac{AG\cdot EF}{2}}=\frac{2AB}{EF}$$

C1-117 已知正六边形 ABCDEF，点 M 和 K 分别为 CD 和 DE 的中点，L 为线段 AM 和 BK 的交点．试证：三角形 ABL 的面积等于四边形 MDKL 的面积，并求直线 AM 和 BK 之间的夹角．

【题说】 第六届（1980 年）全俄数学奥林匹克八年级题 3．

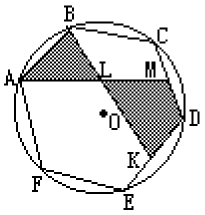


图 a

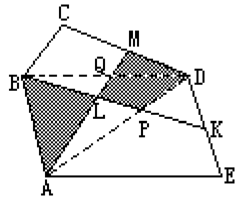


图 b

【证】 显见

$$S_{ABL}+S_{BCML}=S_{ABCM}$$

$$S_{BCML}+S_{MDKL}=S_{BCDK}$$

将四边形 ABCM 绕正六边形中心 O 按顺时针方向旋转 60°（如图 a）后，成为四边形 BCDK，所以∠ALB=60°，$S_{ABCM}=S_{BCDK}$，从而 $S_{ABL}=S_{MDKL}$．

【注】更一般地，我们有：

如果凸五边形 ABCDE 中，BC∥AD，BD∥AE（图 b），M 为 CD 边的中点，K 为 DE 边的中点，L 为线段 AM 与 BK 的交点．那么三角形 ABL 和四边形 MDKL 等积．

【别证】如图 b，设 AD 和 BK 交于 P，BD 和 AM 交于 Q．由于 BC∥AD，BD∥AE，M、K 分别为 CD 和 DE 的中点，所以

$$S_{ABD}=S_{ABC}=2S_{AMD}$$

即 $S_{ABL}+S_{ALP}+S_{BQL}+S_{PLQD}=2（S_{ALP}+S_{PLQD}+S_{MDQ}）$

整理得 $S_{ABL}+S_{BQL}=S_{ALP}+S_{PLQD}+2S_{MDQ}$ (1)

又 $S_{ABD}=2S_{BDK}$

即 $S_{ABL}+S_{ALP}+S_{BQL}+S_{PLQD}=2（S_{BQL}+S_{PLQD}+S_{DKP}）$

整理得 $S_{ABL}+S_{APL}=S_{BQL}+S_{PLQD}+2_{SDKP}$ (2)

（1）+（2），并消去等式两边相同的项，得

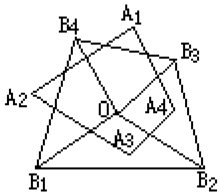
$$2S_{ABL}=2（S_{MDQ}+S_{DKP}+S_{PLKD}）$$

即 $2S_{ABL}=2S_{MDKL}$

所以 $S_{ABL}=S_{MDKL}$

C1-118 图中 OB_i 平行且等于 A_iA_{i+1}，i=1，2，3，4，（$A_5=A_1$）．证明：$B_1B_2B_3B_4$ 的面积是 $A_1A_2A_3A_4$ 的 2 倍．

【题说】第十四届（1982 年）加拿大数学奥林匹克题 1．



【证】因为 $A_1A_2 \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} OB_1$

$A_2A_3 \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} OB_2$

所以 $\angle A_1A_2A_3+\angle B_1OB_2=\pi$

$\sin\angle A_1A_2A_3=\sin\angle B_1OB_2$

因此 $S_{\triangle OB_1B_2}=\frac{1}{2}OB_1\cdot OB_2\sin\angle B_1OB_2$

$=\frac{1}{2}A_1A_2\cdot A_2A_3\cdot\sin\angle A_1A_2A_3$

$=S_{\triangle A_1A_2A_3}$

同理 $S_{\triangle OB_2B_3}=S_{\triangle A_2A_3A_4}$，$S_{\triangle OB_3B_4}=S_{\triangle A_3A_4A_1}$

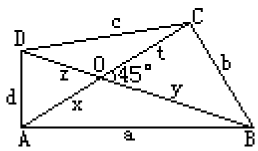
$S_{\triangle OB_4B_1}=S_{\triangle A_4A_1A_2}$

所以 $S_{B_1B_2B_3B_4}=2S_{A_1A_2A_3A_4}$

C1-119 已知凸凹边形四边长分别为 a、b、c、d，对角线相交所成锐角为 45°（如图）．若 S 为四边形的面积．求证：

$$S=\frac{a^2-b^2+c^2-d^2}{4}$$

【题说】 1984 年北京市赛高一题 2．



【证】设凸四边形 ABCD 中，

AB=a，BC=b，CD=c，DA=d．对角线 AC 与 BD 相交于 O 点，OA=x，OB=y，OC=t，OD=z，∠BOC=45°．

由余弦定理，

$a^2=x^2+y^2+2xy\cos45°$ (1)

$b^2=y^2+t^2-2yt\cos45°$ (2)

$c^2=t^2+z^2+2tz\cos45°$ (3)

$d^2=z^2+x^2-2zx\cos45°$ (4)

（1）-（2）+（3）-（4）得 $a^2-b^2+c^2-d^2=2(xy+yt+tz+zx)\cos45°$

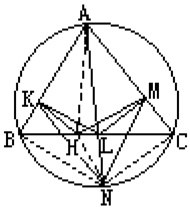
所以 $S=\frac{1}{2}(x+t)(y+z)\sin45°$

$=\frac{1}{2}(xy+yt+tz+zx)\cos45°$

$=\frac{a^2-b^2+c^2-d^2}{4}$

C1-120 设锐角△ABC的∠A平分线交BC于L，交外接圆于N，自点L分别向AB和AC作垂线LK和LM，垂足分别为K和M．求证：△ABC的面积等于四边形AKNM的面积．

【题说】第二十八届（1987年）国际数学奥林匹克题 2．本题由原苏联提供．



【证】作△ABC的高AH，则A、K、H、L、M五点共圆．连结KH、HM、HN、BN和NC，便有

∠KHB=∠BAL=∠NAC=∠HBN

∠MHC=∠MAN=∠NAB=∠NCH

故知　KH∥BN，HM∥NC．从而有

$$S_{\triangle KBH}=S_{\triangle KNH}，S_{\triangle HMC}=S_{\triangle HMN}$$

由此即得
$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AKNM}$$

易知△ABL∽△ANC，所以

$$\frac{AB}{AL}=\frac{AN}{AC}\Leftrightarrow AB\cdot AC=AN\cdot AL$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\times AC\sin A$$

$$=\frac{1}{2}AL\times AN\sin A$$

$$\frac{1}{2}\sin 20°=S_{\triangle}<S_{扇形}=\pi/18<7/40$$

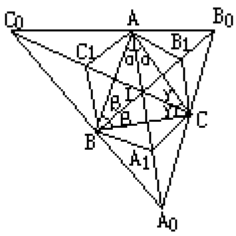
即
$$\sin 20°<7/20$$

C1-121 锐角三角形ABC中，A角的平分线交三角形的外接圆于另一点A_1，点B_1、C_1与此类似．直线AA_1与B、C两角的外角平分线相交于A_0．点B_0，C_0与此类似．求证：

（1）三角形$A_0B_0C_0$的面积是六边形$AC_1BA_1CB_1$面积的二倍；

（2）三角形$A_0B_0C_0$的面积至少是三角形ABC面积的四倍．

【题说】第三十届（1989年）国际数学奥林匹克题 2．本题由澳大利亚提供．



【证】设I为△ABC的内心，则I为AA_0、BB_0、CC_0的交点，如图．

$$\angle BIA_1=\alpha+\beta$$

$$\angle A_1BI=\beta+\angle A1BC$$
$$=\beta+\alpha$$

所以 $A_1B=A_1I$

易知 $BB_1\perp BA_0$

故 $\angle A_1BA_0=90°-\angle A_1BI$
$=90°-\angle BIA_1$
$=\angle A_1A_0B$

$A_1A_0=A_1B=A_1I$

于是 $S_{\triangle A_0BI}=2S_{\triangle A_1BI}$

类似地，可得其他五个等式，将六个等式相加，便得

$$S_{\triangle A_0B_0C_0}=2S_{AC_1BA_1CB_1} \quad (1)$$

由于 A_1、C_1 分别是 A_0I、C_0I 中点，故 A_1C_1 是△IA_0C_0 的中位线，因此它平分 IB，从而

$$S_{\triangle IA_1C_1}=S_{\triangle BA_1C_1}$$

类似地可得其他二等式．三式相加，便得

$$S_{\triangle A_1B_1C_1}=S_{\triangle BA_1C_1}+S_{\triangle AC_1B_1}+S_{\triangle CB_1A_1}=\frac{1}{2}S_{AC_1BA_1CB_1} \quad (2)$$

易知 $S_{\triangle ABC}=2R^2\sin A\sin B\sin C$（R 为外接圆半径）

$=2R^2\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma$

$S_{\triangle A_1B_1C_1}=2R^2\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)\sin(\gamma+\alpha)$

$=2R^2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)(\sin\beta\cos\gamma+\cos\beta\sin\gamma)(\sin\gamma\cos\alpha+\cos\gamma\sin\alpha)$

$\geq 2^4R^2\sqrt{\sin^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\gamma\sin^2\gamma}$

$=2R^2\cdot 2^3\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta\sin\gamma\cos\gamma$

$=2R^2\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma=S_{\triangle ABC} \quad (3)$

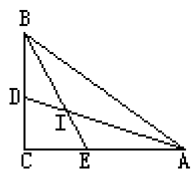
由（1）、（2）、（3）即得

$$S_{\triangle A_0B_0C_0}\geq 4S_{\triangle ABC}$$

C1-122 在直角三角形 ABC（∠C=90°）中，设∠A 和∠B 的内角平分线交于 I 点，分别交对边于 D 和 E 点．

证明：四边形 ABDE 的面积是三角形 AIB 面积的两倍．

【题说】 伊朗第十届数学奥林匹克第二阶段题 1．



【证】 设 a 和 b 是两条直角边长，c 是斜边长．

由于 BE 平分∠ABC，所以 $AE=\frac{bc}{a+c}$．由于 AI 平分∠BAC，所以

$$\frac{IE}{BI}=\frac{AE}{AB}=\frac{b}{a+c}$$

设△AIB的面积为1，则△AIE的面积为$\frac{b}{a+c}$．同理△BID的面积为$\frac{a}{b+c}$，△DIE的面积为$\frac{b}{a+c}\times\frac{a}{b+c}$．

因为 $\frac{b}{a+c}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}\times\frac{a}{b+c}$

$$=\frac{1}{(a+c)(b+c)}(b^2+bc+a^2+ac+ab)$$

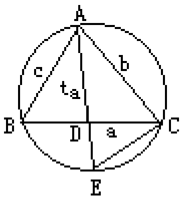
$$=\frac{1}{(a+c)(b+c)}(bc+ac+ab+c^2)$$

$$=1$$

所以四边形 ABDE 的面积是 2，即△AIB 的面积的两倍．

C1-123 证明：任何三角形三个内角的平分线的连乘积必小于三边的连乘积．

【题说】1957 年上海市高三复赛题 6．



【证】令 a、b、c 为三角形 ABC 的三边，t_a、t_b、t_c 为三内角的平分线．作△ABC 的外接圆交∠A 的平分线 AD 的延长线于 E，则

△EAC∽△BAD

AB：AE=AD：AC

AB·AC=AE·AD

即 $b\cdot c=t_a(t_a+DE)$

所以 $bc>t_a^2$

同理 $ca>t_b^2$，$ab>t_c^2$

所以 $abc>t_at_bt_c$

C1-124 证明：外切于已知圆的所有四边形中，正方形的周长最短．

【题说】 1957 年～1958 年波兰数学奥林匹克三试题 6．本题可推广为已知圆的有相同边数的外切多边形中，以正多边形周长最短．

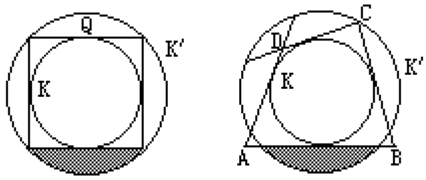


图 a　　　图 b

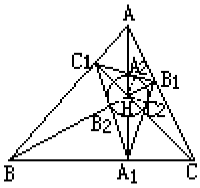
【证】 由于外切于已知圆的多边形的面积与其周长成正比，因此本题即外切于已知圆的四边形中，正方形的面积最小．

设 Q 是已知圆 K 的外切正方形，四边形 ABCD 是这个圆的任意外切四边形，但不是正方形．圆 K′是正方形 Q 的外接圆（为清晰起见，画了两个图）．显然

$\triangle A_1B_1C_1$内切圆分别与各边的切点．证明：$\triangle A_2B_2C_2$与$\triangle ABC$的欧拉线重合．

注：三角形的欧拉线是指垂心和外心的连线．

【题说】第七届（1990年）巴尔干地区数学奥林匹克题3．



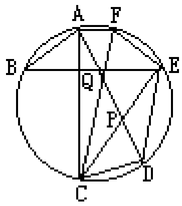
【证】如图，设$\triangle ABC$的垂心为H，则

$$\angle HA_1B=\angle HC_1B=\angle BA_1A=\angle BB_1A=90°$$

所以A_1、H、C_1、B与A_1、B_1、A、B分别共圆，因此$\angle HA_1C_1=\angle HBC_1=\angle HA_1B_1$．即$A_1H$是$\angle B_1A_1C_1$的平分线．同理，$B_1H$、$C_1H$分别是$\angle A_1B_1C_1$、$\angle A_1C_1B_1$的平分线．因此H是$\angle A_1B_1C_1$的内心，从而H是$\triangle A_2B_2C_2$的外心，并且$B_2$、$C_2$关于$A_1H$对称，所以$B_2C_2\parallel BC$．同理，$A_2C_2\parallel AC$，$A_2B_2\parallel AB$．故$\triangle ABC$与$\triangle A_2B_2C_2$是位似形，于是这两个三角形的欧拉线或者平行或者重合．由于H是$\triangle ABC$的垂心又是$\triangle A_2B_2C_2$的外心，且在这两个三角形的欧拉线上，所以这两个三角形的欧拉线重合．

C1-082 凸六边形ABCDEF内接于圆，并且AB=CD=EF，对角线AD、BE和CF共点于Q．设AD和CE相交于P．求证：$\frac{CP}{PF}=\frac{AC^2}{CE^2}$．

【题说】第二十三届（1994年）美国数学奥林匹克题3．



【证】因为CD=EF，所以CF∥DE．由此可得$\triangle CPQ\backsim\triangle EPD$，因而

$$\frac{CP}{PE}=\frac{CQ}{DE}$$

又 $\angle QDE=\angle ACE$，$\angle QED=\angle AEC$．所以$\triangle QDE\backsim\triangle ACE$，

$\frac{QD}{DE}=\frac{AC}{CE}$，同理，$\triangle CQD\backsim\triangle ACE$，$\frac{CQ}{QD}=\frac{AC}{CE}$．

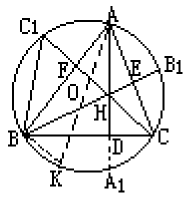
所以 $\frac{CD}{PE}=\frac{CQ}{DE}=\frac{CQ}{DQ}\cdot\frac{DQ}{DE}=\frac{AC^2}{CE^2}$．

C1-083 锐角△ABC的高AD、BE、CF交于点H，AD、BE、CF的延长线分别△ABC的外接圆于点A_1、B_1、C_1．试证：

（1）六边形$AC_1BA_1CB_1$的周长等于三线段AH、BH、CH之和的两倍；

（2）R（DE+EF+FD）=2S，这里R、S分别为△ABC外接圆的半径与△ABC的面积．

【题说】1997年江苏省赛题3．



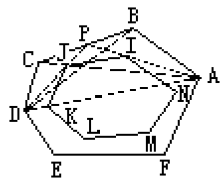
【证】（1）如图所示，$\angle AC_1H=\angle ABC$，$\angle BCF+\angle ABC=90°$，$\angle BCF+\angle AHC_1=90°$，故$\angle ABC=\angle AHC_1$，从而$\angle AHC_1=\angle AC_1H$，$Rt\triangle AHF\cong Rt\triangle AC_1F$，$AC_1=AH$．同理可证 $BC_1=BH=BA_1$，$C_1A=CH=CB_1$，$AB_1=AH$，因此 $AC_1+C_1B+BA_1+A_1C+CB_1+B_1A=2（AH+BH+CH）$；

（2）设 O 为外接圆心，连接 AO 并延长交△ABC 外接圆于点 K，连接 BK，则$\angle ABK=90°$，于是$\angle BAK+\angle BKA=90°$，又$\angle BKA=\angle ACB$．连接 FE，因为 B、C、E、F 四点共圆，故$\angle AFE=\angle ACB$，从而$\angle BAK+\angle AFE=90°$，$AK\perp EF$，即 $AO\perp EF$．

同理 $BO\perp DF$，$CO\perp ED$．故 $S=S_{四边形AFOE}+S_{四边形BDOF}+S_{四边形CDOE}=\frac{1}{2}\cdot(EF\times OA+FD\times OB+DE\times OC)=\frac{1}{2}R(EF+FD+DE)$．

C1-084 在任意六边形中，以相邻三顶点为顶点的三角形共有 6 个．试证：这六个三角形的重心顺次连接起来，必成一个平行六边形（即三组对边分别平行且相等）．

【题说】1962 年成都市赛高三一试题 4．



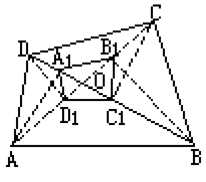
【证】如图，设 I、J、 K、 L、M、 N 分别为△ABC、△BCD、△CDE、△DEF、△EFA、△FAB 的重心．

设 BC 的中点为 P，则 AP、DP 分别是△ABC、△BCD 的中线，因而 I、J 分别在 AP、DP 上，且 PI：IA=PJ：JD=1：2，从而 IJ∥AD，且$IJ=\frac{1}{3}AD$．

同理可证 $LM\mathrel{\underline{\parallel}}\frac{1}{3}AD$．所以$IJ\mathrel{\underline{\parallel}}LM$.

C1-085 从凸四边形 ABCD 顶点引对角线的垂线，垂足分别为 A_1、B_1、C_1、D_1．证明：四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 与 ABCD 相似．

【题说】1964 年全俄数学奥林匹克九年级题 3．



【证】设 AC 与 BD 的交点为 O，$\angle A_1OD_1=\alpha$．易知 A、D、A_1、D_1 共圆，$\triangle OA_1D_1\backsim\triangle OAD$

$\angle OA_1D_1=\angle OAD$

$$\frac{A_1D_1}{AD}=\frac{OA_1}{OA}=\cos\alpha$$

同理　$\angle OA_1B_1=\angle OAB$，所以$\angle D_1A_1B_1=\angle DAB$，进而四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 与 ABCD 的角均对应相等，并且，

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{A_1D_1}{AD}=\cos\alpha$$

所以两四边形相似．

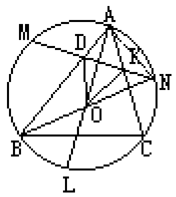
C1-086 在平面上有 n 个点（n≥4），其中任意四个点都是一个凸四边形的顶点．证明：这 n 个点是一个凸多边形的顶点．

【题说】1967 年～1968 年波兰数学奥林匹克三试题 1．

【证】考虑这 n 个已知点 A_1、A_2、…、A_n 的凸包 F．F 是凸多边形，而且顶点∈{A_1，A_2，…，A_n}．不妨设 $F=A_1A_2\cdots A_m$．若 m＜n，用对角线将 F 分成三角形，A_n 在 F 内，因而必在某个$\triangle A_iA_jA_k$内，这与 A_i、A_j、A_k、A_n 组成凸四边形矛盾．因此 $F=A_1A_2\cdots A_n$，即 n 个已知点组成一个凸多边形．

C1-087 连接△ABC的外接圆的$\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{AC}$的中点M、N的线段，与边 AB、AC 分别相交于 D 和 K．证明：点 A、D、K 和△ABC 的内心 O 组成菱形．

【题说】第十一届（1977 年）全苏数学奥林匹克八年级题 3．



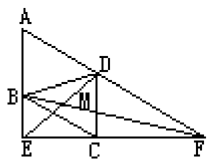
【证】设L为$\overset{\frown}{BC}$中点，易知AL⊥MN，且O为AL、BN的交点，D、K 在∠ANB 的平分线上，从而

AD=AK=KO=OD

因此，四边形 ADOK 为菱形．

C1-088 菱形 ABCD 的边和一条对角线 BD 的长都是 a，过顶点 C，在菱形外作直线，分别交 AB 与 AD 的延长线于 E、F．连 ED、FB，设它们的交点是 M 若△BEM 与△DFM 的外接圆半径分别是 R_1、R_2．证明$R_1R_2=\frac{1}{3}a_2$．

【题说】1980 年安徽省赛题 3．



【证】因为 BE∥DC，BC∥DF，所以△BEC∽△DCF，BE·DF=DC·BC=a^2．因为 DB=a，所以 BE：BD=BD：DF．又∠EBD=∠BDF=120°，所以△BED∽△DBF，∠BED=∠DBF．因为∠BED+∠MBE=∠DBF+∠MBE=∠EBD=120°

所以　　　　$\angle EMB=60°$

由正弦定理　　$BE=2R_1\sin\angle BME=\sqrt{3}R_1$，$DF=\sqrt{3}R_2$

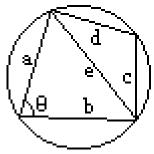
所以　　$\sqrt{3}R_1\cdot\sqrt{3}R_2=BE\cdot DF=a^2$

即　　$\frac{1}{3}R_1R_2=a^2$．

C1-089 已知内接于圆的四边形的边长分别为 a、b、c、d．l．求

由于$\frac{13}{4}>3$，所以有一个小三棱锥内至少含有四个已知点，以这四点为顶点的三棱锥的体积小于$\sqrt{2}/48$．

【题说】1982 年上海市赛一试题 2．



【证】1．如图，设 a、b 边所夹的角为θ．连对角线 e，则

$$s=\frac{1}{2}ab\sin\theta+\frac{1}{2}cd\sin(\pi-\theta)$$

$$=\frac{1}{2}(ab+cd)\sin\theta \quad (1)$$

又　　$e^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta \quad (2)$

$e^2=c^2+d^2+2cd\cos\theta \quad (3)$

(2)-(3)得 $a^2+b^2-c^2-d^2-2(ab+cd)\cos\theta=0$

即　$\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2-d^2)=\frac{1}{2}(ab+cd)\cos\theta \quad (4)$

(1)^2+(4)^{2}得　$s^2+\frac{1}{16}(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$

$$=\frac{1}{4}(ab+cd)^2$$

即　$s=\frac{1}{4}\sqrt{4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}$

记　$p=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$，上式可写成

$$s=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \quad (5)$$

2．如果这个四边形又有内切圆，那么

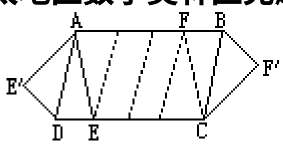
$$a+c=b+d$$

代入(5)式，即得

$$s=\sqrt{abcd}$$

C1-090 证明：对每个偶数 n≥6，存在一个凸六边形，它可以分为 n 个全等的三角形．

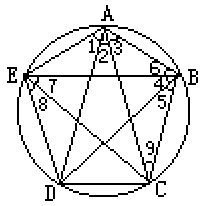
【题说】 1990 年亚太地区数学奥林匹克题 5．



【证】可以考虑平行四边形 ABCD，其中∠A 为钝角，用平行于 AD 的直线将这个平行四边形分为 n 个全等的平行四边形，每个平行四边形又用其一条对角线分为两个全等的三角形，共得 2n 个全等的三角形．如图所示，再将左边的一个△ADE 以 AD 为轴反射到△ADE′，将右边的一个△BCF 以 BC 为轴反射到△BCF′，则得凸六边形 ABF′CDE′，它可分为 2n+2 个全等的三角形，显然这样的凸六边形合乎要求（这里 n 为不小于 2 的任一自然数）．

C1-091 设 ABCDE 是圆内接五边形，假设 AC、BD、CE、DA 和 EB 分别平行于 DE、EA、AB、BC 和 CD．问是否可以推出这个五边形是正五边形？证明你的结论．

【题说】1992 年英国数学奥林匹克题 2．



【解】结论是肯定的．

易知∠1=∠4，∠2=∠5，又由于 AB∥CE，所以∠6=∠7=∠3．从而∠A=∠B．

∠B-∠C=∠D=∠E．

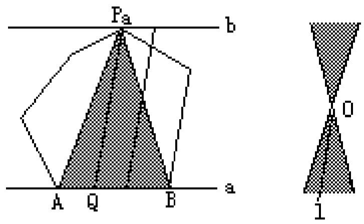
又∠2=∠8=∠9=∠3，所以 BC=CD．同理，有

CD=DE=EA=AB．

综上知，ABCDE 是正五边形．

C1-092 已知凸多边形的任意两边均不平行，对于它的每条边，考察与边所在直线距离最远的顶点对该边的张角．证明：所有这样的张角之和等于 180°．

【题说】第二十二届（1996 年）全俄数学奥林匹克十年级题 7．



【证】对多边形的边 AB，恰有一个顶点到 AB 所在直线 a 的距离最远，记这个顶点为 P_a。

在平面上任取一点 O，过 O 作两条直线分别平行于 P_aA、P_aB，这两条直线构成的对顶角称为边 AB 的对应角．

对每一条边，都可作出顶点为 O 的对应角．

首先证明：不同边的对应角决不重叠．

设以 O 为端点的射线 l，在边 AB 的对应角内．边 AB 所在直线为 a，对应顶点为 P_a，过 P_a 作 l 的平行线必交边 AB 于它内部的点 Q．

过 P_a 作直线 a 的平行线 b．由于 P_a 到 a 的距离最远，所以多边形在平行线 a、b 所夹的带形中，由于多边形的边互不平行，在 b 上只有 P_a

这一点属于多边形．于是线段 P_aQ 是 l 的平行线截多边形所得的线段中最长的，而且最长的只有 P_aQ 这一条．

如果l又在边A′B′的对应角内，那么将得到另一条线段 $P_a'Q'$，也是 l 的平行线截多边形所得线段中最长的．这就产生矛盾．

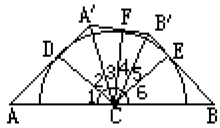
其次，证明这些对应角覆盖整个平面．

设 l 是以 O 为端点的射线，它与多边形的边及对角线均不平行．l 的平行线截多边形所得线段，端点在多边形的边上，可以平行移动使得一个端点与多边形的顶点重合，而线段的长度比原来增加．在过顶点的这些截线中又有一条最长．设它为 PQ，P 是多边形的顶点，Q 在边 AB 的内部．过 P 作 AB 所在直线 a 的平行线 b．因为 PQ 最长，所以多边形夹在 a、b 之间，从而 P 是距 a 最远的顶点 P_a，l 在 AB 的对应角内．

根据以上所述，对应角的和为 360°，而所有张角之和是它的一半，即 180°．

C1-093 设线段 AB 的长为 2l，中点为 C，以点 C 为圆心，小于 l 的任意长为半径，在 AB 上作一半圆，并从 A、B 作这半圆的切线，切点分别记为 D、E．若 DE 弧上任意一点 F 处的切线与自 A、B 所作切线分别交于 A′、B′．证明：$AA'\cdot BB'=l^2$．

【题说】1956 年武汉市赛题 5．利用相似三角形．



【证】按题意，作出图，因为 AC=BC=l，CD=CE=r（半径）．

故 Rt△ADC≌Rt△BEC，从而有∠1=∠6，∠DAC=∠EBC．

又由切线性质知，∠2=∠3，∠4=∠5，所以

$$\angle 2+\angle 5+\angle 6=90°$$

从而有 $\angle A'AC=90°-\angle 2$

$$=\angle 5+\angle 6=\angle B'CB$$

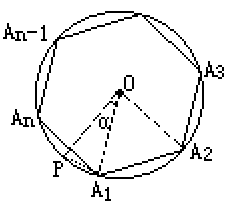
故 $\triangle A'AC\backsim\triangle CBB'$

$$\frac{A'A}{CB}=\frac{AC}{B'B}$$

即 $A'A\cdot B'B=l^2$．

C1-094 设 P 为单位圆周上的任意一点，A_1、A_2、…、A_n 为圆内接正 n 边形的顶点．求证：$PA_1^2+PA_2^2+\cdots+PA_n^2$ 是常数．

【题说】 1957 年上海市赛高三决赛题 5．



【证】如图，在△PA_1O 内，令∠POA_1=α，则由余弦定理，

$$PA_1^2=PO^2+A_1O^2-2PO\cdot A_1O\cos\alpha$$

$$=2-2\cos\alpha$$

$$PA_2^2 = 2 - 2\cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right)$$

$$PA_3^2 = 2 - 2\cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{n}\right)$$

$$\cdots\cdots$$

$$PA_n^2 = 2 - 2\cos\left[\alpha + \frac{(n-1)\cdot 2\pi}{n}\right]$$

所以 $PA_n^2 + PA_2^2 + \cdots + PA_n^2$

$$= 2n - 2\left\{\cos\alpha + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{n}\right) + \cdots\cdots + \cos\left[\alpha + \frac{(n-1)2\pi}{n}\right]\right\}$$

=2n-2S

其中 $S = \cos\alpha + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{n}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{n}\right) + \cdots\cdots + \cos\left[\alpha + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right]$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}\left[\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{n}\right) - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{n}\right) - \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{5\pi}{n}\right) - \sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{n}\right) + \cdots + \sin\alpha + \frac{(2n-1)\pi}{n} - \sin\frac{(2n-3)\pi}{n}\right]$$

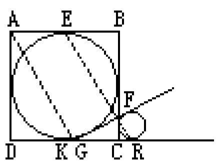
$$= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}\left[\sin\left(\alpha + \frac{(2n-1)\pi}{n}\right) - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{n}\right)\right] = 0$$

所以 $PA_1^2 + PA_2^2 + \cdots + PA_n^2 = 2n$

【别证】以 O 为原点，以 OA_1 为实轴，以 OA_1 为单位长，建立复平面，用复数方法来计算.

C1-095 假设 E 是正方形 ABCD 的边 AB 的中点，在边 BC 和 CD 上取点 F 和 G，使 AG 和 EF 平行．证明：线段 FG 和正方形 ABCD 的内切圆相切．

【题说】1960 年匈牙利数学奥林匹克题 3．题中正方形可以改为菱形．



【证】如果点 F 给定，那么点 G 由条件 AG∥EF 唯一确定．因此可改

证：如果线段 FG 和正方形的内切圆相切，那么 AG∥EF．

正方形的内切圆是△FCG 的旁切圆．我们再画出该三角形的与 CF 边相切的旁切圆．设这个圆与 DC 的延长线切于 R 点．点 F 是两个圆的内相似心，因为它是内公切线的交点．这两个圆分别与平行直线 AB、DC 相切，切点 E、R 和内相似心 F 在一直线上并在 F 的两侧．

设 K 为 CD 的中点,则它也是△FCG 的一个旁切圆与 CG 延长线的切点，易知

$$CR=\frac{CG+GF+FC}{2}=CK=AE$$

所以，四边形 AERG 是平行四边形，AG∥EF．

C1-096 在一小岛上有一架探照灯，它照在海面上的光柱长为 a（如图），并绕一垂直轴旋转．其光柱末端以速度 v 运动．证明：以最大速度 v／8 行驶的快艇，不可能在不被探照灯照到的情况下驶到海岛．

【题说】1965 年全俄数学奥林匹克八年级题 5．

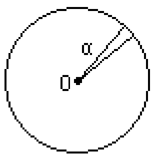


图 a

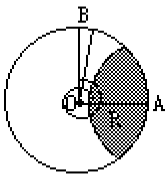


图 b

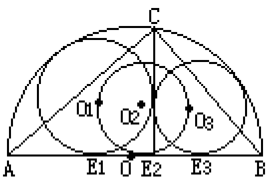
【证】假设快艇从 A 点进入探照区（以 O 为圆心、以 a 为半径的圆），

而探照灯光柱刚扫过A点，在时间$t=\frac{5\pi}{2}\cdot\frac{a}{v}$内，快艇走过路程$S=\frac{5\pi}{2}\cdot\frac{a}{v}\times\frac{v}{8}=\frac{5\pi}{16}a$（<a）．当未达到小岛O点，其活动范围不超过阴影部分 R（以 A 为圆心、S 为半径的圆与⊙O 的重叠部分）．

而在同样的时间内，探照灯光柱扫过角$\frac{5\pi}{2}a$，即$1\frac{1}{4}$圆，搜遍整个区域 R．因此，快艇一定会被探照灯照射到．

C1-097 一个半圆周 y 以线段 AB 为直径．C 是 y 上与 A、B 不同的一点．D 是 C 到 AB 的垂足．若 y_1、y_2、y_3 是以 AB 为公切线的三个圆，且 y_2 是△ABC 的内切圆，y_1、y_3 同时切 CD 和 y．求证：圆 y_1、y_2、y_3 有两条公切线．

【题说】第十一届（1969 年）国际数学奥林匹克题 4．本题由芬兰提供．



【证】令 AB=2r，∠CAB=α，则不难算出⊙O_1、⊙O_2、⊙O_3（如图）的半径为

$O_1E_1=2r\sin\alpha(1-\sin\alpha)$

$O_2E_2=r(\cos\alpha+\sin\alpha-1)$

$O_3E_3=2r\cos\alpha(1-\cos\alpha)$

以及它们与 AB 的切点距 AB 中点 O 的距离

$E_1O=r(2\sin\alpha-1)$

$E_2O=r(\cos\alpha-\sin\alpha)$

$E_3O=r(2\cos\alpha-1)$

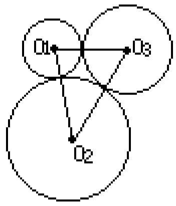
由此不难得出

$$O_2E_2\cdot E_1E_3=O_1E_1\cdot E_2E_2+O_3E_3\cdot E_1E_2$$

于是 O_1、O_2、O_3 在一直线上．由对称性，这三个圆还有另一条公切线．

C1-098 大小不等的三个圆两两外切，半径成等差数列，以各圆心为顶点的三角形，其三个内角的大小可否成等差数列？证明你的结论．

【题说】1979 年天津市赛一试题 3．



【解】如图．设三个圆的圆心分别为 O_1、O_2、O_3，半径依次为 r-d，r，r+d，于是△$O_1O_2O_3$ 的三边分别是

$O_1O_2=2r-d$，$O_1O_3=2r$，$O_2O_3=2r+d$．

若△$O_1O_2O_3$ 的三内角成等差数列，则必有一个角为 60°，并且夹这个角的两边必为 2r-d 与 2r+d．因此，由余弦定理有：

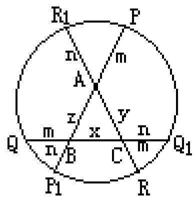
$$(2r-d)^2+(2r+d)^2-2(2r-d)\cdot(2r+d)\cos60°=(2r)^2$$

此式左端$=4r^2+3d^2$，而右端=4r2，但由题设知 $d\neq0$，故上式不能成立．

这就证明了△$O_1O_2O_3$ 的三个内角不能成等差数列．

C1-099 如图，圆中的三条弦 PP_1、QQ_1、RR_1 两两相交，交点分别为 A、B、C．已知 $AP=BQ=CR$，$AR_1=BP_1=CQ_1$．求证△ABC 是正三角形．

【题说】1979 年北京市赛一试题 3．



【证】如图，设 $AP=BQ=CR=m$，$AR_1=BP_1=CQ_1=n$，$BC=x$，$AC=y$，$AB=z$．则由相交弦定理得

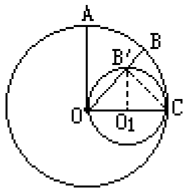
$$\begin{cases}m(n+z)=n(y+m)\\m(n+x)=n(m+z)\\m(n+y)=n(x+m)\end{cases}$$

即 $\begin{cases} mz = ny \\ mx = nz \\ my = nx \end{cases}$

三式相加得 m=n，因此 x=y=z，故△ABC 是正三角形．

C1-100　位于圆形斗兽场中心的狗看见墙那里有一只兔子．兔子沿着墙跑，狗追赶兔子，它始终保持在圆心与兔子的连线上，速率与兔子相同．证明：当兔子跑了圆周 1／4 时被狗捉住．

【题说】第十一届（1979 年）加拿大数学奥林匹克题 4．



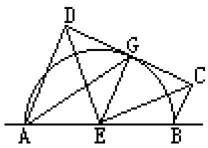
【证】如图，⊙O_1 以 OC 为直径．设兔子从 A 点向 C 点跑，则狗沿着⊙O_1弧从O点跑到B′点．可以证明$\overset{\frown}{AB}$长 = $\overset{\frown}{OB'}$长．

事实上，设∠AOB=θ，∠OO_1B'=2∠OCB′=2θ，从而$\overset{\frown}{AB}$长=OA·θ，$\overset{\frown}{OB'}$长=O_1O·2θ=OA·θ因此$\overset{\frown}{AB}$长=$\overset{\frown}{OB'}$长．

由此可知，当兔子跑到 C 点时，狗沿着⊙O_1 跑到 C 点捉住了兔子．

C1-101 设 ABCD 是凸四边形,直线 CD 是以 AB 为直径的圆的切线.证明：当且仅当 BC 与 AD 平行时，直线 AB 是以 CD 为直径的圆的切线．

【题说】第二十五届（1984 年）国际数学奥林匹克题 4．



【证】设 E、G 分别是 AB、CD 的中点．由题设知 E 到 CD 的距离$d = \frac{1}{2}AB$．我们要证的结论是：当且仅当BC∥AD时，G到AB的距离$d' = \frac{1}{2}CD$．

设 BC∥AD．这时梯形 ABCD 的中位线 EG∥AD，于是

$$S_{\triangle EGA}=S_{\triangle EGD} \qquad (1)$$

即
$$\frac{1}{2}d' \times \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}d \times \frac{1}{2}CD \qquad (2)$$

由于
$$d = \frac{1}{2}AB$$

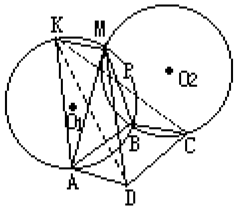
故
$$d' = \frac{1}{2}CD$$

反之，若$d' = \frac{1}{2}CD$，则由$d = \frac{1}{2}AB$，便知（2）与（1）成立，因此 AD∥EG．同理 BC∥EG，于是 AD∥BC．

C1-102 半径均为 R 的两个圆，一个过平行四边形 ABCD 的顶点 A 和

B，另一个过顶点 B 和 C．证明：如果 M 是该两圆的第二个交点，那么△AMD 的外接圆半径也是 R．

【题说】第十九届（1985 年）全苏数学奥林匹克九年级题 7．



【证】设 P 是 BM 的中点，K 是点 C 关于 P 的对称点．K 显然在⊙O_1上，且 KM$\underline{\parallel}$BC$\underline{\parallel}$AD．所以四边形 AKMD 是平行四边形，从而△AMD≌△MAK．△AMD 的外接圆半径等于⊙O_1的半径 R．

C1-103 圆 O 经过△ABC 的顶点 A 和 C，且与边 AB、BC 分别交于点 K 和 N，K 与 N 不同．△ABC 与△BKN 的外接圆相交于 B 和另一点 M．求证：∠OMB 是直角．

【题说】第二十六届（1985 年）国际数学奥林匹克题 5．本题由原苏联提供．

【证】若 AC∥KN，易知 BA=BC，M 与 B 重合．设 AC 与 KN 交于 P．易知直线 BM 也过 P．

因为　　$\angle BMN=\angle AKN=\angle NCP$

所以 M、N、C、P 四点共圆．因而

$$BM\cdot BP=BN\cdot BC=BO^2-r^2$$
$$PM\cdot PB=PN\cdot PK=PO^2-r^2$$

其中 r 为圆 O 的半径．两式相减有

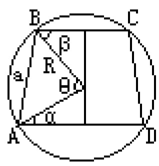
$$PO^2-BO^2=BP(PM-BM)=PM^2-BM^2$$

于是　　$PO^2-PM^2=BO^2-BM^2$

故　OM 是△OBP 之 BP 边上的高，即∠OMB 是直角．

C1-104 证明：内接于定圆的所有腰长为 a 的等腰梯形的高与中位线的长度之比为定值．

【题说】第二十二届（1988 年）全苏数学奥林匹克八年级题 5．



【证】如图，设定圆半径为 R，∠AOB=θ，∠OAD=α，∠OBC=β，则梯形的高 h 与中位线 m 有关系式

$$h=R(\sin\alpha+\sin\beta)=2R\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$m=R(\cos\alpha+\cos\beta)=2R\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

又因 α+β=θ，所以

$$\frac{h}{m}=\tan\frac{\theta}{2}$$

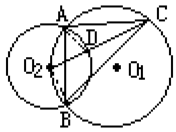
但在△OAB 中，

$$\cos\theta=\frac{2R^2-a^2}{2R^2}=1-\frac{a^2}{2R^2}$$

所以 $$\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\sqrt{\frac{a^2}{4R^2-a^2}}$$ （定值）

C1-105 如图，⊙O_1 与⊙O_2 相交于 A、B 两点，且 O_2 在⊙O_1 的圆周上．弦 O_2C 交⊙O_2 于 D．证明：D 是△ABC 的内心．

【题说】第十六届（1990 年）全俄数学奥林匹克十年级题 6．



【证】因为

$$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BO_2D=\frac{1}{2}\angle BAC$$

所以 AD 平分∠BAC．同理可证 BD 平分∠ABC，即 D 是△ABC 的内心．

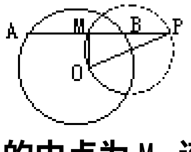
C1-106 已知内切于∠A 的两圆相交，其中一个交点为 B，C、D 分别是两圆与∠A 一边的切点．证明：直线 AB 切过点 B、C、D 的圆．

【题说】第二十四届（1990 年）全苏数学奥林匹克十一年级题 1。

【证】设直线 AB 与⊙O_2 的另一个交点为 F．⊙O_1、⊙O_2 关于点 A 位似，并且 B 的对应点为 F，所以∠CBA=∠DFA=∠CDB．于是直线 AB 切过点 B、C、D 的圆．

C1-107 在平面上，设 C 是一个圆，P 是一给定的点，过 P 作直线交 C 于 A、B 两点．证明：所有弦 AB 中点在一个圆上．

【题说】第 23 届（1991 年）加拿大数学奥林匹克题 3．

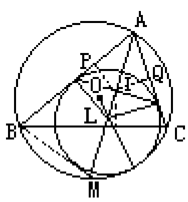


【证】设圆心为 O，弦 AB 的中点为 M，连 OM，则 OM⊥AB，即∠OMP=90°，M 在以线段 OP 为直径的圆上．

当然点 M 的轨迹只是这圆含于圆 C 中的一段圆弧，而非整个圆．

C1-108 设 I 是△ABC 的内心，过 I 作 AI 的垂线，分别交 AB、AC 于 P、Q．求证：分别与 AB 及 AC 相切于 P 及 Q 的圆 L 必与△ABC 的外接圆 O 相切．

【题说】第一届（1992 年）中国台北数学奥林匹克题 5．



【证】如图，延长 AI 交⊙O 于 M，⊙O 的半径为 R，则 L 对⊙O 的幂

为

$$R^2-LO^2=LA\cdot LM$$

所以，$LO^2=R^2-LA\cdot LM$

$=R^2-LA(IM-LI)$

$=R^2-LA\cdot IM+LA\cdot LI$

$=R^2-LA\cdot IM+LP^2$

因为 $\angle MIC=\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle C$

$$=\angle BCM+\frac{1}{2}\angle C=\angle MCI$$

所以 $MI=MC=2R\sin\frac{1}{2}\angle A=2R\frac{PL}{AL}$

从而 $LO^2=R^2-2R\cdot PL+LP^2$

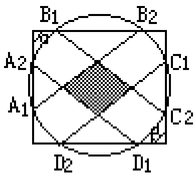
$$=(R-LP)^2$$

即 $LO=R-LP$

因此⊙L 与⊙O 相内切．

【注】本题可视为 IMO20 题 4 的推广和引申．

C1-109 在圆内有一个凸四边形，它的边的延长线交圆周于 A_1，A_2，B_1，B_2，C_1，C_2，D_1 和 D_2（如图）．



试证：如果 $A_1B_2=B_1C_2=C_1D_2=D_1A_2$，则由直线 A_1A_2，B_1B_2，C_1C_2 和 D_1D_2 所围成的四边形一定存在外接圆．

【题说】第十九届（1993 年）全俄数学奥林匹克九年级二试题 6．

【证】设直线 A_1A_2，B_1B_2，C_1C_2，D_1D_2 构成的四边形中，两个对角分别等于α和β（如图）．因为

$$A_1B_2=B_1C_2=C_1D_2=D_1A_2$$

所以弧 $\overset{\frown}{A_1D_1B_2}$，$\overset{\frown}{B_1A_1C_2}$，$\overset{\frown}{C_1B_1D_2}$ 和 $\overset{\frown}{D_1C_1A_2}$ 相等．于是，

$$2\alpha\overset{m}{=}\overset{\frown}{A_1D_1B_2}-\overset{\frown}{A_2B_1}=\overset{\frown}{B_1A_1C_2}-\overset{\frown}{A_2B_1}=\overset{\frown}{A_2A_1C_2}$$

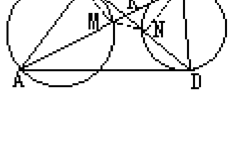
$$2\beta\overset{m}{=}\overset{\frown}{C_1B_1D_2}-\overset{\frown}{C_2D_1}=\overset{\frown}{D_1C_1A_2}-\overset{\frown}{C_2D_1}=\overset{\frown}{C_2C_1A_2}$$

相加得 $2\alpha+2\beta=2\pi$

从而 $\alpha+\beta=\pi$，结论成立．

C1-110 梯形 ABCD 的两条对角线相交于点 K．分别以梯形的两腰为直径各作一圆．点 K 位于这两个圆之外．证明：由点 K 向这两个圆所作的切线长度相等．

【题说】第五十八届（1995 年）莫斯科数学奥林匹克十年级题 15．



【证】设梯形的两腰为 AB 与 CD（见图），并设直线 AC 与 BD 同相应二圆的第二个交点分别为 M 与 N．

由于∠AMB 是半圆上的圆周角，所以

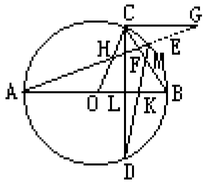
∠BMC=∠AMB=90°

同理∠BNC=90°．

从而 B、M、N、C 四点共圆．故∠MNK=∠ACB=∠KAD．于是 M、N、D、A 四点共圆，KM·KA=KN·KD，即 K 向两个已知圆所引的切线相等．

C1-111 弦 CD 垂直于圆 O 的直径 AB，L 为垂足．弦 AE 平分半径 OC 于 H．证明：弦 DE 平分弦 BC．

【题说】第二十一届（1995 年）全俄数学奥林匹克九年级题 2．



【证】如图，设 AE 与 BC 相交于 F 点，DE 交直径 AB 于 K 点，BC 交 DE 于 M．

注意到$\overset{\frown}{AC}$与$\overset{\frown}{AD}$关于直线AB为对称，因此，它们的度数相等．所以∠AED=∠ABC，因此，点 F、K、B 和 E 四点共圆．于是∠FKB=180°-∠FEB=90°，所以 FK∥CD．

作 CG∥AB 交 AF 的延长线于 G 点．

由△AOH≌△GCH 得 CG=AO=AB／2．又由△AFB∽△GFC，得

$$\frac{CF}{FB}=\frac{CG}{AB}=\frac{1}{2}$$

所以　BF=2CF．

再由△BLC∽△BKF，得

$$\frac{FK}{CL}=\frac{BF}{BC}=\frac{2}{3}$$

因为 $CL=\frac{1}{2}CD$，所以$\frac{FK}{CD}=\frac{1}{3}$．

由△MKF∽△MDC，得

$$\frac{MF}{MC}=\frac{FK}{CD}=\frac{1}{3}$$

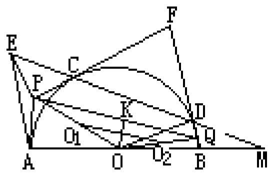
即 MC=3MF，CF=2MF．又因为 BF=2CF，所以

MB=BF-MF=2CF-MF

=4MF-MF=3MF=MC

C1-112 已知 AB 是半圆 O 的直径，一直线交半圆于 C、D，交 AB 于 M（MB＜MA，MD＜MC），设 K 是△AOC 和△DOB 外接圆的第二个交点．证明：∠MKO 是直角．

【题说】　第二十一届（1995 年）全俄数学奥林匹克十年级题 6．



【证】 设△AOC 的外接圆圆心为 O_1，OP 为直径；△DOB 的外接圆圆心为 O_2，OQ 为直径（如图）．连心线 O_1O_2 垂直平分公弦 OK 且 O_1O_2 是△OPQ 的中位线，所以直线 PQ 通过 K 点且垂直于 OK．

线段 PO 是过 A 点的圆 O_1 的直径，所以∠PAO 是直角，因此线段 PA 与半圆 O 相切，同理 PC、QB、QD 都与半圆 O 相切．

设 F 点是直线 PC 与 QD 的交点．过 P 引 PE∥QD 交 DC 的延长线于 E 点，则∠QDM=∠PEM．由 FC=FD 得∠QDM=∠FDC=∠FCD=∠PCE，所以 PC=PE，又 PC=PA，QB=QD．△PAE 与△QBD 都是等腰三角形，且边 PA∥QB，PE∥QD，所以∠PAE=（180°-∠APE）／2=（180°-∠BQD）／2=∠QBD，AE∥BD．于是以 M 为位似中心，位似比为 MA∶MB 的位似变换将点 B 变为点 A，点 D 变为点 E，又因为△PAE∽△QBD，所以点 Q 位似变换为点 P，这就是说 PQ 过 M 点，从而∠MKO=90°．

C1-113 在△ABC 的三边 AB、BC 与 CA 上分别取点 M、K、L（不与△ABC 的顶点重合），证明：△MAL、△KBM、△LCK 中至少有一个的面积不大于△ABC 面积的四分之一．

【题说】第八届（1966 年）国际数学奥林匹克题 6．本题由波兰提供．

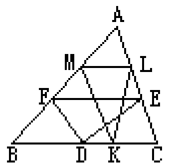


图 a

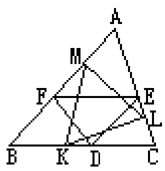


图 b

【证】因为

$$\frac{S_{\triangle KBM}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{BK\cdot BM}{AB\cdot BC}$$

$$\frac{S_{\triangle MAL}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AM\cdot AL}{AB\cdot AC}$$

$$\frac{S_{\triangle LCK}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{CL\cdot CK}{AC\cdot BC}$$

所以

$$\frac{S\triangle KBM}{S\triangle ABC}\frac{S\triangle MAL}{S\triangle ABC}\frac{S\triangle LCK}{S\triangle ABC}$$

$$=\left(\frac{BK}{BC}\cdot\frac{CK}{BC}\right)\left(\frac{AM}{AB}\cdot\frac{BM}{AB}\right)\left(\frac{AL}{AC}\cdot\frac{CL}{AC}\right)$$

$$\leq\left(\frac{BK+CK}{2BC}\right)^2\left(\frac{AM+BM}{2AB}\right)^2\cdot\left(\frac{AL+CL}{2AC}\right)^2$$

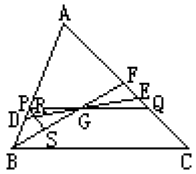
$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$$

从而$S_{\triangle KBM}\le\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$，$S_{\triangle MAL}\le\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$，$S_{\triangle LCK}\le\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$

到少有一个成立.

C1-114 过三角形的重心任作一直线，把这三角形分成两部分．证明：这两部分面积之差不大于整个三角形面积的1／9．

【题说】1978年安徽省赛二试题3．



【证】设直线过△ABC的重心G，分别交AB、AC于D、E．

过G作BC的平行线，分别交AB、AC于P、Q．由于G是重心，所以PG=GQ．

设E在线段AQ上,则D在线段AP延长线上.设AC上的中线为BF.过P作AC的平行线，分别交DE、BF于R、S．

易知RG=GE，SG=GF，所以

$$S_{\triangle PDG}>S_{\triangle PRG}=S_{\triangle QEG} \quad (1)$$

$$S_{\triangle DBG}>S_{\triangle RSG}=S_{\triangle EFG} \quad (2)$$

由（1）得 $S_{\triangle ADE}>S_{\triangle APQ}=\frac{4}{9}S_{\triangle ABC}$ （3）

由（2）得 $S_{BDEC}>S_{\triangle BFC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$ （4）

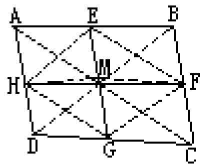
由（3）、（4）得

$$0<S_{BDEC}-S_{\triangle ADE}<\frac{1}{9}S_{\triangle ABC}$$

C1-115 设ABCD为任意给定的四边形，边AB、BC、CD、DA的中点分别为E、F、G、H．证明：

四边形ABCD面积$\le EG\cdot HF\le\frac{1}{2}(AB+CD)\times\frac{1}{2}(AD+BC)$

【题说】1978年全国联赛二试题4．



【证】如图，HE∥DB∥GF，同理EF∥HG，故EFGH为平行四边形．易证

$$面积EFGH=\frac{1}{2}面积ABCD$$

$$面积EFGH\le\frac{1}{2}EG\cdot HF$$

所以　　面积ABCD≤EG·HF

设M为BD的中点，则

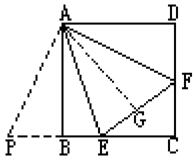
$$\frac{1}{2}(AB+CD)=HM+MF\geq HF$$

同理 $\frac{1}{2}(AD+BC)\geq EG$

故 $EG\cdot HF\leq\frac{1}{2}(AB+CD)\times\frac{1}{2}(AD+BC)$

C1-116 正方形ABCD的一个内接三角形是EAF，如果∠EAF=45°，求证：正方形ABCD的面积与三角形EAF的面积之比等于AB与EF之比的2倍．

【题说】 1979年上海市赛预赛题6．



【证】 引△EAF底边上的高AG．延长CB至P，使BP=DF，连AP，则Rt△ABP≌Rt△ADF．所以∠DAF=∠BAP，AP=AF．

又 ∠DAF+∠EAB=45°

所以 ∠BAP+∠EAB=∠EAP=45°=∠EAE

△EAP≌△EAF

而全等三角形的对应高相等，所以AG=AB，从而

$$\frac{S_{\square ABCD}}{S_{\triangle EAF}}=\frac{AB^2}{\frac{AG\cdot EF}{2}}=\frac{2AB}{EF}$$

C1-117 已知正六边形ABCDEF，点M和K分别为CD和DE的中点，L为线段AM和BK的交点．试证：三角形ABL的面积等于四边形MDKL的面积，并求直线AM和BK之间的夹角．

【题说】 第六届（1980年）全俄数学奥林匹克八年级题3．

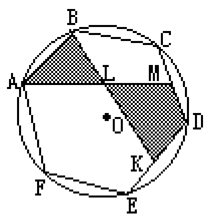


图 a

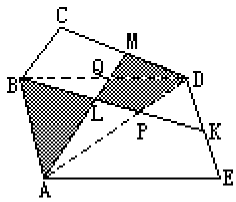


图 b

【证】 显见

$$S_{ABL}+S_{BCML}=S_{ABCM}$$

$$S_{BCML}+S_{MDKL}=S_{BCDK}$$

将四边形ABCM绕正六边形中心O按顺时针方向旋转60°（如图a）后，成为四边形BCDK，所以∠ALB=60°，$S_{ABCM}=S_{BCDK}$，从而$S_{ABL}=S_{MDKL}$．

【注】更一般地，我们有：

如果凸五边形ABCDE中，BC∥AD，BD∥AE（图b），M为CD边的中点，K为DE边的中点，L为线段AM与BK的交点．那么三角形ABL和四边形MDKL等积．

【别证】如图b，设AD和BK交于P，BD和AM交于Q．由于BC∥AD，

BD∥AE，M、K 分别为 CD 和 DE 的中点，所以

$$S_{ABD}=S_{ABC}=2S_{AMD}$$

即 $S_{ABL}+S_{ALP}+S_{BQL}+S_{PLQD}=2(S_{ALP}+S_{PLQD}+S_{MDQ})$

整理得 $S_{ABL}+S_{BQL}=S_{ALP}+S_{PLQD}+2S_{MDQ}$ (1)

又 $S_{ABD}=2S_{BDK}$

即 $S_{ABL}+S_{ALP}+S_{BQL}+S_{PLQD}=2(S_{BQL}+S_{PLQD}+S_{DKP})$

整理得 $S_{ABL}+S_{APL}=S_{BQL}+S_{PLQD}+2_{SDKP}$ (2)

(1)+(2)，并消去等式两边相同的项，得

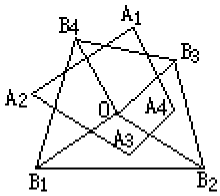
$$2S_{ABL}=2(S_{MDQ}+S_{DKP}+S_{PLKD})$$

即 $2S_{ABL}=2S_{MDKL}$

所以 $S_{ABL}=S_{MDKL}$

C1-118 图中 OB_i 平行且等于 A_iA_{i+1}，i=1，2，3，4，($A_5=A_1$)．证明：$B_1B_2B_3B_4$ 的面积是 $A_1A_2A_3A_4$ 的 2 倍．

【题说】第十四届（1982 年）加拿大数学奥林匹克题 1．



【证】因为 $A_1A_2 \mathrel{\underline{\parallel}} OB_1$

$A_2A_3 \mathrel{\underline{\parallel}} OB_2$

所以 $\angle A_1A_2A_3+\angle B_1OB_2=\pi$

$\sin\angle A_1A_2A_3=\sin\angle B_1OB_2$

因此 $S_{\triangle OB_1B_2}=\frac{1}{2}OB_1\cdot OB_2\sin\angle B_1OB_2$

$=\frac{1}{2}A_1A_2\cdot A_2A_3\cdot\sin\angle A_1A_2A_3$

$=S_{\triangle A_1A_2A_3}$

同理 $S_{\triangle OB_2B_3}=S_{\triangle A_2A_3A_4}$，$S_{\triangle OB_3B_4}=S_{\triangle A_3A_4A_1}$

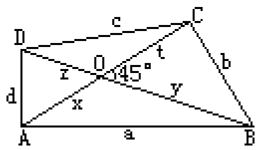
$S_{\triangle OB_4B_1}=S_{\triangle A_4A_1A_2}$

所以 $S_{B_1B_2B_3B_4}=2S_{A_1A_2A_3A_4}$

C1-119 已知凸凹边形四边长分别为 a、b、c、d，对角线相交所成锐角为 45°（如图）．若 S 为四边形的面积．求证：

$$S=\frac{a^2-b^2+c^2-d^2}{4}$$

【题说】 1984 年北京市赛高一题 2．



【证】设凸四边形ABCD中，

AB=a，BC=b，CD=c，DA=d．对角线AC与BD相交于O点，OA=x，OB=y，OC=t，OD=z，∠BOC=45°．

由余弦定理，

$$a^2=x^2+y^2+2xy\cos45° \qquad (1)$$
$$b^2=y^2+t^2-2yt\cos45° \qquad (2)$$
$$c^2=t^2+z^2+2tz\cos45° \qquad (3)$$
$$d^2=z^2+x^2-2zx\cos45° \qquad (4)$$

（1）-（2）+（3）-（4）得 $a^2-b^2+c^2-d^2=2(xy+yt+tz+zx)\cos45°$

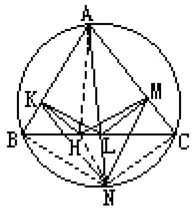
所以 $S=\frac{1}{2}(x+t)(y+z)\sin45°$

$$=\frac{1}{2}(xy+yt+tz+zx)\cos45°$$

$$=\frac{a^2-b^2+c^2-d^2}{4}$$

C1-120 设锐角△ABC的∠A平分线交BC于L，交外接圆于N，自点L分别向AB和AC作垂线LK和LM，垂足分别为K和M．求证：△ABC的面积等于四边形AKNM的面积．

【题说】第二十八届（1987年）国际数学奥林匹克题 2．本题由原苏联提供．



【证】作△ABC的高AH，则A、K、H、L、M五点共圆．连结KH、HM、HN、BN和NC，便有

$$\angle KHB=\angle BAL=\angle NAC=\angle HBN$$
$$\angle MHC=\angle MAN=\angle NAB=\angle NCH$$

故知 KH∥BN，HM∥NC．从而有

$$S_{\triangle KBH}=S_{\triangle KNH}，S_{\triangle HMC}=S_{\triangle HMN}$$

由此即得 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AKNM}$

易知△ABL∽△ANC，所以

$$\frac{AB}{AL}=\frac{AN}{AC}\Leftrightarrow AB\cdot AC=AN\cdot AL$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\times AC\sin A$$

$$=\frac{1}{2}AL\times AN\sin A$$

$$\frac{1}{2}\sin20°=S_{\triangle}<S_{扇形}=\pi/18<7/40$$

即 $\sin20°<7/20$

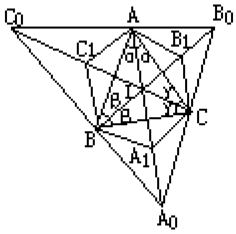
C1-121 锐角三角形ABC中，A角的平分线交三角形的外接圆于另一

点 A_1，点 B_1、C_1 与此类似．直线 AA_1 与 B、C 两角的外角平分线相交于 A_0．点 B_0，C_0 与此类似．求证：

（1）三角形 $A_0B_0C_0$ 的面积是六边形 $AC_1BA_1CB_1$ 面积的二倍；

（2）三角形 $A_0B_0C_0$ 的面积至少是三角形 ABC 面积的四倍．

【题说】第三十届（1989 年）国际数学奥林匹克题 2．本题由澳大利亚提供．



【证】设 I 为△ABC 的内心，则 I 为 AA_0、BB_0、CC_0 的交点，如图．

$$\angle BIA_1=\alpha+\beta$$

$$\angle A_1BI=\beta+\angle A1BC$$

$$=\beta+\alpha$$

所以 $A_1B=A_1I$

易知 $BB_1\perp BA_0$

故 $\angle A_1BA_0=90°-\angle A_1BI$

$$=90°-\angle BIA_1$$

$$=\angle A_1A_0B$$

$$A_1A_0=A_1B=A_1I$$

于是 $S_{\triangle A_0BI}=2S_{\triangle A_1BI}$

类似地，可得其他五个等式，将六个等式相加，便得

$$S_{\triangle A_0B_0C_0}=2S_{AC_1BA_1CB_1} \qquad (1)$$

由于 A_1、C_1 分别是 A_0I、C_0I 中点，故 A_1C_1 是△IA_0C_0 的中位线，因此它平分 IB，从而

$$S_{\triangle IA_1C_1}=S_{\triangle BA_1C_1}$$

类似地可得其他二等式．三式相加，便得

$$S_{\triangle A_1B_1C_1}=S_{\triangle BA_1C_1}+S_{\triangle AC_1B_1}+S_{\triangle CB_1A_1}=\frac{1}{2}S_{AC_1BA_1CB_1} \qquad (2)$$

易知 $S_{\triangle ABC}=2R^2\sin A\sin B\sin C$（R 为外接圆半径）

$$=2R^2\sin2\alpha\sin2\beta\sin2\gamma$$

$$S_{\triangle A_1B_1C_1}=2R^2\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)\sin(\gamma+\alpha)$$

$$=2R^2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)(\sin\beta\cos\gamma+\cos\beta\sin\gamma)(\sin\gamma\cos\alpha+\cos\gamma\sin\alpha)$$

$$\geq 2^4R^2\sqrt{\sin^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\gamma\sin^2\gamma}$$

$$=2R^2\cdot 2^3\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta\sin\gamma\cos\gamma$$

$$=2R^2\sin2\alpha\sin2\beta\sin2\gamma=S_{\triangle ABC} \qquad (3)$$

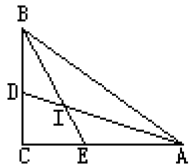
由（1）、（2）、（3）即得

$$S_{\triangle A_0B_0C_0} \geq 4S_{\triangle ABC}$$

C1-122 在直角三角形 ABC（∠C=90°）中，设∠A 和∠B 的内角平分线交于 I 点，分别交对边于 D 和 E 点．

证明：四边形 ABDE 的面积是三角形 AIB 面积的两倍．

【题说】 伊朗第十届数学奥林匹克第二阶段题 1．



【证】 设 a 和 b 是两条直角边长，c 是斜边长．

由于BE平分∠ABC，所以$AE=\frac{bc}{a+c}$．由于AI平分∠BAC，所以

$$\frac{IE}{BI}=\frac{AE}{AB}=\frac{b}{a+c}$$

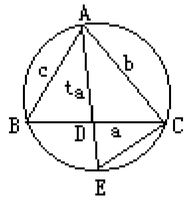
设△AIB的面积为1，则△AIE的面积为$\frac{b}{a+c}$．同理△BID的面积为$\frac{a}{b+c}$，△DIE的面积为$\frac{b}{a+c}\times\frac{a}{b+c}$．

因为
$$\frac{b}{a+c}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}\times\frac{a}{b+c}$$
$$=\frac{1}{(a+c)(b+c)}(b^2+bc+a^2+ac+ab)$$
$$=\frac{1}{(a+c)(b+c)}(bc+ac+ab+c^2)$$
$$=1$$

所以四边形 ABDE 的面积是 2，即△AIB 的面积的两倍．

C1-123 证明：任何三角形三个内角的平分线的连乘积必小于三边的连乘积．

【题说】1957 年上海市高三复赛题 6．



【证】令 a、b、c 为三角形 ABC 的三边，t_a、t_b、t_c 为三内角的平分线．作△ABC 的外接圆交∠A 的平分线 AD 的延长线于 E，则

△EAC∽△BAD

AB∶AE=AD∶AC

AB·AC=AE·AD

即 $b\cdot c=t_a(t_a+DE)$

所以 $bc>t_a^2$

同理 $ca>t_b^2$，$ab>t_c^2$

所以 $abc>t_at_bt_c$

C1-124 证明：外切于已知圆的所有四边形中，正方形的周长最短．

【题说】 1957年～1958年波兰数学奥林匹克三试题6．本题可推广为已知圆的有相同边数的外切多边形中，以正多边形周长最短．

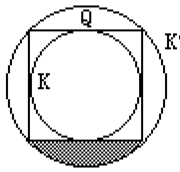


图 a

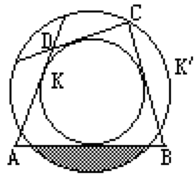


图 b

【证】 由于外切于已知圆的多边形的面积与其周长成正比，因此本题即外切于已知圆的四边形中，正方形的面积最小．

设Q是已知圆K的外切正方形，四边形ABCD是这个圆的任意外切四边形，但不是正方形．圆K'是正方形Q的外接圆（为清晰起见，画了两个图）．显然

四边形ABCD至少有一个角为钝角，其顶点落在圆环内．正方形Q的各边与圆K'组成四个相等弓形．设S为每个弓形面积，则

$$S_Q=S_{K'}-4S$$

直线AB，BC，CD，DA也从圆K'中截出四个面积为S的弓形，其中至少有两个弓形有重叠部分，所以

$$S_{\triangle ABCD}>S_{K'}-4S$$

从而 $$S_{ABCD}>S_Q$$

C1-125 已知a、b、c是三角形的三条边长，S是上述三角形的面积．求证：$a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S$．在什么条件下等号成立？

【题说】 第三届（1961年）国际数学奥林匹克题2．本题由波兰提供．

【证】

$$a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}S$$
$$=a^2+b^2+a^2+b^2-2abcosC-2\sqrt{3}absinC$$
$$=2（a2+b2-2absin（C+30°））$$
$$\geq 2（a2+b2-2ab）=2（a-b）2\geq 0$$

所以$a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S$．等号在且仅在正三角形时成立．

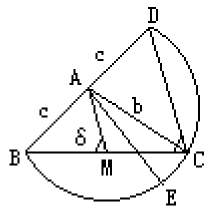
C1-126 求作一个三角形ABC，使AC=b，AB=C和∠AMB=δ，其中M是线段BC的中点，且δ＜90°．

证明：上述题目当且仅当

$$b\cdot tg\frac{\delta}{2}\leq c<b$$

时有解．在什么情况下等号成立？

【题说】 第三届（1961年）国际数学奥林匹克题5．本题由捷克斯洛伐克提供．



【解】 作线段 BD=2c，以 BD 为底，作含角为 δ 的弓形弧，以 BD 中点 A 为心，b 为半径画弧，两弧相交于 C，则△ABC 即为所求（证明从略）.

过 A 作 BD 的垂线，交弓形弧于 E，则

$$AE=\frac{c}{tg\delta/2}$$

显然当且仅当$\frac{c}{tg\delta/2}\geq b>c$时，两弧有公共点，即$b>c\geq btg\delta/2$时有解.

同时，当且仅当∠BAC=90°（C 与 E 重合）时，等号成立.

C1-127 证明：如果三角形不是钝角三角形，那么它的三条中线之和不小于外接圆半径的四倍.

【题说】 1963 年匈牙利数学奥林匹克题 3.

【证】 因为△ABC 不是钝角三角形，所以它的外心 O 在三角形内. 设重心为 G，则 O 属于△GAB，△GBC，△GCA 中的一个，例如△GAB（图 a）. 这时

$$GA+GB\geq OA+OB$$

即

$$m_a+m_b\geq 3R$$

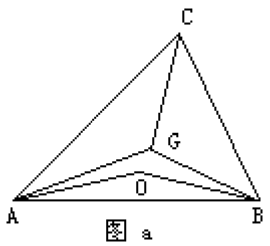


图 a

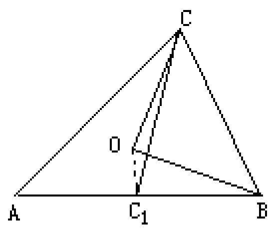


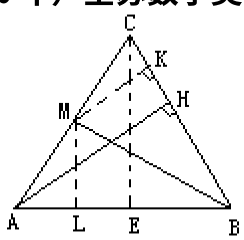
图 b

如果点 O 和边 AB 的中点 C_1 重合，那么 m_c=R. 如果点 O 和 C_1 不重合，那么$\angle C_1OC=\angle C_1OB+\angle BOC=\angle ACB+2\angle A=\pi+\angle A-\angle B>\frac{\pi}{2}$，所以$m_c=CC_1>OC=R$. 从而

$$m_a+m_b+m_c>4R$$

C1－128 在锐角△ABC 中，最大的高 AH 等于中线 BM. 证明：∠ABC 不大于 60°.

【题说】 第一届（196 年）全苏数学奥林匹克八年级题 1.



【证】 自 M 分别引 MK⊥BC 于 K，ML⊥BA 于 L，则

$$MK=\frac{1}{2}AH=\frac{1}{2}BM$$

所以 $\angle MBK=30°$

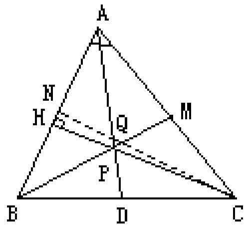
$$ML=\frac{1}{2}CE<\frac{1}{2}AH=\frac{1}{2}BM$$

所以 ∠MBL＜30°

由此 ∠B=∠MBK+∠MBL＜60°

C1-129 已知锐角三角形 ABC 的角平分线 AD、中线 BM 和高 CH 交于一点 P．证明：∠BAC＞45°．

【题说】 第四届（197 年）全苏数学奥林匹克九年级题 2．



【证】 假设∠BAC≤45°，那么由于∠ACB＜90°，

所以

∠CBA＞45°

于是 BC＜AC，BH＜AH．

作 AB 边上中线 CN，则 CN 在△CAH 内，因而 CN 交 PM 于点 Q，并有

NQ：CQ=1：2

但是

$$\frac{HP}{CP}<\frac{NQ}{CQ}$$

从而

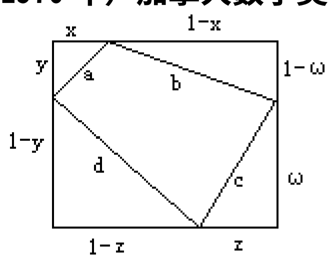
$$\frac{AH}{AC}=\frac{HP}{CP}<\frac{1}{2}$$

这说明在 Rt△ACH 中，∠BAC＞60°．与假设矛盾．因此，∠BAC＞45°．

C1-130 一个四边形的各顶点在边为 1 的正方形各边上．证明：该四边形的边长 a、b、c、d 满足不等式

$$2\le a^2+b^2+c^2+d^2\le 4$$

【题说】 第二届（1970 年）加拿大数学奥林匹克题 5．



【证】 如图所设，有

$a^2+b^2+c^2+d^2=x^2+y^2+(1-x)^2+(1-ω)^2+ω^2+z^2+(1-z)^2+(1-y)^2=x^2+(1-x)^2+y^2+(1-y)^2+z^2+(1-z)^2+ω^2+(1-ω)^2$

但因 $0\le x\le 1$，所以 $\frac{1}{2}\le x^2+(1-x)^2\le 1$．对 y、z、ω 有同样结果，

因此，所证不等式成立．

C1-131

设点O位于直线g上；$\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$，…，$\overrightarrow{OP_n}$都是单位向量，点P_1，P_2，…P_n全都位于通过g的一个平面上且在g的一侧．证明：如果n是奇数，则

$$\left|\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\cdots+\overrightarrow{OP_n}\right|\geqslant 1$$

这里$\left|\overrightarrow{OM}\right|$表示向量$\overrightarrow{OM}$的长度．

【题说】 第十五届（1973年）国际数学奥林匹克题1．本题由捷克斯洛伐克提供．

【证】在直线g上取不同于O的一点A,将n个向量按它们与$\overrightarrow{OA}$的夹角大小重新编号（即改变角标使$\angle AOP_i\leq\angle AOP_{i+1}$）．

令$n=2m+1$，取OP_{m+1}为X轴建立直角坐标系．

令 $$\overrightarrow{OQ_i}=\overrightarrow{OP_i}+\overrightarrow{OP_{2m+1-i}}$$

由于 $$\angle P_iOP_{2m+1-i}\leq\pi$$

$$\angle Q_iOP_i=\angle QiOP_{2m+1-i}=\frac{1}{2}\angle P_iOP_{2m+1-i}\leq\frac{\pi}{2}$$

于是 $$\angle Q_iOP_{m+1}\leq\angle Q_iOP_i\text{或}\angle Q_iOP_{2m+1-i}\leq\frac{\pi}{2}$$

因而Q_i的横坐标非负，这样

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OP_i}=\overrightarrow{OP_{m+1}}+\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OQ_i}$$

在X轴上的投影不小于1，它的长度当然不小于1．

C1-132 设a、b、c为任意三角形三边长，

$$l=a+b+c，S=ab+bc+ac$$

证明：$3S\leq l^2<4S$

【题说】 1978年天津市赛题 6．

【证】 因为 $a^2+b^2+c^2$

$$=\frac{1}{2}\left((a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)\right)$$

$$\geq ab+bc+ca=S$$

所以 $$l^2=(a+b+c)^2$$

$$=2S+a^2+b^2+c^2\geq 3S.$$

另一方面，由于$a<b+c$，所以

$$a^2<ab+ca$$

同样 $$b^2<bc+ab$$

$$c^2<ca+bc$$

三式相加得 $$a^2+b^2+c^2<2S$$

所以 $$l^2<4S$$

C1－133 有大小两个矩形纸片ABCD和A'B'C'D'固定叠合如图，其中AB=a，AD=b，AB'=λa，AD'=μb．设P、Q是小矩形纸片上的任意两点，

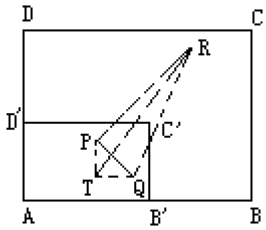
R 是大矩形纸片上任意一点．证明：

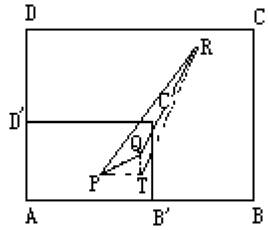
$$\triangle PQR\text{的面积} \le \frac{1}{2}ab(\lambda + \mu - \lambda\mu)$$

并论证 P、Q、R 在什么位置时，等式成立．

【题说】 1979 年安徽省赛二试题 5．

【证】 以 PQ 为斜边，在△PQR 外侧作直角三角形 PQT，便两直角边分别平行于矩形 ABCD 的两邻边．





（1）如果 RT 与 PQ 相交，如图 a，则

$$S_{\triangle PQR} = S_{\triangle TPR} + S_{\triangle TQR} - S_{\triangle PQT}$$

记 TP=ε，TQ=δ，则有

$$2S_{\triangle PQR} \le \varepsilon a + \delta b - \varepsilon\delta = ab - (a-\delta)(b-\varepsilon)$$

$$\le ab - (a-\lambda a)(b-\mu b) = ab(\lambda + \mu - \lambda\mu)$$

故 $S_{\triangle PQR} \le \frac{1}{2}ab(\lambda + \mu - \lambda\mu)$．

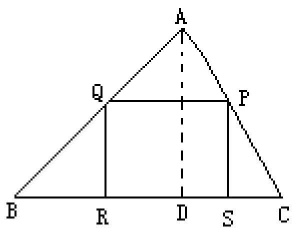
（2）如果 RT 与 PQ 不相交（如图 b），则有

$$S_{\triangle PQR} \le S_{\triangle PTR} \le \lambda ab < \frac{1}{2}ab(\lambda + \mu - \lambda\mu)$$

由（1）可知，当且仅当 P、Q 取在 D'、'点， R 取在 C 点时，等式成立．

C1-134 已知锐角三角形 ABC 的三边 a、b、c 满足不等式 a＞b＞c．问四个顶点都在三角形边上的三个正方形中，哪个面积最大？证明你的结论．

【题说】 1979 年全国联赛一试题 10．



【解】 如图，设各边上的高分别为 h_a、h_b、h_c，在 BC、AC、AB 上所作正方形的边长各为 l、m、n．则

$$\frac{h_a - l}{h_a} = \frac{l}{a}$$

$$l = ah_a/(a + h_a)$$

同理

$$m = bh_b/(b + h_b)$$

$$n = ch_c/(c + h_c)$$

由于 $ah_a = bh_b$，依分比定理，有

$$1<\frac{a}{b}=\frac{h_b}{h_a}=\frac{a-h_b}{b-h_a}$$

所以　　　　　　　　$a-h_b>b-h_a$ 即 $a+h_a>b+h_b$

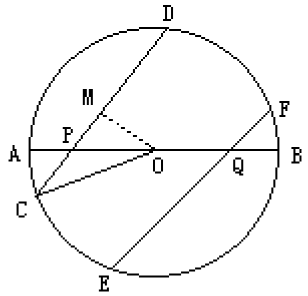
同理　　　　　　　　$b+h_b>c+h_c$

故　$l<m<n$．即锐角三角形最小边上的内接正方形面积最大．

C1-135　在圆 O 内，弦 CD 平行于弦 EF，且与直径 AB 交成 45°角，若 CD 与 EF 分别交直径 AB 于 P 和 Q，且圆 O 的半径长为 1．求证：

$$PC\cdot QE+PD\cdot QF<2$$

【题说】　1981 年全国联赛题 3．



【证】　如图，过 O 作 OM⊥CD 于 M，则

$$PC^2+PD^2=(CM-PM)^2+(CM+PM)^2$$
$$=2(CM^2+PM^2)$$
$$=2(CM^2+OM^2)=2OC^2=2$$

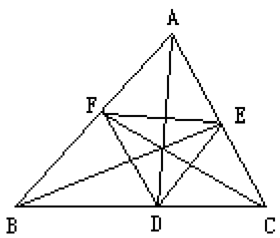
同理　$QE^2+QF^2=2$，所以

$$PC\cdot QE+PD\cdot QF\leq\frac{1}{2}(PC^2+QE^2+PD^2+QF^2)$$
$$=2$$

又因　$PC\neq QE$，故上式中等号不能成立．

C1－136　在△ABC 中，AD、BE、CF 为角平分线，分别交 BC 边于 D，交 AC 边于 E，交 AB 边于 F．试证明：$4S_{\triangle DEF}\leq S_{\triangle ABC}$，并说明等号何时成立．

【题说】　1982 年芜湖市赛题 6．



【证】　由题意，只需证明

$$S_{\triangle AEF}+S_{\triangle FBD}+S_{\triangle DCE}\geq\frac{3}{4}S_{\triangle ABC}\qquad(1)$$

因为 $\frac{AF}{FB}=\frac{AC}{BC}$

所以 $\frac{AF}{AB}=\frac{b}{a+b}$

同理 $\frac{AE}{AC}=\frac{c}{a+c}$

所以 $\frac{S_{\Delta AFE}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{AF\cdot AE}{AB\cdot AC}$

$$=\frac{bc}{(a+b)(a+c)}$$

同理 $\frac{S\Delta FBD}{S\Delta ABC}=\frac{ac}{(a+b)(b+c)},\frac{S\Delta DCE}{S\Delta ABC}=\frac{ab}{(a+c)(c+b)}$

代入（1）即得

$$\frac{bc(b+c)+ac(a+c)+ab(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq\frac{3}{4} \qquad (2)$$

由 $b^2c+a^2c\geq 2abc$，得

$$b^2c+bc^2+a^2c+ac^2+a^2b+ab^2\geq 6abc$$

所以 $4(b^2c+bc^2+a^2c+ac^2+a^2b+ab^2)$

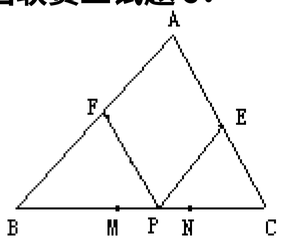
$\geq 3(abc+b^2c+bc^2+a^2c+a^2b+ab^2+abc)$

$=3(a+b)(b+c)(c+a)$

从而（2）成立，即 $4S_{\triangle DEF}\leq S_{\triangle ABC}$，当且仅当△ABC为正三角形时等号成立.

C1-137 如图，在△ABC中，P为边BC上任意一点，PE∥BA，PF∥CA．若 $S_{\triangle ABC}=1$，证明：$S_{\triangle BPE}$、$S_{\triangle PCE}$ 和 $S_{\square PEAF}$ 中至少有一个不小于4／9．

【题说】 1984年全国联赛二试题3．



【证】 把BC等分为三等分，M、N是分点，显然，P点落在BM或NC上时

$$S_{\triangle PCE}\text{或}S_{\triangle PBF}\geq\frac{4}{9}.$$

故只需考虑P点落在MN内的情况，此时，设 $BP:BC=r$（$\frac{1}{3}<r<\frac{2}{3}$），则

$AE:AC=r$，　$AF:AB=1-r$

$S_{\triangle AEF}:S_{\triangle ABC}=(AF/AB)(AE/AC)$

$$= r(1-r) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - r\right)^2$$

$$> \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

所以

$$S_{\square AEPF} = 2S_{\triangle AEF} > \frac{4}{9}$$

C1-138 设 P 是一正 n 边形的内点，证明：该 n 边形存在两个顶点 A 和 B，使

$$\left(1-\frac{2}{n}\right)180° \leq \angle APB < 180°$$

【题说】 1985 年匈牙利阿拉尼·丹尼尔数学竞赛（15 年龄组）题 1．

【解】 设点 A 是正 n 边形的顶点中距 P 最近的一个顶点．从 A 出发向某两个相邻顶点 B_1、B_2 作连线，并使 P 在△AB_1B_2 内，显然，$\angle B_1AB_2=180°/n$．根据顶点 A 的选取，$\angle PB_1A$ 和 $\angle PB_2A$ 都小于 $\angle B_1AB_2$，因此，如果 P 是△AB_1B_2 的一个内点，则至少有一个 B_i，使得

$$\left(1-\frac{2}{n}\right)180° < \angle APB_i < 180° \qquad (i=1，2)$$

如果 P 在线段 AB_i 上，例如在 AB_1 上，那么由 $\angle PB_2A \leq \angle PAB_2$ 可以推出

$$\left(1-\frac{2}{n}\right)180° \leq \angle APB_2 < 180°$$

C1-139 已知六边形的各边长不超过 1，试证：此六边形至少有一条主对角线不超过 2．

【题说】 1986 年上海市赛二试题 2．题中主对角线是六边形中某一顶点与相隔二个顶点的第三顶点的连线．

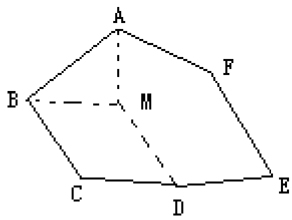


图 a

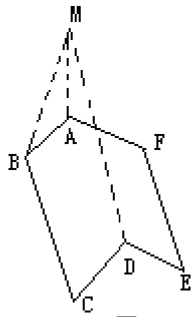


图 b

【证】 设 ABCDEF 是适合题意的六边形，AB、CD、EF 三边所在直线，至少有两条，它们的夹角不超过 60°（如两线平行，认为夹角为 0°），不妨设 AB 和 CD 的夹角不超过 60°，过 B 作 BM $\underline{\underline{//}}$ CD（如图），则 DM $\underline{\underline{//}}$ BC，且 ∠ABM=AB 与 CD 的夹角≤60°．$AM^2=AB^2+BM^2-2AB \cdot BM \cdot \cos\angle ABM \leq AB^2+BM^2-AB \cdot BM$．由对称性，不妨设 BM≥AB，注意到 BM=CD≤1，有

$$AB^2+BM^2-AB \cdot BM=BM^2+AB(AB-BM) \leq BM^2 \leq 1$$

所以

$$AM^2 \leq 1，AM \leq 1$$

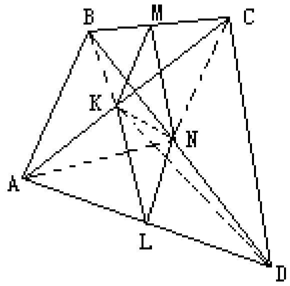
于是

$$AD \leq AM+MD=AM+BC \leq 2.$$

C1-140 凸四边形 ABCD 的面积为 S．证明：以 AC、AD、BC 和

BD的中点为顶点的四边形的面积小于$\frac{1}{2}$S.

【题说】 第十三届（1987年）全俄数学奥林匹克九年级题 4.



【证】 设AC、AD、BC、BD的中点分别为 K、L、M、N．易知 $S_{\triangle MKN}\le\max(S_{\triangle BKN}, S_{\triangle CKN})$，$S_{\triangle LKN}\le\max(S_{\triangle AKN}, S_{\triangle DKN})$．而有

$$S_{\triangle CKN}+S_{\triangle AKN}=S_{\Delta CNA}<S_{CNAB}$$

$$=\frac{1}{2}S$$

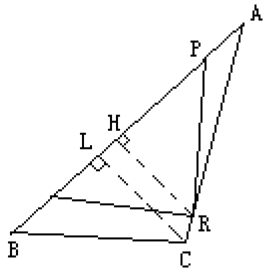
$$S_{\triangle CKN}+S_{\triangle DKN}<S_{\triangle CKD}<\frac{1}{2}S$$

等等，所以$S_{KLNM}=S_{\triangle MKN}+S_{\triangle LKN}<\frac{1}{2}S$．

C1-141 如图，在△ABC中，P、Q、R将其周长三等分，且P、Q、在AB边上．求证：

$$\frac{S_{\Delta PQR}}{S_{\Delta ABC}}>\frac{2}{9}$$

【题说】 1988年全国联赛二试题2．



【证】 不妨设△ABC的周长为1，分别过C、R作△ABC、△PQR的高CL、RH，则

$$\frac{S\Delta PQR}{S\Delta ABC}=\frac{\frac{1}{2}PQ\cdot AR}{\frac{1}{2}AB\cdot CL}=\frac{PQ\cdot AR}{AB\cdot AC}$$

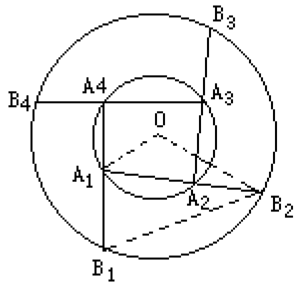
由于 $PQ=\frac{1}{3}$，$AB<\frac{1}{2}$，所以 $PQ/AB>\frac{2}{3}$

又 $AP\le AP+BQ=AB-PQ<\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

$AR=\frac{1}{3}-AP>\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$，$AC>\frac{1}{2}$

所以 $AR／AC > \frac{1}{6}/\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

$$\frac{S_{\Delta PQR}}{S_{\Delta ABC}} > \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$



C1-142 设 C_1、C_2 是同心圆，C_2 的半径是 C_1 的半径的 2 倍．四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 内接于 C_1，将 A_4A_1 延长交圆 C_2 于 B_1，A_1A_2 延长交圆 C_2 于 B_2，A_2A_3 延长交圆 C_2 于 B_3，A_3A_4 延长交圆 C_2 于 B_4．试证：四边形 $B_1B_2B_3B_4$ 的周长≥2×四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的周长，并请确定等号成立的条件．

【题说】 第三届（1988 年）全国冬令营赛题 2．

【证】 如图是两个同心圆，中心记为 O，内圆的半径不妨设为 1，从而外圆的半径等于 2．

连 OA_1、OB_2 和 B_1B_2，讨论四边形 $OA_1B_1B_2$．由托勒密不等式可知

$$OB_1\times A_1B_2\le OA_1\times B_1B_2-OB_2\times A_1B_1 \quad (1)$$

式中的等号成立当且仅当 O、A_1、B_1、B_2 四点共圆时成立，注意到 $OA_1=1$，$OB_1=OB_2=2$，$A_1B_2=A_1A_2+A_2B_2$，不等式（1）又可写为

$$B_1B_2-2A_1A_2\ge 2(A_2B_2-A_1B_1) \qquad (2)$$

式中等号当且仅当 O、A_1、B_1、B_2 四点共圆时成立，依次地轮换下标，可得出另外三个类似于（2）的不等式，注意到以上 4 个不等式的右方之和显然为零，因此，将此 4 式两边分别相加，得出不等式

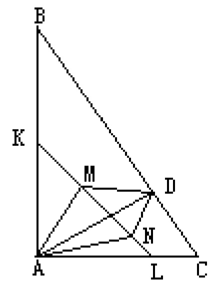
$$B_1B_2+B_2B_3+B_3B_4+B_4B_1\ge 2(A_1A_2+A_2A_3+A_3A_4+A_4A_1)$$

这正是我们需证的结论．

上式中等号成立，当且仅当 O、A_1、B_1、B_2 共圆，O、A_2、B_2、B_3 共圆，O、A_3、B_3、B_4 共圆，O、A_4、B_4、B_1 共圆．即：等号成立的充要条件是 $A_1A_2A_3A_4$ 为一正方形．

C1-143 在直角三角形 ABC 中，AD 是斜边 BC 上的高．连接△ABD 的内心与△ACD 的内心的直线，分别与边 AB 及 AC 交于 K 及 L 两点．△ABC 与△AKL 的面积分别记为 S 与 T．求证：S≥2T．

【题说】 第二十九届（1988 年）国际数学奥林匹克题 5．本题由希腊提供．



【证】 设△ABD 的内心为 M，△ACD 的内心为 N．由于△ADB∽△CDA，并注意到 DM 与 DN 是由 D 出发的两条分角线，故有

$$\frac{DM}{DN}=\frac{BD}{AD}\text{ 且}\angle MDN=90°$$

从而得 △NMD∽△ABD

所以，△DMN 与△ABD 的对应边的交角相等，即∠LKA=∠BDM=45°．故△ALK 是等腰直角三角形．

又由 ∠AKM=45°=∠MDA

△AMK≌△AMD

得 AK=AD=AL

于是

$$T=\frac{1}{2}AK\cdot AL=\frac{1}{2}AD^2=\frac{1}{2}\frac{AB^2\cdot AC^2}{AB^2+AC^2}$$

因此

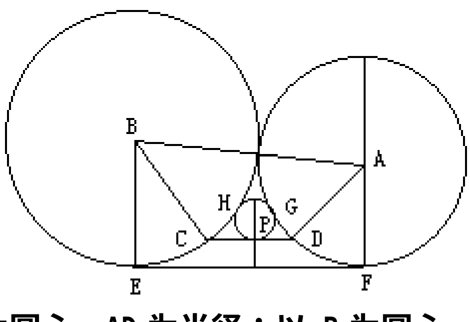
$$\frac{S}{2T}=\frac{AB^2+AC^2}{2AB\cdot AC}\geq 1$$

即 S≥2T

C1－144 设 ABCD 是一凸四边形，其三边 AB、BC、AD 满足 AB=AD+BC，形内有一点 P，它距 CD 为 h，且使 AP=h+AD，BP=h+BC．

求证：$\frac{1}{\sqrt{h}}\geq\frac{1}{\sqrt{AD}}+\frac{1}{\sqrt{BC}}$.

【题说】 第三十届（1989 年）国际数学奥林匹克题 4．本题由冰岛提供．



【证】 以 A 为圆心，AD 为半径；以 B 为圆心，BC 为半径；P 为圆心，h 为半径，分别作圆．则这三圆两两相外切，设 EF 是⊙A 与⊙B 外公切线．

当 C、D 分别沿⊙B、⊙A 趋向 E、F 时，⊙P 始终在曲边三角形内．所以，当⊙P 与 EF 相切时，h 最大．此时，将 AB、BP、PA 投影到 EF 上，由勾股定理，这三投影长分别为（R=BC，r=AD，m 为⊙P 半径）：

$$\sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2}$$

$$\sqrt{(R+m)^2-(R-m)^2}$$

$$\sqrt{(r+m)^2-(r-m)^2}$$

于是 $$\sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2}=\sqrt{(R+m)^2-(R-m)^2}+\sqrt{(r+m)^2-(r-m)^2}$$

即 $$\sqrt{Rr}=\sqrt{Rm}+\sqrt{rm}$$

从而 $$\frac{1}{\sqrt{m}}=\frac{1}{\sqrt{R}}+\frac{1}{\sqrt{r}}$$

由于m是h的最大值，所以有

$$\frac{1}{\sqrt{h}}\geq\frac{1}{\sqrt{R}}+\frac{1}{\sqrt{r}}$$

C1-145 已知△ABC，设 I 是它的内心，角 A、B、C 的内角平分线分别交其对边于 A'、B'、C'．求证：

$$\frac{1}{4}<\frac{AI\cdot BI\cdot CI}{AA'\cdot BB'\cdot CC'}\leq\frac{8}{27}$$

【题说】 第三十二届（1991）年国际数学奥林匹克题 1．本题由原苏联提供．

【证】 记 BC=a，CA=b，AB=c，易知

$$\frac{AI}{AA'}=\frac{b+c}{a+b+c},\frac{BI}{BB'}=\frac{a+c}{a+b+c},\frac{CI}{CC'}=\frac{a+b}{a+b+c}$$

由均值不等式可得

$$\frac{AI\cdot BI\cdot CI}{AA'\cdot BB'\cdot CC'}\leq\left[\frac{1}{3}\left(\frac{b+c}{a+b+c}+\frac{a+c}{a+b+c}+\frac{a+b}{a+b+c}\right)\right]^3=\frac{8}{27}$$

另一方面，记$x=\frac{b+c}{a+b+c}$，$y=\frac{a+c}{a+b+c}$，$z=\frac{a+b}{a+b+c}$，**则**

$\frac{AI\cdot BI\cdot CI}{AA'\cdot BB'\cdot CC'}xyz$，**不妨设**$x\geq y\geq z$，**显然**$x+y+z=2$，**并且**

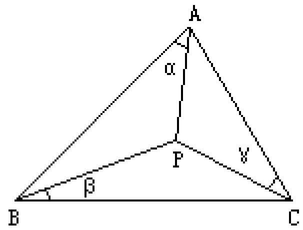
$$z>\frac{a+b}{a+b+(a+b)}=\frac{1}{2}$$

熟知正数 u、v（u≥v）的和一定时，积 uv 随 v 的减少而减少，所以

$$xyz=(2-z-y)\cdot yz>\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-z\right)z>\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

C1-146 设 P 是△ABC 内一点，求证：∠PAB、∠PBC、∠PCA 至少有一个小于或等于 30°．

【题说】 第三十二届（1991 年）国际数学奥林匹克题 5．本题由法国提供．



【证】 令$\alpha=\angle PAB$，$\beta=\angle PBC$，$\gamma=\angle PCA$．于是，

P 到 AB 的距离

$=PA\sin\alpha=PB\sin(B-\beta)$，

P 到 BC 的距离

$=PB\sin\beta=PC\sin(C-\gamma)$，

P 到 CA 的距离

$=PC\sin\gamma=PA\sin(A-\alpha)$．

从而

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma=\sin(A-\alpha)\cdot\sin(B-\beta)\cdot\sin(C-\gamma)$$

若$\alpha+\beta+\gamma\leq 90°$，结论显然成立，若$\alpha+\beta+\gamma>90°$，则

$$(A-\alpha)+(B-\beta)+(C-\gamma)\leq 90°$$

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\sin(A-\alpha)\sin(B-\beta)\sin(C-\gamma)$$

$$\leq\left(\frac{\sin(A-\alpha)+\sin(B-\beta)+\sin(C-\gamma)}{3}\right)^3$$

$$\leq\left(\sin\frac{A-\alpha+B-\beta+C-\gamma}{3}\right)^3\leq(\sin 30°)\leq\frac{1}{8}$$

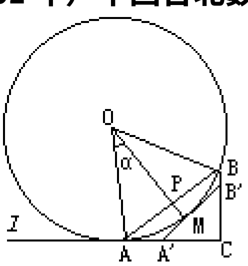
由此可知α，β，γ中存在一个，例如α满足

$$\sin\alpha\leq\frac{1}{2}$$

所以，或者 a≤30°减者α≥150°．在后一情况必有β，γ都小于 30°．

C1-147 设 A，B 是⊙O 上的两点，M 是$\overset{\frown}{AB}$的中点，记此圆在 A 点的切线为 *l*，C 是 B 向 *l* 引垂线的垂足，又圆在 M 点的切线分别交$\overline{AC}$及$\overline{BC}$于A'及B'．证明：若$\angle BAC<\frac{\pi}{8}$，则面积$S_{\triangle ABC}<2S_{\triangle A'B'C'}$．

【题说】 第一届（1992 年）中国台北数学奥林匹克题 1．



【证】 如图，令已给圆的半径为 R，

$\alpha=\angle BAC$

则　$AB=2R\sin\angle AOM=2R\sin\alpha$，

$AC=2R\sin\alpha\cos\alpha$

设 OM 交 AB 于 P，则

$$AA' = \frac{PM}{\sin\alpha} = \frac{R - OP}{\sin\alpha} = \frac{R - R\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

所以
$$\frac{AA'}{AC} = \frac{1-\cos\alpha}{2\sin^2\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{2\cos\alpha(1+\cos\alpha)}$$

$$< \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{8}\left(1+\cos\frac{\pi}{8}\right)}$$

$$< \frac{1}{4\cos^2\frac{\pi}{8}}$$

$$= \frac{1}{2\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{1}{2+\sqrt{2}}$$

从而
$$\frac{A'C}{AC} = 1 - \frac{AA'}{AC} > \frac{2+\sqrt{2}-1}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

因为 M 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，故 A'B'∥AB，△ABC∽△A'B'C'.

$$S_{\Delta ABC} = \left(\frac{AC}{A'C}\right)^2 S_{\Delta A'B'C'} < 2S_{\Delta A'B'C'}$$

C1-148 证明：以 a、b、c 为边长，S 为面积的三角形满足不等式：

$$-6a^2 + 10b^2 + 123c^2 \geq 48\sqrt{3}S$$

【题说】 1992 年友谊杯国际数学竞赛十一年级题 3.

【证】 原不等式即

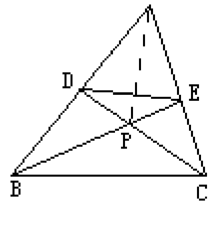
$$-6(b^2 + c^2 - 2bc\cos A) + 10b^2 + 123c^2 \geq 48\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}bc\sin A$$

即
$$4b^2 + 117c^2 \geq 12bc(2\sqrt{3}\sin A - \cos A)$$

由于 $4b^2 + 117c^2 \geq 2\sqrt{4b^2 \times 117c^2} = 12\sqrt{13}bc$，$2\sqrt{3}\sin A - \cos A = \sqrt{13}\sin(A-\varphi) \leq$. 故原不等式成立.

C1-149 △ABC 的面积为 1，D、E 分别是边 AB、AC 上的点，BE、CD 相交于 P 点，并且四边形 BCED 的面积是△PBC 面积的两倍，求△PDE 面积的最大值.

【题说】 1992 年日本数学奥林匹克题 2.



【解】

设$\frac{AD}{AB}=x,\frac{AE}{AC}=y$,则

$$S_{\Delta ADE}=xy,S_{BCDE}=1-xy,S_{\Delta PBC}=\frac{1}{2}(1-xy).$$

$$\frac{S_{\Delta PDE}}{S_{\Delta PBC}}=\frac{PE\times PD}{PB\times PC}=\left(\frac{PE}{PB}\right)\left(\frac{PD}{PC}\right)$$

$$=\frac{S_{\Delta APE}}{S_{\Delta ABP}}\cdot\frac{S_{\Delta APD}}{S_{\Delta APC}}=\frac{S_{\Delta APD}}{S_{\Delta ABP}}\frac{S_{\Delta APE}}{S_{\Delta APC}}$$

$=xy$

所以

$$S_{\triangle PDE}=\frac{1}{2}xy(1-xy)$$

由梅涅劳斯定理知

$$\frac{BP}{PE}\times\frac{EC}{CA}\times\frac{AD}{DB}=1$$

所以
$$\frac{BP}{PE}=\frac{1-x}{x(1-y)}$$

$$\frac{BP}{BE}=\frac{1-x}{x(1-xy)+1-x}=\frac{1-x}{1-xy}$$

故
$$S_{\Delta BPC}=\frac{BP}{BE}S_{\Delta BCE}=\frac{BP}{BE}\times\frac{EC}{AC}S_{\Delta ABC}$$

$$=\frac{(1-x)(1-y)}{1-xy}$$

所以有

$$\frac{1}{2}(1-xy)=\frac{(1-x)(1-y)}{1-xy}$$

记$z=xy$，则

$$\frac{1}{2}(1-z)^2=1+z-(x+y)\leq 1+z-2\sqrt{z}$$

所以 $1-z\leq\sqrt{2}(1-\sqrt{z})$

约去$1-\sqrt{z}$得 $1+\sqrt{z}\leq\sqrt{2}$

所以 $0<z\leq 3-2\sqrt{2}$

从而$S_{\triangle PDE}=\frac{1}{2}z$（$1-z$），当$z=3-2\sqrt{2}$时取得最大值$5\sqrt{2}-7$．即当$x=y=\sqrt{2}-1$时，$S_{\triangle PDE}$的面积最大，最大值为$5\sqrt{2}-7$．

C1-150 水平直线 m 通过⊙O 中心，直线 l⊥m，垂足为 M，M 在 O 点右侧．直线 l 上有三点 A、B、C，且在圆外，AM＞BM＞CM． AP、BQ、CR 为⊙O 三条切线，P、Q、R 为三切点．试证：

（1）l 与⊙O 相切时，AB·CR+BC· AP=AC· BQ；

（2）l 与⊙O 相交时，AB·CR+BC·AP＜AC·BQ；

（3）l 与⊙O 相离时，AB·CR＋BC· AP＞AC· BQ．

【题说】 1993 年全国联赛二试题 3．本题系由梁绍鸿《初等几何复习及研究》中总复习第 62 题改编而来．

【证】 设⊙O 半径为 r，AM=a，BM=b，CM=c，OM=x．则

$$AP^2=AO^2-OP^2=AM^2+OM^2-OP^2$$
$$=a^2+x^2-r^2$$

所以

$$AP=\sqrt{a^2+t}\quad (t=\sqrt{x^2-r^2})$$

同理
$$BQ=\sqrt{b^2+t},\ CR=\sqrt{c^2+t}$$

令 $G=(AB\cdot CR+BC\cdot AP)^2-(AC\cdot BQ)^2$

$$=[(a-b)\sqrt{c^2+t}+(b-c)\sqrt{a^2+t}]^2-(a-c)^2(b^2+t)$$

$$=2(a-b)(b-c)[\sqrt{(c^2+t)(a^2+t)}-(ac+t)]$$

$$=\frac{2(a-b)(b-c)(a-c)^2t}{\sqrt{(c^2+t)(a^2+t)}+ac+t}$$

（1）当 l 与⊙O 相切时，t=0，G=0；

（2）当 l 与⊙O 相交时，t＜0，G＜0；

（3）当 l 与⊙O 相离时，t＞0，G＞0．

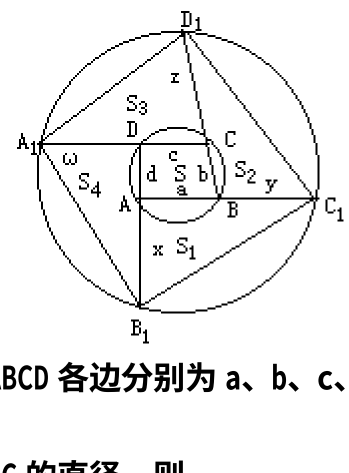
因此，本题结论成立．

C1－151 设圆 K 与 K_1 同心，半径分别为 R，R_1、R_1＞R．四边形 ABCD 内接于圆 K，四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 内接于圆 K_1．点 A_1、B_1、C_1、D_1 分别在射线 CD、DA、AB、BC 上．

求证：

$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}}\ge\frac{R_1^2}{R^2}$$

【题说】 1993 年中国数学奥林匹克（第 8 届数学冬令营）题 4．



【证】 如图，设 ABCD 各边分别为 a、b、c、d，AB_1＝x，BC_1=y，CD_1＝z，DA_1＝ω．

设 B'D'为垂直于 AC 的直径，则

$$S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ADC}\le S_{\triangle AB'C}+S_{\triangle AD'C}$$

即
$$ab+cd\le AB'^2+AD'^2=B'D'^2=4R^2$$

同理
可证 $ad+bc\le 4R^2$

显然有$x(x+d)=R_1^2-R^2$等式成立，所以

$$\frac{S_1+S_2+S_3+S_4}{S}=\frac{S_1+S_3}{S}+\frac{S_2+S_4}{S}$$

$$=\frac{x(a+y)+z(c+\omega)}{ad+bc}+\frac{y(b+z)+\omega(x+d)}{ab+cd}$$

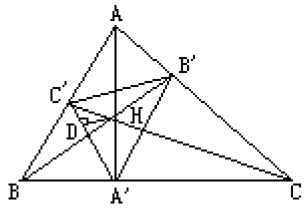
$$\geq 4\sqrt[4]{\frac{x(a+y)z(c+\omega)y(b+z)\omega(x+d)}{(ad+bc)^2(ab+cd)^2}}$$

$$=\frac{4\left(R_1^2-R^2\right)}{\sqrt{(ad+bc)(ab+cd)}}\geq\frac{R_1^2-R^2}{R^2}$$

从而结论成立．

C1-152 设△ABC 的外接圆半径 R=1，内切圆半径为 r，它的垂足三角形A's'C'的内切圆半径为p．求证：$p\leq 1-\frac{1}{3}(1+r)^2$．

【题说】 第三十四届（1993 年）IMO 预选题．本题由加拿大提供．



【证】 设△ABC 的垂心为 H．熟知 H 是垂足三角形 A'B'C'的内心．过 H 作 HD⊥A'C'于 D，则 HD=P．因为 C'、B、A'、H 四点共圆，所以∠HA'D=∠HBC'=90°-∠A．因此，

p=HD=HA'sin∠HA'D=HA'cosA

=BA'tg∠HBA'cosA

=ccosBcosAtg（90°-C）

=cctgCcosAcosB=2cosAcosBcosC　　　　(1)

由积化和差公式

2[2cosAcosB]cosC

=2[cos（A+B）+cos（A-B）]cosC

=cos（A+B+C）+cos（A+B-C）+cos（A-B+C）+cos（A-B-C）

=-1-cos2C-cos2B-cos2A

$=2-2\cos^2A-2\cos^2B-2\cos^2C$　　　　(2)

将（2）代入（1）得

$p=1-(\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C)$　　　　(3)

由柯西不等式有

$$\frac{1}{3}(\cos A+\cos B+\cos C)^2\leq\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C \quad (4)$$

将（4）代入（3），得到

$$p\leq 1-\frac{1}{3}(\cos A+\cos B+\cos C)^2 \quad (5)$$

由和差化积公式又有

$$\cos A+\cos B+\cos C=4\sin\frac{A}{2}\ \sin\frac{B}{2}\ \sin\frac{C}{2}+1 \qquad (6)$$

由半角公式和余弦定理有

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\\ \sin\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}\\ \sin\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

其中 $s=\frac{1}{2}$（$a+b+c$）**将（7）代入（6）再代入（5），即得**

$$p\leq 1-\frac{1}{3}\left(1+\frac{4(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}\right)^2 \qquad (8)$$

由三角形的面积公式

$$S_{\Delta ABC}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{abc}{4R}=rs$$

可得

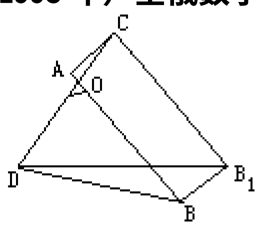
$$(s-)(s-b)(s-c)=\frac{S^2{}_{\Delta ABC}}{s}=S_{\Delta ABC}\cdot r=\frac{abcr}{4R} \qquad (9)$$

将（9）代入（8）即得

$$p\leq 1-\frac{1}{3}\left(1+\frac{r}{R}\right)^2=1-\frac{1}{3}(1+r)^2$$

C1-153 AB 和 CD 是两条长度为 1 的线段，它们在 O 点相交，而且∠AOC=60°，试证：AC+BD≥1．

【题说】 第十九届（1993 年）全俄数学奥林匹克九年级一试题 2．



【证】 作 CB_1∥AB，且 CB_1=AB（如图），这时候，四边形 ABB_1C 是平行四边形，AC=BB_1．易证△CB_1D 是等边三角形（CD=CB_1=1 而∠B_1CD=∠AOC=60°），于是

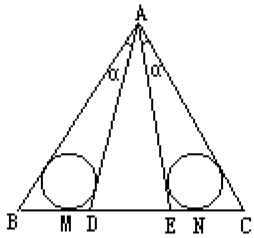
$$B_1D=1$$

$$AC+BD=BB_1+BD>B_1D=1$$

另：当 A、C 重合时 AC+BD=1

C1-154 设点 D 和 E 是△ABC 的边 BC 上的两点，使得∠BAD=∠CAE．又设 M 和 N 分别是△ABD，△ACE 的内切圆与 BC 的切点．求证：

$$\frac{1}{MB}+\frac{1}{MD}=\frac{1}{NC}+\frac{1}{NE}$$



【题说】 第三十四届（1993 年）IMO 预选题．本题由西班牙提供．

【证】 在△ABD 中，因为 M 是内切圆与 BD 的切点，所以 MB= $\frac{1}{2}$（$AB+BD-AD$），$MD=\frac{1}{2}$（$AD+BD-AB$）．

$$\frac{1}{MB}+\frac{1}{MD}=\frac{2}{AB+BD-AD}+\frac{2}{AD+BD-AB}=\frac{4\cdot BD}{BD^2-(AB-AD)^2}$$

$$=\frac{4BD}{BD^2-AB^2-AD^2+2AB\cdot AD}=\frac{4BD}{2AB\cdot AD(1-\cos\alpha)}$$

$$=\frac{2BD\sin\alpha}{AB\cdot AD\sin\alpha(1-\cos\alpha)}=\frac{BD\sin\alpha}{S_{\Delta ABD}(1-\cos\alpha)}$$

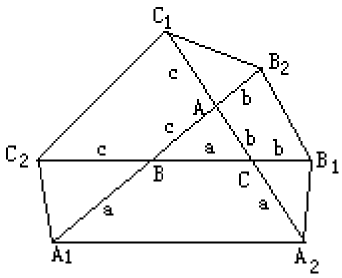
$$=\frac{2\sin\alpha}{h(1-\cos\alpha)}$$

h 为△ABC 的边 BC 上的高．

同理 $\frac{1}{NC}+\frac{1}{NE}=\frac{2\sin\alpha}{h(1-\cos\alpha)}$ ．所以 $\frac{1}{MB}+\frac{1}{MD}+\frac{1}{NC}+\frac{1}{NE}$

C1-155 △ABC 三边长为 a、b、c．现将 AB、AC 分别延长 a，BC、BA 分别延长 b，CA、CB 分别延长 c．设这样得到的六个点所构成的凸多边形的面积为 G，△ABC 的面积为 F．求证：G／F≥13．

【题说】 1993 年德国数学奥林匹克（第一轮）题 4．



【证】

如图，易知 $S_{\triangle AB_2C_1}=S_{\triangle BC_2A_1}S_{\triangle cA_2B_1}=S_{\triangle ABC}$ ．所以

$$\frac{G}{F}=\frac{S_{ABC_2C_1}+S_{BCA_2A_1}+S_{CAB_2B_1}+4F}{F}$$

$$=\frac{S_{\Delta AA_1A_2}+S_{\Delta BB_1B_2}+S_{\Delta CC_1C_2}+F}{F}$$

$$=1+\frac{(b+a)(c+a)}{bc}+\frac{(a+b)(c+b)}{ac}+\frac{(a+c)(b+c)}{ab}$$

$$=1+3+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}$$

$$\geq 4+9\sqrt[9]{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{a^2}{bc}\cdot\frac{b^2}{ac}\cdot\frac{c^2}{ab}}$$

=13

C1-156 设 ABCD 是梯形，AB∥CD，E 是线段 AB 上一点，F 是线段 CD 上一点，CE 与 BF 交于点 H，DE 与 AF 交于点 G．求证

$$S_{EHFG}\leq\frac{1}{4}S_{ABCD} \qquad (1)$$

如果 ABCD 是一个任意凸四边形，同样的结论是否成立？为什么？

【题说】 1994 年中国数学奥林匹克（第 9 届数学冬令营）题 1．

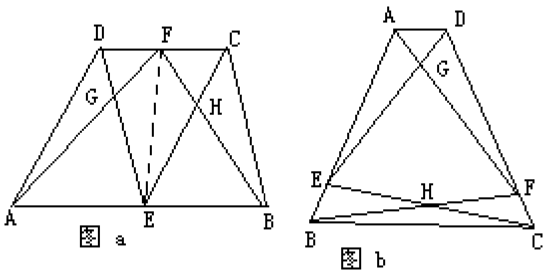


图 a　　　图 b

【证】

连 EF，**令** $\frac{FC}{EB}=\lambda$，**则**

$$\frac{S_{\Delta CHF}}{S_{\Delta EHF}}=\frac{CH}{EH}=\frac{FC}{EB}=\lambda$$

$$\frac{S_{\Delta BHE}}{S_{\Delta EHF}}=\frac{BH}{FH}=\frac{1}{\lambda}$$

又　　$S_{\triangle BCH}=S_{\triangle EHF}$

从而　　$S_{EBCF}=\left(2+\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)S_{\triangle EHF}$

$\geq(2+2)S_{\triangle EHF}=4S_{\triangle EHF}$　　　(2)

同理　　$S_{EADF}\geq 4S_{\triangle EFG}$　　　(3)

（2）+（3）即得（1）．

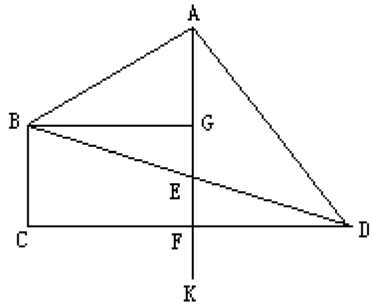
对于任意凸四边形，上述结论不成立．

事实上，如图，在 E→B，F→C 时，四边形 EHFG→△BPC，其中 P 为 BD 与 AC 的交点．而在 D→A 时，△BPC→△BAC．所以在 A、B、C、固定，D 与 A、E 与 B、F 与 C 充分近时，S_{EHFG} 可以大于 $\frac{1}{2}S_{ABCD}$**．**

C1-157 在凸四边形 ABCD 中，∠BAD=∠BCD=90°，射线 AK 平分∠BAD．今知 AK∥BC，AK⊥CD，AK 与 BD 相交于 E．

证明：$AE<\frac{1}{2}CD$

【题说】 1994年合肥市高中数学竞赛题 5．



【证】 如图，记 AK 与 CD 的交点为 F，作 BG⊥AK， G 为垂足，则 G 在线段 AF 上，且△ABG 和△ADF 均为等腰直角三角形，FD=AF＞AG=BG=CF．于是

$$\frac{EF}{BC}=\frac{FD}{CD}>\frac{1}{2}$$

即 $$BC<2EF$$

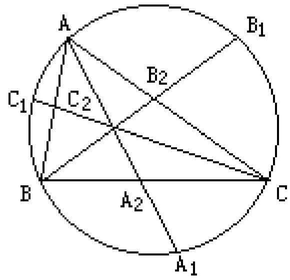
因为 $$AF=AG+GK=BG+BC<CF+2EF$$

所以 $2AE=2(AF-EF)<AF+CF=FD+CF=CD$，即$AE<\frac{1}{2}CD$．

C1-158 设 a、b 和 c 是三角形三边的长度，m_a、m_b 和 m_c 是相应这些边上的中线．D 是三角形外接圆的直径，证明

$$\frac{a^2+b^2}{m_c}+\frac{b^2+c^2}{m_a}+\frac{c^2+a^2}{m_b}\leq 6D$$

【题说】 第二十届（199 年）全俄数学奥林匹克十年级题 3．



【证】 延长各中线，分别△ABC 的外接圆相交于点 A_1、B_1 和 C_1（如图）．

显然 $$AA_1\leq D$$
$$BB_1\leq D$$
$$CC1\leq D$$

即
$$\left.\begin{array}{l} m_a+A_1A_2\leq D \\ m_b+B_1B_2\leq D \\ m_c+C_1C_2\leq D \end{array}\right\}\qquad (*)$$

由相交弦定理

$$A_1A_2\cdot AA_2=BA_2\cdot A_2C$$

即

$$A_1A_2=\frac{a^2}{(4m_a)}$$

同理
$$B_1B_2=\frac{b^2}{(4m_b)}$$

$$C_1C_2=\frac{C^2}{(4m_c)}$$

将上述结果带入（*）中，并将三个不等式相加，得

$$\frac{4m_a^2+a^2}{4m_a}+\frac{4m_b^2+b^2}{4m_b}+\frac{4m_c^2+c^2}{4m_c}\leq 3D$$

由于
$$4m_a^2+a^2=2b^2+2c^2$$

$$4m_c^2+b^2=2c^2+2a^2$$

$$4m_c^2+c^2=2a^2+2b^2$$

所以
$$\frac{a^2+b^2}{2m_c}+\frac{b^2+c^2}{2m_a}+\frac{c_2+a_2}{2m_b}\leq 3D$$

亦即
$$\frac{a^2+b^2}{m_c}+\frac{b^2+c^2}{m_a}+\frac{c^2+a^2}{m_b}\leq 6D$$

C1-159 在凸五边形 ABCDE 中，边 AB 垂直于边 CD，边 BC 垂直于边 DE．证明：如果 AB=AE=ED=1，那么 BC+CD＜1．

【题说】 第二十届（1994 年）全俄数学奥林匹克十年级题 7．

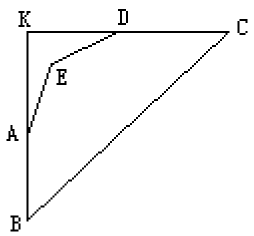


图 a

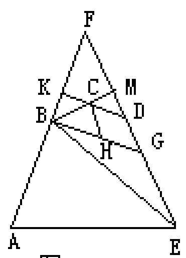


图 b

【证】 设 AB、DC 交于 K．因为 A、D 在 BC 的同侧，K 若也在这一侧，则如图 a 对在△KBC 内的点 E，ED 与 BC 所成的角＜∠DCB＜90°，与 ED⊥BC 矛盾．因此 K 与 A 在 BC 的异侧．同理，BC 与 DE 的交点 M 与 E 分居 CD 的两侧（图 b）．于是∠MDK＜90°，直线 AK、ED 相交并区交点 F 与 A（E）在 KD 的异侧．

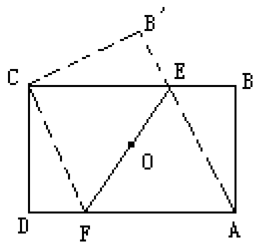
过 B 作 KD 的平行线交直线 DE 于 G,过 C 作 EF 的平行线交 BG 于 H.则∠BCH=∠BMG=90°，BG=BH+HG＞BC+CD．

因为$\angle EBA=\frac{180°-\angle A}{2}<90°=\angle GBA$，所以 BG 不与线段 AE 相交，G 线段 DE 上．BG 小于 E 到 AF 的距离，更小于 AE．于是 BC＋CD＜AE=1．

【注】 条件 DE=1 可以取消．

C1-160 将面积为 1 的矩形纸片 ABCD 沿一条直线对折，使得 C 点与 A 点重合．证明所得五边形的面积小于$\frac{3}{4}$．

【题说】 1995年城市数学联赛低年级普通水平题3．



【证】 如图，设折线为EF，则EF中点是矩形ABCD的对角线交点O，从而易知AECF是菱形．

由于 $CE=AE>BE$．所以，$\triangle ABE$的面积$<\frac{1}{4}$．从而

五边形CDFEB'的面积=△ABE的面积+四边形CDFE的面积

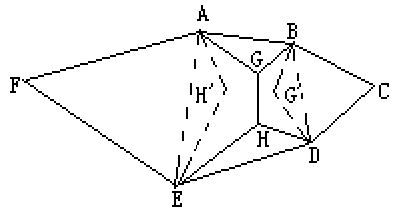
$$<\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

C1-161 设ABCDEF是凸六边形，满足AB=BC=CD，DE=EF=FA，∠BCD=∠EFA=60°．设G和H是这六边形内部的两点，使得

∠AGB=∠DHE∠120°

试证：AG+GB+GH+DH+HE≥CF．

【题说】 第三十六届（1995年）国际数学奥林匹克题 5．



【证】 连BD，AE．由于BC=CD，∠BCD=60°，所以BD=BC=AB．同样AE=ED．

连 BE，则 A、D 关于 BE 对称．设 G、H 关于 BE 的对称点分别为 G'、H'．则△BG'D与△BGA关于BE对称，所以∠BG'D=∠BGA=120°，G'在正三角形BCD的外接圆上．熟知

CG'=DG'+G'B=AG+GB

同理

HF=AH'+H'E=DH+HE

因此

AG+GB+GH+DH+HE=CG'+G'H'+H'F≥CF

C1-162 设ABCDEF是凸六边形，且AB平行于ED，BC平行于FE，CD平行于AF．又设R_A、R_C、R_E分别表示△FAB、△BCD及△DEF的外接圆半径，P表示六边形的周长，

证明：$R_A+R_C+R_E\geq\frac{p}{2}$．

【题说】 第三十七届（1996年）国际数学奥林匹克题5．本题由阿美尼亚提供．

【证】 记边AB，BC，…，FA的长为 a，b，c，d，e，f．又以 A，B，…，F表示六边形各内角，由对边平行，∠A=∠D，∠B=∠E，∠C=∠F．

BC与EF这两条平行线之间的距离h，A到BC的距离等于asinB，A

到 EF 的距离等于 fsinF．所以 h=asinB+fsinF．同样 h=csinC+dsinE，所以 2BF ≥ 2h=asinB+fsinF+csinC+dsinE ．同理 2DF ≥ bsinC+asinA+dsinD+esinF

2BD≥csinD+bsinB+esinE+fsinA

所以 $R_A+R_C+R_E=\frac{1}{4}\left(\frac{2BF}{\sin A}+\frac{2BD}{\sin C}+\frac{2DF}{\sin E}\right)$

$$\geq\frac{1}{4}(\frac{a\sin B+f\sin F+c\sin C+d\sin E}{\sin A}+\frac{c\sin D+b\sin B+e\sin E+f\sin A}{\sin C}$$
$$+\frac{b\sin C+a\sin A+d\sin D+e\sin F}{\sin E})$$
$$=\frac{1}{4}(a\left(\frac{\sin B}{\sin A}+\frac{\sin A}{\sin E}\right)+b\left(\frac{\sin B}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin E}\right)+c\left(\frac{\sin C}{\sin A}+\frac{\sin D}{\sin C}\right)+d\left(\frac{\sin E}{\sin A}+\frac{\sin D}{\sin E}\right)$$
$$+e\left(\frac{\sin E}{\sin C}+\frac{\sin F}{\sin E}\right)+f\left(\frac{\sin F}{\sin A}+\frac{\sin A}{\sin C}\right))$$

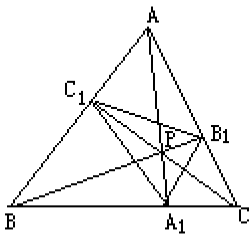
因为∠A=∠D，∠B=∠E，∠C=∠F，所以

$$R_A+R_C+R_E\geq\frac{1}{4}\ (2a+2b+2c+2d+2e+2f)\ =\frac{p}{2}.$$

C1-163 设△ABC 是等边三角形，P 是其内部一点，线段 AP、BP、CP 依次交三边 BC、CA、AB 于 A_1、B_1、C_1 三点．

证明：$A_1B_1\cdot B_1C_1\cdot C_1A_1\geq A_1B\cdot B_1C\cdot C_1A$．

【题说】 第三十七届（1996 年）IMO 预选题．



【证】 由余弦定理

$$A_1B_1^2=A_1C^2+B_1C^2-A_1C\cdot B_1C$$
$$\geq 2A_1C\cdot B_1C-A_1C\cdot B_1C$$
$$=A_1C\cdot B_1C$$

同理，$B_1C_1^2\geq B_1A\cdot C_1A$，$C_1A_1^2\geq C_1B\cdot A_1B$．

由塞瓦定理得

$$\frac{A_1C}{A_1B}\cdot\frac{B_1A}{B_1C}\cdot\frac{C_1B}{C_1A}$$

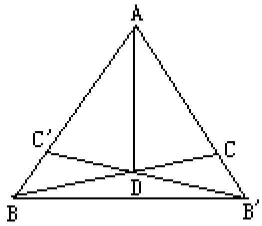
所以 $A_1B_1\cdot B_1C_1\cdot C_1A_1$

$$\geq\sqrt{A_1C\cdot B_1C\cdot B_1A\cdot C_1A\cdot C_1B\cdot A_1B}$$
$$=A_1B\cdot B_1C\cdot C_1A\cdot\sqrt{\frac{A_1C\cdot B_1A\cdot C_1B}{A_1B\cdot B_1C\cdot C_1A}}$$
$$=A_1B\cdot B_1C\cdot C_1A$$

C1-164 已知△ABC．证明存在一条直线 *l*（在△ABC 所在平面内），

使得△ABC 关于 *l* 的对称图形△A'B'C'与△ABC 的公共部分，面积大于△ABC 面积的 2／3．

【题说】 第二十五届（1996 年）美国数学奥林匹克题 3．



【解】 设 AD 为∠BAC 的平分线，则 B、C 关于 AD 的对称点 B'、C'分别在直线 AC、AB 上（如图）．而且由对称性，B'C'过 D．不妨设 AB=c ≥b=AC≥a=BC．因为

$$S_{\triangle BDC'}=\frac{BC'}{AB}\times\frac{BD}{BC}S_{\Delta ABC}$$
$$=\frac{(c-b)}{c}\times\frac{c}{c+b}S_{\Delta ABC}=\frac{c-b}{c+b}S_{\Delta ABC}$$

所以

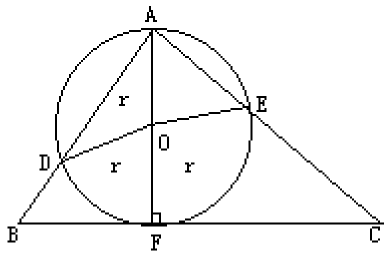
$$S_{AC'DC}=\left(1-\frac{c-b}{c+b}\right)S_{\Delta ABC}=\frac{2b}{c+b}S_{\Delta ABC}$$

而$2b\geq b+a>c$，所以$\frac{2b}{c+b}>\frac{2}{3}$．

于是直线 AD 就是所求的直线 *l*．

C1-165 设△ABC 中，BC=6，CA=5，AB=4．D，E 分别在 AB、AC 边上，且△ADE 的外接圆与 BC 相切．满足上述条件的点 D，E 在 AB、AC 上变动时，求线段 DE 长度的最小值．

【题说】 1997 年日本数学奥林匹克预选赛题 5．



【解】 如图，设△ADE 的外接圆圆心为 O，半径为 r，则∠DOE=2∠BAC．移动 D、E 时，△ODE 中总有 OD=OE．因此，这些△ODE 是相似的等腰三角形，DE 最小当且仅当 r 最小，所以当 AO⊥BC，即 AO 为△ABC 的高 AF 的一半时，DE 最小．此时

$$\cos\angle BAC=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{1}{8}$$

$$\sin\angle BAC=\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$2r=\frac{AB\times AC\sin\angle BAC}{BC}=\frac{4\times5\times\frac{3\sqrt{7}}{8}}{6}=\frac{5\sqrt{7}}{4}$$

$$DE = 2r\sin\angle BAC = \frac{5\sqrt{7}}{4} \times \frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{105}{32}$$

即所求的最小值为$\frac{105}{32}$.

C1-166 切一个凸 n 边形只选出一个相邻的边 AB、BC，切去△MBN 得出一个凸 n+1 边形，其中 M、N 分别为 AB、BC 的中点．一个正六边形 P_6，面积为 1，切成七边形 P_7，再将 P_7（用七种可能的切法之一）切成八边形 P_8，如此继续下去．证明不论怎么切，对所有 n≥6，P_n．的面积大于 1／3．

【题说】 第 26 届（1997 年）美国数学奥林匹克题 4．

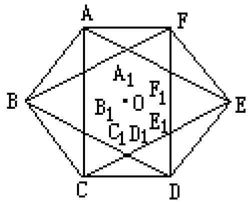


图 a

【解】 一个凸 n 边形，任一顶点 A 有两个相邻顶点 B、C，称线段 BC 为小对角线．

设 P_6 为正六边形 ABCDEF（如图），它的小对角线围成一个六边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$，简记为 S，易知它是正六边形，外接圆半径 OA1 是 O 到AF的距离的2／3，即 OA$\frac{\sqrt{3}}{3}$的，所以正六边形 S的面积为$\frac{1}{3}P_6 = \frac{1}{3}$.

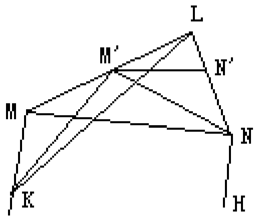


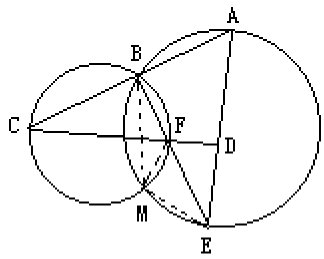
图 b

显然 P_6 严格含有 S 并且小对角线不经过 S 的内部．假设 P_n（n≥6）严格含有 S 并且小对角线不经过 S 的内部．所切的一刀切去△LM'N'，其中 M'、N'分别为 P_n 的边 LM、LN 的中点．这样 P_{n+1} 新增加的小对角线 M'N 在△LMN 内，M'K 在△LMK 内（K 是与 M 相邻的顶点）．LK、MN 均不过 S 的内部，所以 M'N、M'K 也都不过 S 的内部．同样过 N'的小对角线也是如此．于是 P_{n+1} 严格含有 S 并且小对角线不过 S 内部．

一切P_n（n≥6）都严格含有S，因而面积＞$\frac{1}{3}$.

C1-167 四条直线交于六点，组成四个三角形，证明：这些三角形的外接圆交于一点．

【题说】 1960 年～1961 年波兰数学奥林匹克三试题 5．

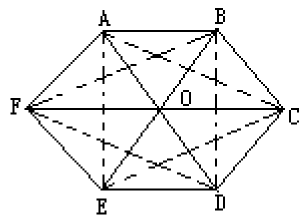


【证】 如图，四直线交于六点 A、B、C、D、E、F，组成四个△ABE、△ACD、△BCF、△DEF．设△ABE 与△BCF 的外接圆除已有公共点 B 外，另有公共点 M．

连 BM、FM、EM，则∠CFM=∠CBM=∠AEM，即∠CFM=∠DEM，所以 D、E、M、F 四点共圆，同理，A、C、M、D 四点共圆，也就是上述四个三角形的外接圆都过一点 M．

C1-168 给定凸六边形 ABCDEF，已知对角线 AD、BE、CF 中任意一条都把它的面积二等分，证明：这些对角线相交于一点．

【题说】 1963 年全俄数学奥林匹克十年级题 4．



【证】 设 AD、BE 交于 O．由已知可得 $S_{ABCD}=S_{BCDE}$，从而推得 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle BDE}$．但△ABD 与△BDE 共底边 BD，故知 AE∥BD．

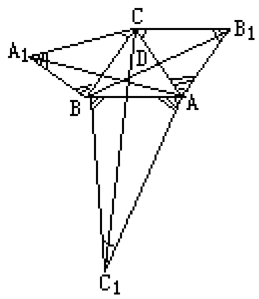
同理可知 AC∥FD，BF∥CE．因此△ACE∽△DFB，而 O 点是此二相似三角形的内位似中心，所以 CF 过 O．即 AD、BE、CF 相交于 O 点．

C1-169 以锐角三角形 ABC 的三边为边向外作三个相似的锐角三角形 AC_1B、BA_1C、CB_1A（此处，$\angle AB_1C=\angle ABC_1=\angle A_1BC$；$\angle BA_1C=\angle BAC_1=\angle B_1AC$）．

(1) 证明：三角形 AC_1B、BA_1C 和 CB_1A 的外接圆交于一点．

(2) 证明：直线 AA_1、BB_1 与 CC_1 交于同一点．

【题说】 第七届（1973 年）全苏数学奥林匹克八年级题 4．



【证】 设 D 为 AA1 与 BB1 的交点．易知$\angle A_1CA=\angle B_1CB$ 及

$$A_1C:BC=AC:B_1C$$

所以 $$\triangle A_1CA\backsim\triangle B_1CB$$

从而 $$\angle DBC=\angle DA_1C$$

点 B、D、C、A_1 共圆．

同理，A、D、C、B_1 共圆．这样，点 D 是△A_1BC 和△AB_1C 的外接圆交点．

又　　$\angle ADB = 180° - \angle ADB_1$

$= 180° - \angle AC_1B$

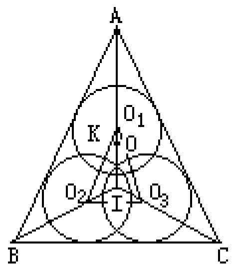
所以点 A_1、D、B 和 C_1 共圆，于是，点 D 是所有三个外接圆的交点．

由于$\angle BDC_1 = \angle BAC_1 = \angle BA_1C = 180° - \angle BDC$，所以直线 CC_1 经过点 D．

【注】 当△AC_1B、△BA_1C、△CB_1A 是正三角形时，D 点就是△ABC 的费马点．

C1-170 三个全等的圆有一公共点 O，并且都在一个已知三角形内，每一个圆与三角形的两条边相切．证明：这个三角形的内心、外心与 O 点共线．

【题说】 第二十二届（1981 年）国际数学奥林匹克题 5．



【证】 因为

$O_1O_2 \parallel AB$

$O_2O_3 \parallel BC$

$O_3O_1 \parallel CA$

所以△ABC∽△$O_1O_2O_3$．

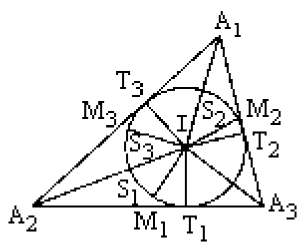
因为 AO_1、BO_2、CO_3 是△ABC 的角平分线，所以它们相交于△ABC 的内心 *I*．从而△ABC 与△$O_1O_2O_3$ 位似，*I* 为位似中心．

因为 $OO_1=OO_2=OO_3$，所以，O 是△$O_1O_2O_3$ 的外心．

因此，△ABC 的外心 K、△$O_1O_2O_3$ 的外心 O、位似中心 *I* 三点共线．

C1-171 △$A_1A_2A_3$ 是一个非等腰三角形，它的边分别为 a_1、a_2、a_3，其中 a_i 是 A_i 的对边（i=1，2，3），M_i 是边 a_i 的中点．△$A_1A_2A_3$ 的内切圆⊙*I* 切边 a_i 于 T_i

点，S_i 是 T_i 关于$\angle A_i$ 角平分线的对称点，求证：M_1S_1、M_2S_2、M_3S_3 三线共点．



【题说】 第二十三届（1982 年）国际数学奥林匹克题 2．

【证】 因为 T_1、S_1、T_2、T_3 关于 A_1I 对称，所以 $\overset{\frown}{T_1T_2}=\overset{\frown}{T_3S_1}$；

因为 T_2、S_2、T_3、T_1 关于 A_2I 对称，所以 $\overset{\frown}{T_1T_2}=\overset{\frown}{T_3S_2}$，故有 $\overset{\frown}{T_3S_1}=\overset{\frown}{T_3S_2}$，于是

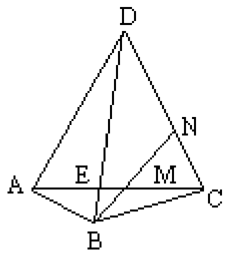
$$T_3I\perp S_1S_2，S_1S_2\parallel A_2A_1$$

同理
$$S_2S_3\parallel A_3A_2，S_3S_1\parallel A_1A_3$$

又 $M_1M_2\parallel A_2A_1$，$M_2M_3\parallel A_3A_2$，$M_3M_1\parallel A_1A_3$，于是$\triangle M_1M_2M_3$ 和$\triangle S_1S_2S_3$ 的对应边两两平行，故这两三角形或全等或位似．

$\triangle S_1S_2S_3$ 内接于$\triangle A_1A_2A_3$ 的内切圆，而$\triangle M_1M_2M_3$ 内接于九点圆．由于$\triangle A_1A_2A_3$ 不是正三角形，故内切圆与九点圆不重合，所以$\triangle S_1S_2S_3$ 和$\triangle M_1M_2M_3$ 位似，M_1S_1、M_2S_2、M_3S_3 共点．

C1－172 如图，在四边形 ABCD 中，△ABD、△BCD、△ABC 的面积比是 3∶4∶1．点 M、N 分别在 AC、CD 上，满足 AM∶AC＝CN∶CD，并且 B、M、N 三点共线．



求证：M 与 N 分别是 AC 与 CD 的中点．

【题说】 1983 年全国联赛二试题 3．

【证】 不妨设 AM／AC＝CN／CD＝r（0＜r＜1），$S_{\triangle ABC}=1$．则

$$S_{\triangle ABD}=3，S_{\triangle BCD}=4，S_{\triangle ACD}=6$$
$$S_{\triangle ABM}=r，S_{\triangle BCM}=1-r$$
$$S_{\triangle BCN}=rS_{\triangle BCD}=4r$$
$$S_{\triangle CNM}=S_{\triangle BCN}-S_{\triangle BCM}=5r-1$$

又
$$\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta CDA}}=\frac{CN\cdot CM}{CD\cdot CA}=r(1-r)$$

即
$$S_{\triangle CNM}=6r(1-r)$$

所以
$$6r(1-r)=5r-1$$

这个方程在（0，1）中的唯一解是$r=\frac{1}{2}$．这就证得M与N分别是AC与 CD 的中点．

C1－173 给定△ABC，过顶点 A、B 的圆分别交边 AC、CB 于点 P 和 Q，在边 AB 上取点 R 和 S，使得 QR∥CA，PS∥CB．证明：点 P、Q、R、S 共圆．

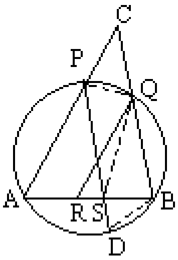


图 a

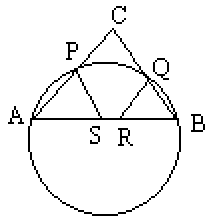


图 b

【题说】 第十四届（1988 年）全俄数学奥林匹克十年级题 2．

【证】 先考虑点 R 在 A 和 S 之间的情况，如图 a 延长 PS 交圆于 D．

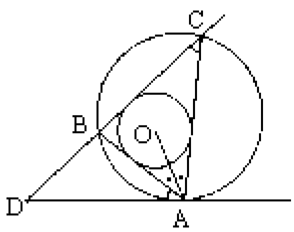
因为 QB∥PD，所以∠BDP＝∠QPD．

因为 QR∥PA，所以∠PAB＝∠QRS．

又∠PAB 与∠PDB 同立于 $\overset{\frown}{PQB}$上，故∠PAB＝∠PDB，得∠QPS＝∠QRS．又 P、R 在 QS 同侧，所以 P、Q、R、S 共圆．

当 S 在 A 和 R 之间时，如图 b，可完全类似地证明．

C1－174 在已知角的一边上确定一点 A．考察所有切该边于点 A 且交另一边于 B、C 两点的圆（对每个圆，两支点均用 B、C 表示）．证明；所有△ABC 的内心共线．



【题说】 第十五届（1989 年）全俄数学奥林匹克九年级题 3．

【证】 如图设已知角的顶点为 D，O 是△ABC 的内心，则

∠DAB＝∠BCA，又∠OAB＝∠OAC

所以 ∠OAD＝∠OAB+∠DAB

$$=\frac{1}{2}\angle BAC+\frac{1}{2}\angle DAB+\frac{1}{2}\angle DCA$$

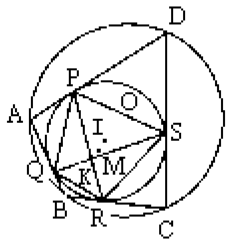
$$=\frac{1}{2}\angle DAC+\frac{1}{2}\angle DCA$$

$$=\frac{1}{2}[180°-\angle ADC]$$

$$=90°-\frac{1}{2}\angle ADC$$

即△ABC的内心在过A且与直线AD交角为$\angle OAD=90°-\frac{1}{2}\angle ADC$的直线上．

C1－175 双心四边形是指既有内切圆又有外接圆的四边形，证明对这样的四边形，两个圆心与对角线交点共线．



【题说】 第三十届（1989 年）IMO 预选题 14．本题由印度提供．

【证】 设四边形 ABCD 为双心四边形，其外接圆圆心为 O，内切圆圆心为 I，对角线交点为 K，不难推出下列三个引理：

（1）对圆外切四边形 ABCD，设切点为 P、Q、R、S，则 PR、QS 的交点就是对角线 AC，BD 的交点 K．

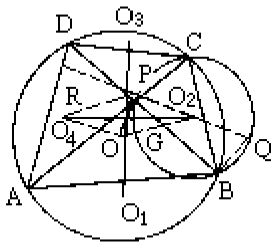
（2）若 K 为⊙I 内一定点，则对 K 点张直角的弦 EF 的中点的轨迹是一个圆，圆心为 IK 的中点 M．

（3）在（1）中若四边形 ABCD 有外接圆，则 PR⊥QS．

由（3），PQ、QR、RS、SP 对 K 点张直角，因而它们的中点 A'、B'、C'、D'均在以 IK 的中点 M 为圆心的圆上．

由于 IA 与 PQ 相交于 A'，所以 A'就是以 I 为反演中心，⊙I 为反演圆时，A 经反演所得的像，同样 B'、C'、D'分别为 B、C、D 的像，因此⊙O 经过反演成为 A'B'C'D'的外接圆，从而 O 与这圆的圆心 M，反演中心 I 共线，所以 O 在直线 IM 上，即 O、M、K 共线，从而问题得证．

C1－176 四边形 ABCD 内接于圆 O，对角线 AC 与 BD 相交于 P，设三角形 ABP、BCP、CDP 和 DAP 的外接圆心分别是 O_1、O_2、O_3、O_4，求证：OP、O_1O_3、O_2O_4 三线共点．



【题说】 1990 年全国联赛二试题 1．

【证】 作直线 PO_2 分别交⊙O_2 于 Q，交 AD 于 R，∠PDR＝∠BCA＝∠BQR，∠DPR＝∠QPR，所以

$$\angle PRD=\angle PBQ=90°$$

即 $$PQ_2\perp AD$$

⊙O 与⊙O_4 的连心线垂直于公共弦，即

$$OO_4\perp AD$$

故 $$PO_2 /\!/ OO_4$$

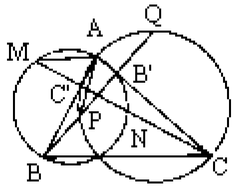
同理 $$PO_4 /\!/ OO_2$$

所以 PO_2OO_4 为平行四边形．

O_2O_4 过 OP 的中点 G，同理 O_1O_3 也过 OP 的中点 G．所以 OP、O_1O_3、O_2O_4 共点．

C1－177 给出平面上的一个锐角三角形 ABC，以 AB 为直径的圆与

AB 边的交线 CC'及其延长线交于 M、N，以 AC 为直径的圆与 AC 边的高线 BB'及其延长线交于 P、Q，求证：M、N、P、Q 共圆．



【题说】　第十九届（1990 年）美国数学奥林匹克题 5．利用圆幂定理证

$$AM=AP$$

【证】　在 Rt△ABM 中，

$$\triangle AM^2=AC'\cdot AB \qquad (1)$$

在 Rt△ACP 中

$$AP^2=AB'\cdot AC \qquad (2)$$

又因　$\triangle ABB'\backsim\triangle ACC'$

所以　$AC'\cdot AB=AB'\cdot AB \qquad (3)$

由（1）、（2）、（3）　得

$$AM^2=AP^2$$

即　$AM=AP$

但 M、N 关于 AB 对称，P、Q 关于 AC 对称，故 AM＝AN，AP＝AQ．因此 M、N、P、Q 在以 A 为圆心，以 AM＝R 为半径的圆上．

【别证】　设 BC 的高为 AA'，△ABC 的垂心为 H，则 A'在以 AB 为直径的圆上，从而

$$AH\times HA'=MH\times HN$$

同样

$$AH\times HA'=PH\times HQ$$

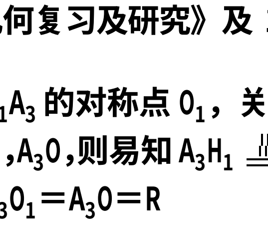
于是

$$MH\times HN=PH\times HQ$$

M、N、P、Q 共圆．

C1－178　设 $A_1A_2A_3A_4$ 为⊙O 内接四边形，H_1、H_2、H_3、H_4 分别为△$A_2A_3A_4$、△$A_3A_4A_1$、△$A_4A_1A_2$、△$A_1A_2A_3$ 的垂心．

求证：H_1、H_2、H_3、H_4 四点共圆，并定该圆圆心的位置．



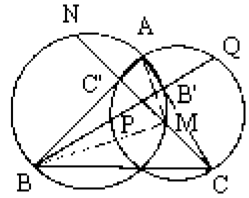
【题说】　1992 年全国联赛二试题 1．

亦可见梁绍鸿《初等几何复习及研究》及 1984 年巴尔干地区三国联赛．

【证】　作 O 点关于 A_1A_3 的对称点 O_1，关于 A_2A_4 的对称点 O_2，完成平行四边形 $OO_1O'O_2$，连 A_3O_1，A_3O，则易知 $A_3H_1 \underline{\underline{\parallel}} OO_2 \underline{\underline{\parallel}} O_1O'$，从而 $A_3H_1O'O_1$ 是平行四边形，故 $O'H_1=A_3O_1=A_3O=R$

同理可证 $O'H_2=O'H_3=O'H_4=R$．故 H_1、H_2、H_3、H_4 共圆，圆心为 O'．

C1－179　平面上给定一个锐角三角形 ABC．过顶点 B 的高交以 AC 为直径的圆于 P，Q，过顶点 C 的高交以 AB 为直径的圆于 M、N．求证：M、N、P、Q 四点共圆．



【题说】　1992 年捷克和斯洛伐克数学奥林匹克（最后一轮）题 6．

【证】　由于 MN 和 PQ 的垂直平分线分别是 AB 和 AC．所以，AM＝AN，AP＝AQ．

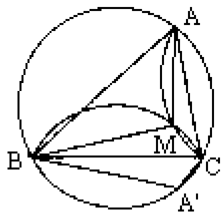
设 B'，C'分别是 AC 与 AB 边上高的垂足，于是由射影定理，得

$$AM^2=AC'\cdot AB=AB\cdot AC\cos\angle BAC$$

$$AP^2=AC\cdot AB'=AB\cdot AC\cos\angle BAC$$

所以 AM＝AP，从而 M、N、P、Q 四点在以 A 为圆心的圆上．

C1－180　设 M 为锐角△ABC 中一点，M 关于 AB、BC、CA 的对称点分别为 C'、A'、B'．若 A、B、C、A'、B'、C'六点共圆，则称 M 为“好点”．试找出锐角△ABC 中所有的“好点”，并说明理由．

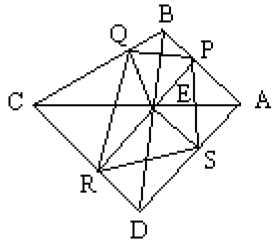


【题说】　1993 年江苏省高中数学竞赛二试题 1

【解】　设△ABC 的高为 AD，BE，CF，它们相交于垂心 H，延长 AD 交外接圆于 D'，则∠HCD＝90°－∠ABC＝∠BAD＝∠D'CD，从而△HCD≌△D'CD，D'与 H 关于 BC 对称．同理 BE、CF 与外接圆的交点 E'、F'也与 H 分别关于 CA、AB 对称．从而 H 是好点．

另一方面，设 M 为好点，则∠BMC＝∠BA'C＝180°－∠BAC＝∠BHC，因此 M 在以 BC 为底、含角为∠BHC 的弓形弧上．同理 M 在以 CA 为底、含角为∠CHA 的弓形弧上，也在以 AB 为底、含角为∠AHB 的弓形弧上．这三个弓形弧的公共点只有 H，因此垂心 H 是唯一的好点．

C1－181　设凸四边形 ABCD 的对角线 AC、BD 互相垂直，垂足为 E，证明：点 E 关于 AB、BC、CD、DA 的对称点共圆．



【题说】　第 22 届（1993 年）美国数学奥林匹克题 2．

【证】　以 E 为相似中心作相似变换，相似比为 1／2，此变换把 E 关于 AB、BC、CD、DA 的对称点变为 E 在 AB、BC、CD、DA 上的射影 P、Q、R、S（如图），只须证明 PQRS 是圆内接四边形．

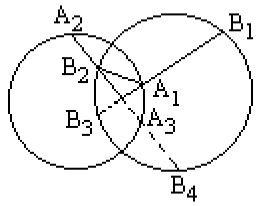
由于四边形 ESAP、EPBQ、EQCR 及 ERDS 都是圆内接四边形（每个四边形都有一组对角为直角），由 E、P、B、Q 共圆，∠EPQ＝∠EBQ，由 EQCR 共圆，有∠ERQ＝∠ECQ，于是

$$\angle EPQ + \angle ERQ = \angle EBQ + \angle ECQ = 90°$$

同理可得　$\angle EPS + \angle ERS = 90°$

从而，有∠SPQ＋∠QRS＝180°，故 PQRS 是圆内接四边形．

C1－182　两个等圆彼此相交，从它们的对称中心引出两条射线交圆周于不在同一条直线上的四个点．试证：这四个点必在同一个圆周上．



【题说】　第十九届（1993 年）全俄数学奥林匹克十年级一试题 2．

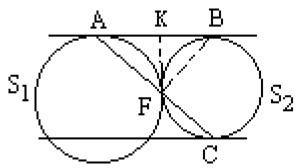
【证】　如图，设过对称中心 O 的两条射线为 A_1B_1、A_2B_2，A_1、A_2 位于第一个圆周上，而 B_1、B_2 位于第二个圆周上．

设点 A_3、B_3 和 B_4 分别是点 B_2、A_1 和 A_2 关于点 O 的对称点．根据相交弦定理，有

$$B_3O \cdot OB_1 = B_2O \cdot OB_4$$

因为 $B_3O = OA_1$，$OB_4 = OA_2$，从而 $OA_1 \cdot OB_1 = OB_2 \cdot OA_2$，$A_1$、$B_1$、$B_2$、$A_2$ 共圆．

C1－183　圆 S_1 和圆 S_2 相外切于 F 点．直线 l 分别切圆 S_1 和圆 S_2 于 A、B 点．于圆 S_2 相切于 C 点且平行于 l 的直线交圆 S_1 于两点．证明：点 A、F 和 C 共线．



【题说】　第二十届（1994 年）全俄数学奥林匹克九年级（决赛）题 2．

【证】　连结 FA、FB、FC．因为两平行线分别切圆 S_2 于 B、C 点，所以 BC 是圆 S_2 的直径，∠BFC＝90°．

过 F 引两圆的公切线交 l 于 K 点，则

$$KA = KF = KB$$

所以　$\angle KAF = \angle KFA$

$$\angle KBF = \angle KFB$$

$$\angle AFB = \angle KFA + \angle KFB$$

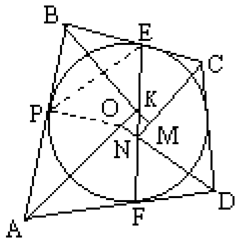
$$= \angle KAF + \angle KBF$$

$$=\frac{1}{2}\times180°=90°$$

∠AFB+∠BFC＝180°

故 A、F、C 三点共线．

C1－184　圆 O 内切于四边形 ABCD，与不平行的两边 BC、AD 分别切于 E、F 点．设直线 AO 与线段 EF 相交于 K 点，直线 DO 与线段 EF 相交于 N 点，直线 BK 与直线 CN 相交于 M 点．证明：O、K、M 和 N 四点共圆．



【题说】　第二十届（1994 年）全俄数学奥林匹克十年级题 3．

【证】　设内切圆 O 切 AB 于 P 点，连结 OP 及 PE，则∠AOP＝∠FEP 且都等于 $\overset{\frown}{PF}$ 的度数的一半，所以 O、K、E、P 四点共圆．

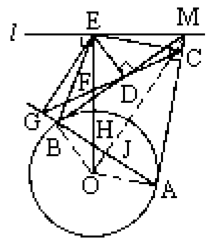
因为∠OPB＝∠OEB＝90°，所以 O、P、E 在以 OB 为直径的圆周上．从而 K 点也在这个圆周上．所以∠BKO＝90°．

同理可证∠CNO＝90°．于是

∠ONM+∠OKM＝180°

所以 O、K、M 和 N 四点共圆．

C1－185　一条直线 *l* 与⊙O 不相交，E 是 *l* 上一点，OE⊥*l*，M 是 *l* 上任意异于 E 的点，从 M 作圆的两条切线分别切圆于 A 和 B，点 C 是 MA 上的点，使得 EC⊥MA，D 是 MB 上的点，使得 ED⊥MB，直线 CD 交 OE 于 F，求证：F 的位置不依赖于 M 的位置．



【题说】　第三十五届（1994 年）IMO 预选题．本题由塞浦路斯提供．

【证】　设 EM＝x，OE＝a，圆半径为 R，连结 OM．设 OM 交 AB 于 J，OE 交 AB 于 H，则易知 OJ⊥AB．从而∠AJM＝∠OEM＝90°，J、M、E、H 四点共圆．OH×OE＝OJ×OM＝OA^2，

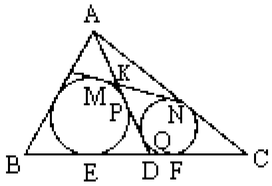
即 $OH=\frac{R^2}{a}$，$EH=OE-OH=\frac{a^2-R^2}{a}$．

设 E 在 AB 上的射影为 G．由于 E、A、B 都在以 OM 为直径的圆上，对这个圆的内接三角形 MAB，E 点的西摩松线 CD 通过 G 点．

连 EB．由 E、G、B、D 共圆，∠EGD＝∠EBD．由 E、B、O、M 共圆，∠EBD＝∠EOM＝90°－∠GHE．所以∠FGH＝90°－∠EGD＝∠GHE．从而 F 是直角三角形 EGH 斜边的中点．EF＝

$\frac{1}{2}EH=\frac{a^2-R^2}{2a}$为定值，故F为定点，它的位置与M的位置无关．

C1－186　D为△ABC的边BC上的点．作△ABD和△ACD的内切圆，并作它们的外公切线（异于BC的外公切线），交AD于点K．证明：线段AK的长度与点D在BC上的位置无关．



【题说】　第五十七届（1994年）莫斯科数学奥林匹克十年级题24．

【解】　如图．设AD与两圆的切点分别为P、Q，两圆的另一条公切线为MN，切点分别为M、N，BC与两圆的切点分别为E、F．

利用切线的性质不难算得

$$AP=\frac{1}{2}(AB+AD-BD)$$

$$AQ=\frac{1}{2}(AD+AC-DC)$$

$$KP+KQ=KM+KN=MN=EF$$

所以

$$\begin{aligned}4AK&=2(AP+AQ)-2(KP+KQ)\\&=AB+AC-BC+2(AD-EF)\qquad(1)\end{aligned}$$

另一方面，容易算得

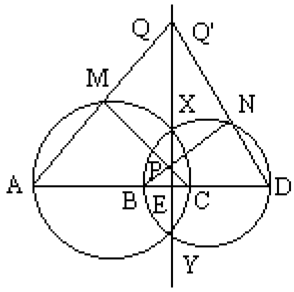
$$\begin{aligned}2EF&=(DE+DP)+(DF+DQ)\\&=(AD+BD-AB)+(AD+DC-AC)\\&=2AD-(AB+AC-BC)\qquad(2)\end{aligned}$$

将（2）代入（1）得

$$2AK=AB+AC-BC$$

与D在BC上的位置无关．

C1－187　设A、B、C、D是一条直线上依次排列的四个不同的点．分别以AC、BD为直径的两圆相交于X和Y；直线XY交BC于E．若P为直线XY上异于E的一点，直线CP与以AC为直径的圆相交于C及M，直线BP与以BD为直径的圆相交于B及N．试证：AM、DN和XY三线共点．



【题说】　第三十六届（1995年）国际数学奥林匹克题1．

【证】　设P点在线段XY上（如图所示），直线AM与直线XY交于Q点，直线DN与直线XY交于Q'点．

因为∠QMC＝∠QEC＝90°，所以Q、M、E、C四点共圆，从而

$$QP \cdot PE = MP \cdot PC = XP \cdot PY$$

同理

$$Q'P \cdot PE = NP \cdot PB = XP \cdot PY$$

因此 Q'P＝QP，Q 点与 Q'点重合．

P 在线段 XY 的延长线上，证明类似．

C1－188　设△ABC 是非等腰非直角三角形．设 O 是它的外接圆圆心．并且设 A_1、B_1 和 C_1 分别是边 BC、CA 和 AB 的中点．点 A_2 在射线 OA_1 上，使得 $\triangle OAA_1 \backsim \triangle OA_2A$．点 B_2 和 C_2 分别在射线 OB_1 和 OC_1 上，使得 $\triangle OBB_1 \backsim \triangle OB_2B$ 和 $\triangle OCC_1 \backsim \triangle OC_2C$．证明直线 AA_2、BB_2 和 CC_2 共点．

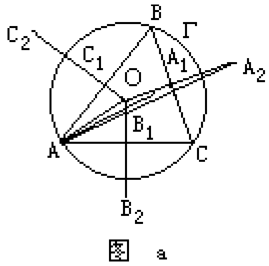


图 a

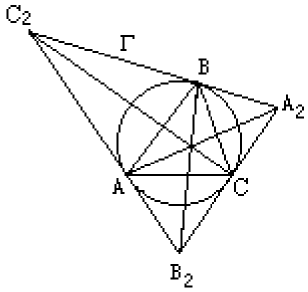


图 b

【题说】　第二十四届（1995 年）美国数学奥林匹克题 3．

【证】　设Γ是△ABC 的外接圆．因为 $\triangle OAA_1 \backsim \triangle OA_2A$，所以

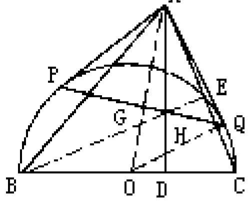
$$\frac{OA_1}{OA} = \frac{OA}{OA_2}$$

从而

$$OA_1 \cdot OA_2 = OA^2 = OB^2$$

即 $\frac{OA_2}{OB} = \frac{OB}{OA_1}$，于是 $\triangle OA_2B \backsim \triangle OBA_1$，$\angle OBA_2 = \angle OA_1B = 90°$，因而 A_2B 和Γ相切于 B 点．同理 A_2C 与Γ相切于 C 点，B_2C、B_2A、C_2A_2、C_2B 分别与圆Γ相切于 C、A、B、B．于是Γ是 $\triangle A_2B_2C_2$ 的内切圆，切点分别是 A、B 和 C．由切线长相等和 Ceva 定理，即得 A_2A、B_2B、C_2C 共点．

C1－189　设 H 是锐角△ABC 的垂心，由 A 向以 BC 为直径的圆作切线 AP、AQ，P、Q 为二切点．求证：P、H、Q 三点共线．



【题说】　1996 年中国数学奥林匹克（第 11 届数学冬令营）题 1．

【证】　设 BC 中点为 O，连结 AO，PQ，交于 G，则 AO⊥PQ．

在 Rt△AQO 中，由射影定理有

$$AQ^2 = AG \cdot AO \tag{1}$$

作 AD⊥BC 于 D，则 H 在 AD 上．连结 BH，延交 AC 于 E，则 BE⊥AC，且 E 在圆周上．而有 H、D、C、E 共圆，从而

$$AH \cdot AD = AE \cdot AC = AQ^2 \tag{2}$$

由（1）、（2），得

$$AH \cdot AD = AG \cdot AO$$

因此 H、D、O、G 共圆．从而

$$\angle HGO = 180° - \angle HDO = 90°$$

即 H 在 PQ 上．

【另证】　设 BC 中点为 O，AD、BE 为高，则 AD、BE 都过 H，并且 E 在以 BC 为直径的圆上，O 是这圆的圆心．

因为∠ADC＋∠HEC＝90°＋90°＝180°，所以 E、C、D、H 四点共圆，

$AH \cdot AD = AE \cdot AC$．

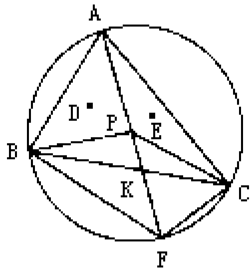
又 AQ 是⊙O 切线，所以 $AE \cdot AC = AQ^2$．

因为 $AH \cdot AD = AQ^2$，所以△AHQ∽△AQD，∠AHQ＝∠AQD．

同理，∠AHP＝∠APD．

因为 P、D、Q 都在以 OA 为直径的圆上，所以∠AQD+∠APD＝180°．从而∠AHQ＋∠AHP＝180°，即 P、H、Q 三点共线．

C1－190　设 P 是△ABC 内一点，∠APB－∠ACB＝∠APC－∠ABC，又设 D、E 分别是△APB 及△APC 的内心．证明 AP、BD、CE 交于一点．



【题说】　第三十七届（1996 年）国际数学奥林匹克题 2．本题由加拿大提供．

【证】　延长 AP 交 BC 边于 K，交△ABC 的外接圆于 F，连结 BF、CF．

$$\begin{aligned}\angle APC - \angle ABC &= \angle AKC + \angle PCK - \angle ABC \\ &= \angle BAK + \angle PCK \\ &= \angle BCF + \angle PCK = \angle PCF\end{aligned}$$

同理

$$\angle APB - \angle ACB = \angle PBF$$

所以由已知

$$\angle PCF = \angle PBF$$

由正弦定理

$$\frac{PB}{\sin\angle PFB} = \frac{PF}{\sin\angle PBF} = \frac{PF}{\sin\angle PCF} = \frac{PC}{\sin\angle PFC}$$

所以

$$\frac{PB}{PC} = \frac{\sin\angle PFB}{\sin\angle PFC} = \frac{\sin\angle ACB}{\sin\angle ABC} = \frac{AB}{AC}$$

即

$$\frac{PB}{AB} = \frac{PC}{AB}$$

设∠ABP的平分线BD交AP于M，则

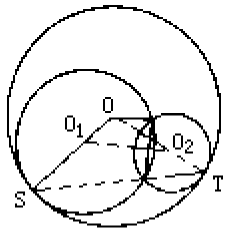
$$\frac{PM}{AM} = \frac{PB}{AB}$$

同样设CE与AP交于N，则

$$\frac{PN}{AN}=\frac{PC}{AC}$$

由此 $\frac{PM}{AM}=\frac{PN}{AN}$，所以M与N重合，即AP、BD、CE交于一点．

C1－191　如图，已知两个半径不相等的⊙O_1和⊙O_2相交于M、N两点，且⊙O_1、⊙O_2与⊙O内切于S、T两点，求证：OM⊥MN的充分必要条件是S、N、T三点共线．



【题说】　1997年全国联赛二试题1．

【证】　如图，由题设，知O、O_1、S共线，O、O_2、T共线．连结OS、OT、SN、NT、O_1M、O_1N、O_2M、O_2N，则有OS＝OT．

（1）充分性设S、N、T三点共线，则∠S＝∠T．因△O_1SN、△O_2NT都是等腰三角形，故

$$\angle S=\angle O_1NS=\angle T=\angle O_2NT$$

从而

$$O_2N /\!/ OS,\quad O_1N /\!/ OT$$

OO_1NO_2为平行四边形，故$OO_1=O_2N=O_2M$，$OO_2=O_1N=O_1M$．所以△O_1MO≌△O_2OM，则

$$S_{\triangle O_1MO}=S_{\triangle O_2OM}\Rightarrow O_1O_2 /\!/ OM$$

又由于O_1O_2⊥MN，故OM⊥MN．

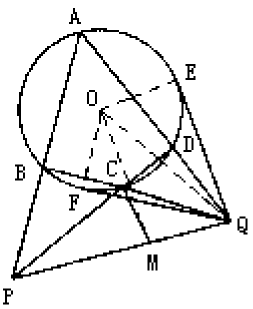
（2）必要性　设OM⊥MN，由图知

$$OO_2-OO_1=(OT-O_2T)-(OS-O_1S)$$
$$=O_1S-O_2T\text{（定值）}=MO_1-MO_2$$

所以，O_1M分别在以O_1、O_2为焦点的双曲线的（左、右）两支上．由OM⊥MN，O_1O_2⊥MN，知OM∥O_1O_2．又由双曲线对称性，知O_1O_2MO是等腰梯形．所以$OO_2=O_1M=O_1N$，$OO_1=MO_2=O_2N$，从而OO_1NO_2是平行四边形．

所以$2\angle O_1NS+2\angle O_2NT+2\angle O_1NO_2=(\angle O_1NS+\angle S+\angle SO_1N)(\angle O_2NT+\angle T+\angle NO_2T)=360°$，$\angle O_1NS+\angle O_2NT+\angle O_1NO_2=180°$，S、N、T三点共线．

C1－192　四边形ABCD内接于圆，其边AB与DC延长交于P点，AD、BC延长交于Q点．由Q作该圆二切线QE、QF，切点分别为E、F．求证：P、E、F三点共线．



【题说】 1997年中国数学奥林匹克题4．

【证】 如图，设ABCD内接圆圆心为O，半径为r．

连PQ，过D、Q、C作圆交PQ于M，则

$$\angle CMQ=\angle CDA=\angle PBC$$

故C、B、P、M共圆．从而

$$PO^2-r^2=(PO+r)(PO-R)$$
$$=PD\cdot PC$$
$$=PQ\cdot PM \qquad (1)$$

同理 $$QO^2-r^2=PQ\cdot QM \qquad (2)$$

（1）-（2）得

$$PO^2-QO^2=PQ(PM-QM)$$
$$=(PM+QM)(PM-QM)$$
$$=PM^2-QM^2$$

从而

$$OM\perp PQ$$

从而O、E、Q、M、F共圆，该圆以OQ为直径，OQ中点O_1为圆心．EF是⊙O与⊙O_1公共弦．

连PE，设交⊙O_1于F_1，交⊙O_1于F_2．则

$$PE\cdot PF_1=PO^2-r^2=PQ\cdot PM=PE\cdot PF_2$$

即PF_1-PF_2，推得$F_1=F_2=F$．故P、E、F共线．

C1－193 分别以△ABC的边BC、CA、AB为底向外作等腰三角形BCD，CAE，ABF．证明分别过A、B、C作EF、FD、DE的垂线，这三条垂线共点．

【题说】 第26届（1997年）美国数学奥林匹克题2．

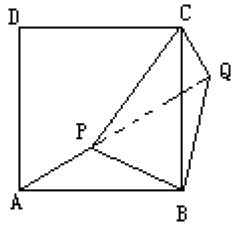
【解】 分别以D、E、F为圆心，DB、EC、FA为半径作圆．

⊙E、⊙F的公共弦，⊙F、⊙D的公共弦，⊙D、⊙E的公共弦（所在直线）即分别过A、B、C所作的EF、FD、DE的垂线．

熟知三条公共弦交于一点，这点（即三圆的根心）对于三个圆的幂相等．因此本题结论成立．

C2　平面几何求解

C2－001　设 P 是正方形 ABCD 内的一点，满足 PA∶PB∶PC＝1∶2∶3，求∠APB．



【题说】　1979 年内蒙古区赛二试题 4．

【解】　作点 Q，使 CQ=PA，BQ=PB．再连 PQ，显然△APB≌△BQC，故

$$\angle APB = \angle BQC$$

$$\angle ABP = \angle CBQ$$

$$\angle PBQ = \frac{\pi}{2}$$

因而△PBQ 是等腰直角三角形．

$$\angle PQB = \frac{\pi}{4}$$

且 $PQ^2=PB^2=8PA^2$，因此

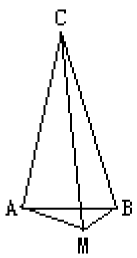
$$PC^2=9PA^2=PQ^2+CQ^2$$

于是△CPQ 是直角三角形，故

$$\angle APB = \angle BQC = \angle CQP + \angle PQB$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

C2－002　设 N 是正九边形，O 为其外接圆圆心，PQ 和 QR 是 N 的两个邻边．A 为 PQ 的中点，B 为垂直于 QR 的半径的中点．试求 AO 与 AB 的夹角．



【题说】　1992 年澳大利亚数学奥林匹克题 1．

【解】　设 C 为垂直于 QR 的半径与外接圆的交点，则△POC 为等边三角形，从而 PB⊥OC；又因 PA⊥OA，所以 A、B、O、P 四点共圆．故∠OAB=∠OPB＝30°．

C2－003　如图，在等腰△ABC 中．AC=BC，∠ACB=40°．在三角形的外部取一点 M，使∠MAB=20°，∠MBA=40°，求∠MCB．

【题说】　1992 年友谊杯国际数学竞赛八年级题 3．

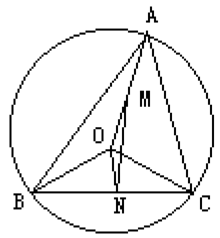
【解】　不妨设 AC=BC=1，则由余弦定理知 AB=2sin20°．再由正

弦定理知$AM=\frac{4}{\sqrt{3}}\sin 20°\sin 40°$．∠MAC＝∠MAB＋∠BAC＝20°＋$\frac{180°-40°}{2}$＝90°，所以

$$\operatorname{tg}\angle ACM=\operatorname{tg}(40°-\angle MCB)$$
$$=\frac{4}{\sqrt{3}}\sin 20°\sin 40°$$

所以$\angle MCB=40°-\operatorname{arctg}(\frac{4}{\sqrt{3}}\sin 20°\sin 40°)$．

C2－004　锐角△ABC 的外心为 O.线段 OA,BC 的中点分别为 M、N.∠ABC＝4∠OMN，∠ACB＝6∠OMN．求∠OMN．



【题说】　1995 年日本数学奥林匹克预选赛题 3．

【解】　如图，设∠OMN=θ，则∠ABC＝4θ，∠ACB＝6θ，∠BAC＝180°－10θ，∠NOC＝∠BOC／2＝∠BAC＝180°－10θ，∠MOC=2∠ABC＝8θ．从而

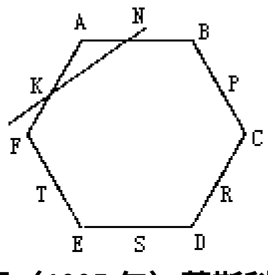
∠MON=8θ＋（180°－10θ）＝180°－2θ

∠ONM＝180°－（∠MON＋∠OMN）

＝θ－∠OMN

所以∠OMN 为等腰三角形．从而 ON＝OM＝OA／2＝OC／2．故∠NOC＝60°＝180°－10θ，θ＝12°．

C2－005　一直线与正六边形 ABCDEF 相交，截出一个△AKN，其中 AK＋AN＝AB．试求∠KAN＋∠KBN＋∠KCN＋∠KDN＋∠KEN＋∠KFN 等于多少度？



【题说】　第五十八届（1995 年）莫斯科数学奥林匹克八年级题 6．

【解】　不妨设点 N 位于边 AB 上．点 K 位于边 AF 上，由于 AK＋AN=AB．故 FK=AN．

分别在边 BC、CD、DE、EF 上取点 P、R、S、T．使得 FK=AN=BP=CR=DS=ET（见图）．于是

∠KBN=∠TAK

∠KCN=∠SAT

$$\angle KDN=\angle RAS$$
$$\angle KEN=\angle PAR$$
$$\angle KFN=\angle NAP$$

所以　$\angle KAN+\angle KBN+\angle KCN+\angle KDN+\angle KEN+\angle KFN$

$=\angle KAN+\angle TAK+\angle SAT+\angle RAS+\angle PAR+\angle NAP$

$=\angle KAN+\angle KAN$

$=2\times 120°=240°$

C2－006　锐角△ABC 的高 AA_1、BB_1 和 CC_1 的中点分别是 A_2、B_2 和 C_2，求$\angle B_2A_1C_2$、$\angle C_2B_1A_2$ 与$\angle A_2C_1B_2$ 之和．

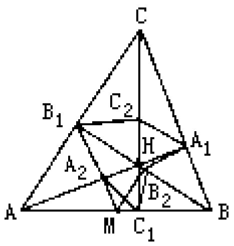


图 a

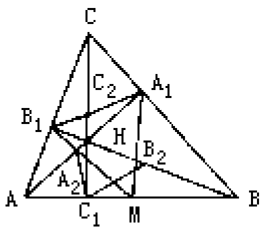


图 b

【题说】　第二十一届（1995 年）全俄数学奥林匹克九年级题 6．

【解】　设 M 是 AB 边的中点．线段 MA_2 和 MB_2 分别是$\triangle AA_1B$ 和$\triangle AB_1B$ 的中位线，由此得

$$\angle A_2MB_2=\angle ACB$$

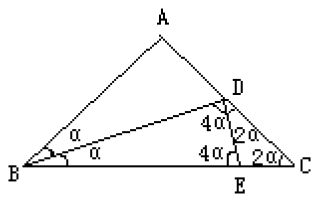
设 H 为△ABC 的垂心，则$\angle HC_1M=\angle HA_2M=\angle HB_2M=90°$，所以 M、$A_2$、H、$B_2$、$C_1$ 都在以 HM 为直径的圆上，所以

$$\angle A_2C_1B_2=\angle A_2MB_2=\angle ACB$$

同理
$$\angle B_2A_1C_2=\angle BAC$$
$$\angle C_2B_1A_2=\angle CBA$$

所以所求的三个角之和等于△ABC 三内角之和，即 180°．

C2－007　设△ABC 是一个等腰三角形，其中 AB＝AC．假如∠B 平分线交 AC 于 D，且 BC＝BD＋AD．求∠A 度数．



【题说】　第二十八届（1996 年）加拿大数学奥林匹克题 4．

【解】　在 BC 上取 BE=BD．则 EC=AD．

由分角线定理，有

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC}=\frac{EC}{DC}$$

又∠C 公用，故△ABC∽△EDC．

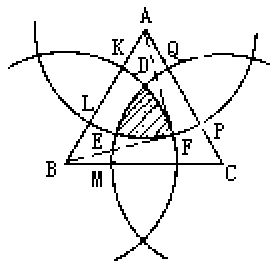
设$\angle ABD=\angle CBD=\alpha$，则

$$\angle CDE=\angle DCE=2\alpha$$
$$\angle BDE=\angle BED=4\alpha$$

从而　$9\alpha=180°$，$\alpha=20°$

$$\angle A=\angle CED=5\alpha=100°$$

C2－008 一个正三角形的边长是2a，以各顶点为圆心，$\sqrt{2}$ a为半径作三个圆．求这三个圆公共部分的面积．



【题说】 1957年武汉市赛决赛题4．

【解】 如图，

$S_{\triangle ABC}$=S扇$_{ALP}$＋S扇$_{BNK}$＋S扇$_{CQM}$－S曲$_{KLF}$

－S曲$_{MND}$－S曲$_{PQE}$＋S曲$_{DEF}$

=3S扇$_{ALP}$－3S曲$_{KLF}$＋S曲$_{DEF}$ (1)

连结AF、BF，因为$AF^2+BF^2=2a^2+2a^2=AB^2$，所以△ABF为等腰直角三角形．故

$$S扇_{AFL}=\frac{1}{4}\pi a^2$$

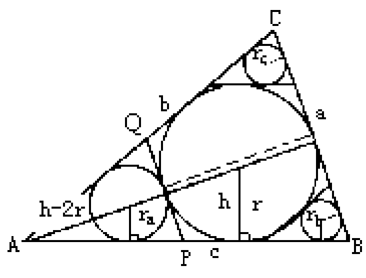
$$S曲_{KLF}-S扇_{AFL}+S扇_{BFK}-S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}\pi a^2-a^2$$

又 $$S_{\triangle ABC}=\sqrt{3a^2}，S扇_{ALP}=\frac{1}{3}\pi a^2$$

将上述结果代入（1），得

$$S曲_{DEF}=(\sqrt{3}+\frac{\pi}{2}-3)a^2$$

C2－009 作三边长为a、b、c的三角形ABC的内切圆．又作三条分别平行于这三角形各边的圆的切线．这三条切线从三角形ABC中截得三个新的三角形，再在每个新的三角形中作内切圆，计算这四个圆的面积和．



【题说】 第六届（1964年）国际数学奥林匹克题3．本题由南斯拉夫提供．

【解】 考虑一个截得的三角形；比如△APQ．（如图）因△APQ∽△ABC，所以

$$\frac{h_a-2r}{h_a}=\frac{r_a}{r}$$

其中r_a为△APQ的内切圆半径．

因此，所求面积和为

$$\pi r^2+\pi r^2\sum(\frac{h_a-2r}{h_a})^2$$

$$=\pi r^2(1+\sum\left(\frac{2\Delta/a-2\Delta/s}{2\Delta/a}\right)^2)$$

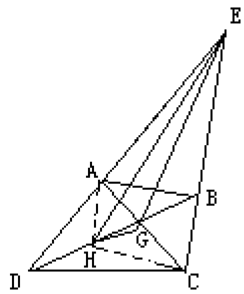
$$=\pi r^2\left(1+\sum\left(\frac{s-a}{s}\right)^2\right)$$

$$=\frac{\pi r^2}{s^2}(a^2+b^2+c^2)$$

$$=\frac{\pi}{s^3}（s-a）（s-b）（s-c）（a^2+b^2+c^2）$$

（Δ，s 分别为△ABC 的面积与半周长）

C2－010　凸四边形 ABCD 的边 AD 和 BC 延长相交于 E．设 H 和 G 分别是 BD 和 AC 的中点．求△EHG 的面积对四边形 ABCD 面积的比．



【题说】　第十届（1978 年）加拿大数学奥林匹克题 4．

【解】　连 AH、CH，有

$$S_{\triangle EGH}=S_{\triangle ECH}-S_{\triangle GCH}-S_{\triangle EGC}$$

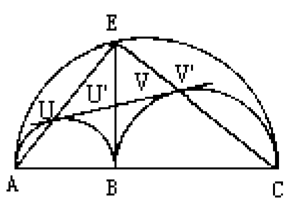
$$=\frac{1}{2}S_{\triangle ECD}-\frac{1}{2}S_{\triangle ACH}-\frac{1}{2}S_{\triangle ACE}$$

$$=\frac{1}{2}S_{\triangle ECD}-\frac{1}{2}S_{AHCE}$$

$$=\frac{1}{2}S_{AHCD}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}S_{ABCD})=\frac{1}{4}S_{ABCD}$$

因此　$S_{\triangle EHG}:S_{ABCD}$=1∶4．

C2－011　A、B、C 三点共线并且 B 在 A 与 C 之间，在 AC 的同一侧分别以 AB、BC、AC 为直径作半圆，前两个半圆的外公切线的切点分别为 U、V，而过点 B 的公切线与第三个半圆相交于 E 点．令 $r_1=\frac{1}{2}AB$，$r_2=\frac{1}{2}BC$，请用 r_1、r_2 表示比值 $\frac{\triangle EUV\text{的面积}}{\triangle EAC\text{的面积}}$．

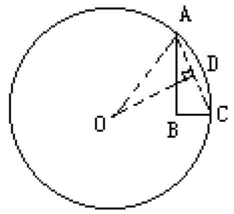


【题说】　1980 年五国国际数学竞赛题 2．本题由卢森堡提供．

【解】　设 EA、EC 分别交前两个半圆于 U'、V'，则四边形 EU'BV'是矩形，∠V'U'B=∠EBU'=∠EAB，∠U'V'B=∠ECB，U'V'是两个半圆的公切线，U'即 U，V'即 V．

将(2)代入(1)，得　$\sum_{i=1}^{4}\frac{r_i \cdot 3V}{h_i}=3V$

C2－012　一金工车间的切割工具呈有缺口的圆形，如图所示，圆的半径是$\sqrt{50}$厘米，AB长为6厘米，BC长为2厘米，∠ABC为直角，求 B 点到圆心的距离（以厘米为单位）的平方．



【题说】　第一届（1983 年）美国数学邀请赛题 4．

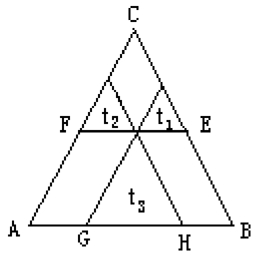
【证】　$\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}=\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$

$$\geq(1+1)^2=4$$

$\cos\angle OAB=\cos(\angle OAD-\angle BAC)=\frac{\sqrt{2}}{2}$在△OAB中，

$OB^2=OA^2+AB^2-2\times OA\times AB\times\cos\angle OAB=26$

C2－013　如图，在△ABC 内选取一点 P，过 P 作三条分别平行于各边的直线，这样所得到的三个三角形 t_1、t_2、t_3 的面积，分别是 4、9、49．求△ABC 的面积，



【题说】　第二届（1984 年）美国数学邀请赛题 3．

【解】　t_1，t_2，t_3 的对应边的比：

$$PE:PF:GH=\sqrt{4}:\sqrt{9}:\sqrt{49}=2:3:7$$

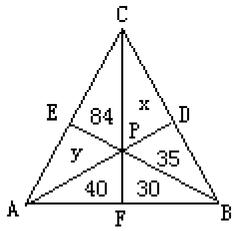
即　　$BH:AG:GH=2:3:7$

所以　　$AB:GH=12:7$

$$S_{\triangle ABC}:S_{\triangle PGH}=12^2:7^2$$

$$S_{\triangle ABC}=144$$

C2－014　如图所示，将△ABC 的三个顶点与同一个内点连接起来，所得三条连线把△ABC 分成 6 个小三角形,其中 4 个小三角形的面积已在图上标出．试求△ABC 面积．



【题说】 第三届（1885年）美国数学邀请赛题6．

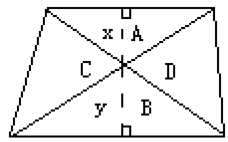
【解】 设$S_{\triangle CDP}$=x，$S_{\triangle AEP}$=y，则有

$$\frac{84+40+y}{x+35+30}=\frac{40}{30} \qquad (1)$$

$$\frac{40+30+35}{y+84+x}=\frac{35}{x} \qquad (2)$$

由（1）、（2）解得x=70，y=56，故$S_{\triangle ABC}$=315．

C2－015 一个梯形被两条对角线分成四个三角形，若用A、B分别表示以梯形上、下底为底边且有公共顶点的两个三角形的面积，求此梯形的面积．



【题说】 1988年新加坡数学奥林匹克（A组）题8．原题为选择题．

【解】 如图所示，过三角形A、B的公共顶点引高，分别记为x、y，记另两个三角形的面积为C、D．容易证得：

$$\frac{C}{B}=\frac{x}{y}=\frac{A}{D}=\frac{A}{C}$$

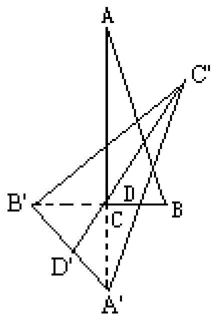
由此得$C=\sqrt{AB}=D$．

所以梯形的面积=A＋B＋C＋D

$$=A+B+2\sqrt{AB}$$

$$=(\sqrt{A}+\sqrt{B})^2$$

C2－016 △ABC是面积为1的直角三角形．A'、B'、C'分别是A、B、C关于各自对边的反射（对称）点．求△A'B'C'的面积．

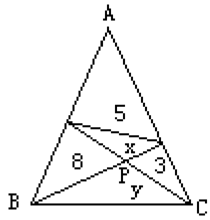


【题说】 第二十一届（1989年）加拿大数学奥林匹克题2．

【解】 如图，设C'C交AB于D，延长交A'B'于D'，则易知C'D'⊥A'B'，AB=A'B'．C'D'=3CD，故

$$S_{\triangle A'B'C'}=\frac{1}{2}C'D'\cdot A'D'$$
$$=\frac{3}{2}CD\cdot AB$$
$$=3S_{\triangle ABC}=3$$

C2－017　D、E 为△ABC 边 AB、AC 上的点，BE、CD 交于 P．△ADE、△BPD、△CEP 的面积分别是 5、8、3，求△ABC 的面积．



【题说】　1994 年日本数学奥林匹克预选赛题 5．

【解】　如图，设△PDE、△PBC 的面积分别为 x、y，则

(5+x+3)：(8+y)=AD：DB

=5：(x+8) 即

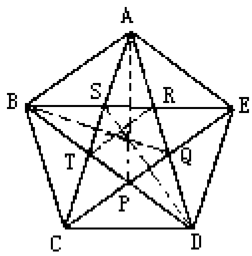
$x^2+16x+24=5y$ (1)

又 8：y=DP：PC=x：3

即 xy=24 (2)

由(1)、(2)解得 x=2，y=12．从而△ABC 的面积为 30．

C2－018　凸五边形 ABCDE 中，BE 分别交 AC、AD 于 S、R，BD 分别交 CA、CE 于 T、P，AD 交 CE 于 Q．且△ASR、△BTS、△CPT、△DQP、△ERQ 的面积均为 1．



(1) 求五边形 PQRST 的面积；

(2) 求五边形 ABCDE 的面积．

【题说】　1995 年日本数学奥林匹克题 3．

【解】　(1) 设五边形 PQRST 的面积为 x．由 $S_{\triangle BST}=S_{\triangle ASR}$ 得 $S_{\triangle BTR}=S_{\triangle ATR}$，从而 BA∥TR．所以

$$\frac{S_{\triangle STD}}{S_{\triangle SBT}}=\frac{TD}{BT}=\frac{RD}{AR}=\frac{S_{\triangle SRD}}{S_{\triangle SAR}}$$

从而$S_{\triangle STD}=S_{\triangle SRD}=\frac{x+1}{2}$．

同理，$S_{\triangle APQ}=S_{\triangle BPQ}=\frac{x+1}{2}$，所以BA∥PQ，即BA∥CE．

同理可得 BC∥AD，CD∥BE，DE∥AC，EA∥BD．

由 AE∥BD 得

$$\frac{S_{\triangle ASD}}{S_{\triangle DST}}=\frac{AS}{ST}=\frac{ES}{SB}=\frac{S_{\triangle STE}}{S_{\triangle SBT}}$$

即

$$\frac{1+\frac{x+1}{2}}{\frac{x+1}{2}}=\frac{\frac{x+1}{2}}{1}$$

整理得 $x^2=5$

故$x=\sqrt{5}$**.**

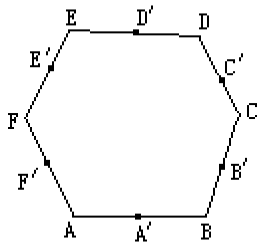
（2）由 AC∥DE 得

$$S_{\triangle ARE}=S_{\triangle SRD}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

同理，$S_{\Delta ABS}=S_{\Delta BCT}=S_{\Delta CDP}=S_{DEQ}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$**.**

从而$S_{ABCDE}=1\times 5+\sqrt{5}+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\times 5=\frac{15+7\sqrt{5}}{2}$**.**

C2－019　设 A'、B'、C'、D'、E'，F'分别是六边形 ABCDEF 的六边 AB、BC、CD、DE、EF、FA 的中点．试利用△ABC'、△BCD'、△CDE'、△DEF'、△EFA'、△FAB'的面积表示六边形 ABCDEF 的面积．



【题说】　1996 年城市数学联赛高年级高水平题 3．

【解】　A′是 AB 的中点，故

$2S_{\triangle EFA'}=S_{\triangle EFA}+S_{\triangle EFB}$

同理可得

$2S_{\triangle FAB'}=S_{\triangle FAB}+S_{\triangle FAC}$

$2S_{\triangle ABC'}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ABD}$

$2S_{\triangle BCD'}=S_{\triangle BCD}+S_{\triangle BCE}$

$2S_{\triangle CDE'}=S_{\triangle CDE}+S_{\triangle CDF}$

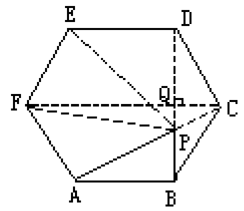
$2S_{\triangle DEF'}=S_{\triangle DEF}+S_{\triangle DEA}$

另一方面

$$S_{ABCDE}=S_{\triangle EFA}+S_{\triangle DEA}+S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}$$
$$=S_{\triangle FAB}+S_{\triangle EFB}+S_{\triangle BCE}+S_{\triangle CDE}$$
$$=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle FAC}+S_{\triangle CDF}+S_{\triangle DEF}$$

因此，六边形ABCDEF**的面积恰为所给六个三角形面积和的**$\frac{2}{3}$**.**

C2-020　在一个边长为 1 的正六边形内部有一点 P，已知 P 到某两个顶点的距离分别是 $\frac{13}{12}$ 及 $\frac{5}{12}$，求P到其余四个顶点的距离．



【题说】　1963 年北京市赛高二二试题 3．

【解】　正六边形ABCDEF的边长是1，所以它的对角线是2或$\sqrt{3}$，它们都大于$\frac{13}{12}+\frac{5}{12}=1.5$，所以与P相距为$\frac{13}{12}$及$\frac{5}{12}$的两个顶点A、B一定是相邻的．设

$$PA=\frac{13}{12}，PB=\frac{5}{12}$$

由$\left(\frac{13}{12}\right)^2-\left(\frac{5}{12}\right)^2=1$，得∠ABP是直角，故P点在对角线BD上，所以

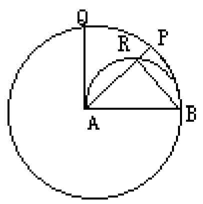
$PD=BD-PB=\sqrt{3}-\frac{5}{12}$，再根据Rt△PDE、Rt△PQC、Rt△PQF不难求得

$$PE=\frac{\sqrt{601-120\sqrt{3}}}{12}$$

$$PC=\frac{\sqrt{169-60\sqrt{3}}}{12}$$

$$PF=\frac{\sqrt{457-60\sqrt{3}}}{12}$$

C2-021　侦察机沿以 A 为圆心、半径为 10 公里的圆周飞行，速度为每小时 1000 公里．某时刻从 A 点发射一枚与飞机具有相同速度的火箭，无论何时火箭总在连结圆心与飞机的直线上，问火箭发射后，什么时间可以追上飞机？



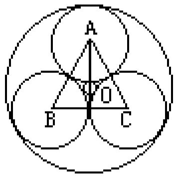
【题说】　1965 年全俄数学奥林匹克十年级题 5．

【解】　设火箭发射时，飞机在 Q 点，半径 AB⊥AQ（如图），以 AB 为直径作半圆．对半圆上任一点 R，延长 AR 交⊙A 于 P，连 RB，

则∠QAR = ∠ABR，$\overset{\frown}{QP}$的度数是$\overset{\frown}{AB}$的1/2．但⊙A的半径是半圆的2倍，所以$\overset{\frown}{QP}$的长与$\overset{\frown}{AR}$相等，即飞机在P时，火箭在R．从而飞机沿弧$\overset{\frown}{QB}$飞行时，火箭在半圆上飞行，相遇地点为B．在发射后π / 200

（$=10\times\frac{2\pi}{4}/1000$）小时火箭追上飞机．

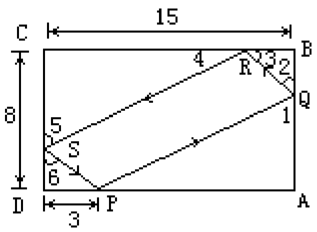
C2-022　给定三个单位圆，两两相切，求切于所有三个圆的圆的半径．



【题说】　第四届（1972 年）加拿大数学奥林匹克题 1．

【解】　设三单位圆心为 A、B、C．则△ABC 为边长为 2 的正三角形．设其中心为O．则AO为△ABC高线的$2/3$，即$2\sqrt{3}/3$．故切于三圆的小圆半径$r=(2\sqrt{3}/3)-1$；切于三圆的大圆半径$R=(2\sqrt{3}/3)+1$．

C2-023　一个矩形桌子长和宽如图所示．一小球从 P 撞击到 Q，反射到 R，又从 R 反射到 S，从 S 反射回原处 P，入射角与反射角相等（例如∠PQA=∠RQB 等等）．试求小球所走的路径的长．



【题说】　1979 年广东省赛二试题 4．

【解】　易知四边形 PQRS 是平行四边形．

由△QBR≌△SDP 及△PDS≌△RCS，得

$$\frac{3}{DS}=\frac{12}{8-DS}$$

所以

$$DS=\frac{8}{5}$$

$$SP=\sqrt{3^2+\left(\frac{8}{5}\right)^2}=\frac{17}{5}$$

$$PQ=\sqrt{12^2+\left(8-\frac{8}{5}\right)^2}=4\times\frac{17}{5}$$

因而小球所走路径长为

$$2(SP+PQ)=10\times\frac{17}{5}=34$$

［别解］　利用轴对称可发现

$$PQ+QR=DB=\sqrt{15^2+8^2}=17$$

所以 2（PQ+QR）=34．

C2-024　设 AD 为△ABC 的高线，求一切△ABC 使 AB+AC=2cm，且$AD+BC=\sqrt{5}$cm．

【题说】　1979 年英国数学奥林匹克题 1．

【解】　设 x=BD，y=DC，且 z=AD，诸线段均指有向线段，使得 x+y

＞0 且 z＞0，则

$$\sqrt{x^2+z^2}+\sqrt{y^2+z^2}=2 \qquad (1)$$

$$x+y+z=\sqrt{5} \qquad (2)$$

由（$x-2z$）^{2}≥0，得

$$x^2+z^2 \geq (2x+z)^2/5$$

即 $$\sqrt{x^2+y^2} \geq (2x+z)/\sqrt{5} \qquad (3)$$

当且仅当 x=2z 时，等号成立．

同理，$$\sqrt{y^2+z^2} \geq (2x+z)/\sqrt{5} \qquad (4)$$

当且仅当 y=2z 时，等号成立．

由（3）与（4）得

$$\sqrt{x^2+z^2}+\sqrt{y^2+z^2} \geq 2(x+y+z)/\sqrt{5} \qquad (5)$$

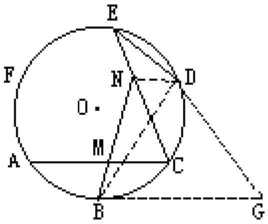
由（1）与（2），（5）中等号成立，因此 x=y=2z，

解得 $x=y=2/\sqrt{5}$，$z=1/\sqrt{5}$

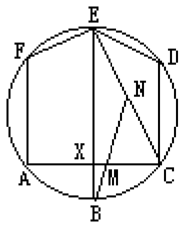
故适合这问题的唯一的三角形的边为：

$$BC=4/\sqrt{5}\text{cm}，CA=AB=1\text{cm}$$

C2-025　AC、CE 是正六边形 ABCDEF 的两条对角线，点 M、N 分别内分 AC、CE 使 AM∶AC=CN∶CE=r．如果 B、M、N 三点共线，试求 r 的值．



图a



图b

【题说】　第二十三届（1982 年）国际数学奥林匹克题 5．

【解】　连结 BD、ND，将△MBC 绕外接圆的圆心 O 逆时针旋转 120°，则重合于△NDE，故知∠BND=120°．

以 BD 为一边向 N 点另一侧作等边三角形 BDG，则 N、B、G、D 四点共圆且 C 为此圆的圆心．从而 CN=CB．

所以 $r=CN∶CE=CB∶CE=\sqrt{3}/3$．

【别解】　因 B、M、N 共线，由梅涅劳斯定理得

$$\frac{CN}{NE}\cdot\frac{EB}{BX}\cdot\frac{XM}{MC}=1$$

其中 X 是 AC 与 BE 的交点．

设正六边形的边长是 1．则

$$AC=CE=\sqrt{3}$$

由于 $$\frac{CN}{NB}=\frac{r}{1-r}$$

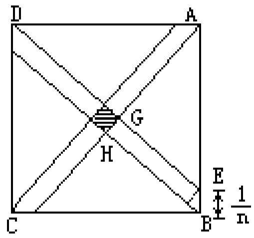
$$\frac{EB}{BX}=\frac{2}{1/2}=\frac{4}{1}$$

$$\frac{XM}{MC}=\frac{AM-AX}{AC-AM}=\frac{AM/AC-AX/AC}{1-AM/AC}=\frac{r-1/2}{1-r}$$

从而 $$\frac{r}{1-r}\cdot\frac{4}{1}\cdot\frac{r-1/2}{1-r}=1$$

故得 $r=\sqrt{3}/3$。

C2-026　在一个面积为 1 的正方形中构作一个如下的小正方形：将单位正方形的每条边作 n 等分，然后将每个顶点和它相对的顶点最接近的分点连接起来．如果小正方形（图中阴影部分）的面积恰为 1/1985，求 n 的值．



【题说】　第三届（1985 年）美国数学邀请赛题 4．

【解】　作 EF⊥HB，则

Rt△BEF∽Rt△EDA

得

$$\frac{EF}{EB}=\frac{AD}{DE}$$

从而

$$GH^2=EF^2=\left(\frac{AD}{DE}\right)^2\cdot EB^2$$

即

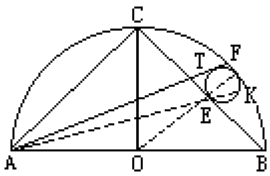
$$\frac{1}{1985}=\frac{1}{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n^2}$$

整理得　　$2n^2-2n+1=1985$

或　　2（n-32）（n+31）=0．

解得　　n=32（负根舍弃）

C2-027　如图，AOB 是半圆的直径，AC=BC，E 为 BC 中点，一个小圆切 $\overset{\frown}{BC}$ 于E，切BC于F，如果$AB=4$，自A到小圆的切线长AT为 l，求[10l]，其中[x]表示不超过 x 的最大整数．



【题说】　1986 年北京市赛高一题 2（7）．

【解】　由已知条件知 O、E、F 三点共线，且 EF 为小圈直径．连 AE 交小圆于 K，连 FK，易证△EKF∽△ACE．所以

EK：AC=EF：AE

即　$EK=\frac{AC\cdot EF}{AE}=\frac{AC(OF-OE)}{\sqrt{AC^2+AE^2}}=\frac{2\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}}$

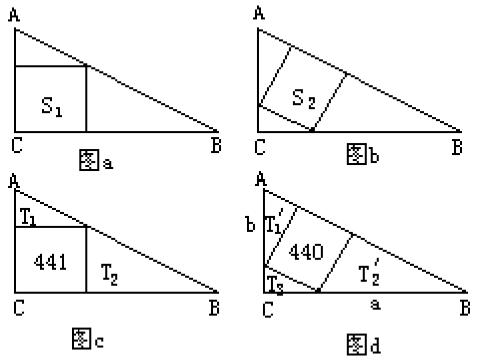
$$=\frac{2\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{\sqrt{10}}=\frac{2(2-\sqrt{2})}{\sqrt{5}}$$

于是　$AT=\sqrt{AE\cdot AK}=\sqrt{6+4\sqrt{2}}=2+\sqrt{2}$

而　$3.41<2+\sqrt{2}<3.42$

故　34.1<10l<34.2 即[10l]=34.

C2-028　如图所示，S_1 和 S_2 是直角三角形 ABC 的两个内接正方形，若 S_1 的面积为 441，S_2 的面积为 440，求 AC+CB 的值.



【题说】　第五届（1987 年）美国数学邀请赛题 15.

【解】　令 T_1、T_2、T'_1、T'_2、T_3 表示图 c、d 中直角三角形面积，$S_{\triangle ABC}=S$. 则

$$\frac{T_1}{T_1'}=\frac{T_2}{T_2'}=\frac{441}{440}$$

$$S=T'_1+T'_2+T_3+440$$

$$=\frac{440}{441}(T_1+T_2+441)+T_3$$

于是　$T_3=\frac{S}{441}$

但　$\frac{S}{T_3}=\frac{AB^2}{440}$

因此 $AB^2=440\times441$，$AB=21\sqrt{440}$.

又设 h、h_1 分别△ABC 及 T_3 斜边上高，则

$$\frac{h_1}{h}=\sqrt{\frac{T_3}{S}}=\frac{1}{21}，h=h_1+\sqrt{440}$$

解得　$h=\frac{21}{20}\sqrt{440}$

而　ch=ab=2S

于是　$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

$$= c^2 + 2ch = 440 \times 441 + 2 \times \frac{21^2}{20} \times 440$$
$$= 21^2 \times 22^2$$

所以 a+b=21×22=462．

【别解】 设 S_1、S_2 的边长分别为 a、b，∠B=θ．则

$$a + a\mathrm{ctg}\theta = BC = b\cos\theta + \frac{b}{\sin\theta}$$

所以

$$a^2(1+2\sin\theta\cos\theta) = b^2(\sin^2\theta\cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + 1)$$

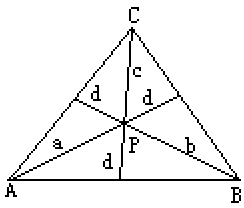
记 $t=\sin\theta\cos\theta$，将 $a^2=441$，$b^2=440$ 代入上式并整理得

$$440t^2-2t-1=0$$

所以 $t=\frac{1}{20}$（因 $t>0$）．从而

$$AC+BC=(a+a\ \mathrm{tg}\theta)+(a+a\ \mathrm{ctg}\theta)$$
$$= a\left(2+\frac{1}{\sin\theta\ \cos\theta}\right)$$
$$=462$$

C2-029 令 P 是△ABC 的一个内点，延长 AP、BP、CP 与对边相交，如图，a、b、c、d 表示各相应线段的长．已知 a+b+c=43，d=3，求 abc=？



【题说】 第六届（1988 年）美国数学邀请赛题 12．利用三角形面积比．

【解】

$$\frac{S_{\triangle BPC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{d}{d+a}$$
$$\frac{S_{\triangle BPA}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{d}{d+c}$$
$$\frac{S_{\triangle APC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{d}{d+b}$$

三式相加，得

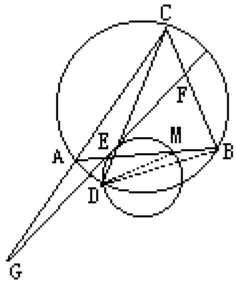
$$\frac{d}{d+a}+\frac{d}{d+b}+\frac{d}{d+c}=1$$

整理后，得 $2d^3+(a+b+c)d^2-abc=0$

由是知 $abc=2\times 3^3+43\times 3^3=441$

C2-030 设圆内两弦 AB，CD 交于圆内一点 E．在直线段 EB 的内部取一点 M，然后过点 D、E、M 作圆，再过 E 作此圆的切线分别交

直线BC、AC于点F、G．若$\frac{AM}{AB}=t$，试用t表出$\frac{EG}{EF}$．



【题说】 第三十一届（1990 年）国际数学奥林匹克题 1．本题由印度提供．

【解】 如图所示，连 DA、DM 及 DB．显然有∠CEF=∠DEG=∠EMD；∠ECF=∠MAD 于是△CEF∽△AMD，从而 CE·MD=AM·EF．

另一方面，又有∠ECG=∠MBD，于是

∠CGE=∠CEF-∠ECG=∠EMD-∠MBD=∠BDM

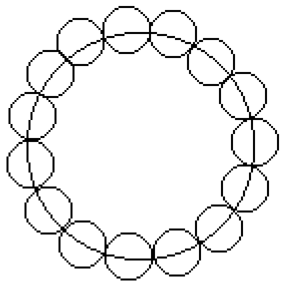
故 △CGE∽△BDM，从而

GE·MB=CE·MD

于是 GE·MB=AM·EF，故

$$\frac{GE}{EF}=\frac{AM}{MB}=\frac{tAB}{(1-t)AB}=\frac{t}{1-t}.$$

C2-031 十二只完全相同的圆盘放置在半径为 1 的圆周上，使得这十二只圆盘覆盖这圆周，但没有两只圆盘重叠，所以这十二只圆盘的每一个与它两旁的两只圆盘相切．圆盘的排列如图所示．这十二只圆盘的面积之和能写成π（$a-b\sqrt{c}$）的形式，其中a、b、c是正整数，且c不能被任一素数的平方整除．求 a+b+c．



【题说】 第九届（1991 年）美国数学邀请赛题 11．

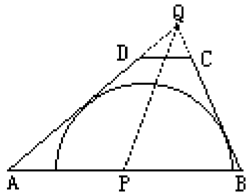
【解】 设小圆半径为 r，大圆半径 R=1．

则
$$r=tg\frac{\pi}{12}$$

$$a-b\sqrt{c}=12tg^2\frac{\pi}{12}$$
$$=12\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$
$$=12(2-\sqrt{3})^2$$
$$=84-48\sqrt{3}$$

a+b+c=84+48+3=135

C2-032　梯形 ABCD 的边 AB=92,BC=50,CD=19,AD=70,且 AB∥CD．一圆的圆心 P 在 AB 上，且与 BC 和 AD 相切，设 AP=m/n，其中 m 和 n 是互素的正整数，求 m+n．

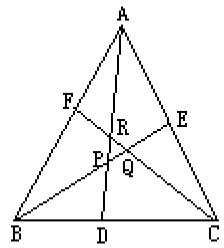


【题说】　第十届（199 年）美国数学邀请赛题 9．

【解】　延长 AD 和 BC 交于点 Q．因为点 P 到 AQ 和 BQ 之距离相等，故P在∠AQB之角平分线上，故有 $\frac{AP}{BP}=\frac{AQ}{BQ}=\frac{AD}{BC}=\frac{7}{5}$．

又因 $AP+PB=92$，所以$AP=\frac{161}{3}$，故$m+n=164$．

C2-033　在正△ABC 的边 BC、CA、AB 上有内分点 D、E、F 将边分成 3：（n-6）（n＞6）．线段 AD、BE、CF 相交所成的三角形面积是正三角形面积的 4/49 时，求 n 的值．



【题说】　1992 年日本数学奥林匹克预选赛题 6．

【解】　如图，由梅内劳斯定理知

$$\frac{AP}{PD}\times\frac{DB}{BC}\times\frac{CE}{EA}=1$$

即$\frac{AP}{PD}\times\frac{3}{n}\times\frac{3}{n-3}=1$，所以$\frac{AP}{AD}=\frac{n(n-3)}{n(n-3)+9}$．

于是

$$S_{\triangle ABP}=\frac{n(n-3)}{n(n-3)+9}S_{\triangle ABD}$$

$$=\frac{n(n-3)}{n(n-3)+9}\times\frac{3}{n}S_{\triangle ABC}$$

$$=\frac{3(n-3)}{n(n-3)+9}S_{\triangle ABC}$$

同理可得　$S_{\triangle BCQ}=S_{\triangle CAR}=\frac{3(n-3)}{n(n-3)+9}S_{\triangle ABC}$

所以

$$\frac{4}{49}=1-3\cdot\frac{3(n-3)}{n(n-3)+9}$$

整理得

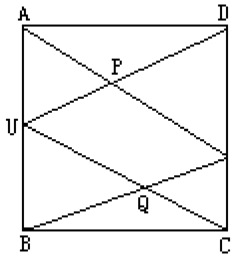
$$5n^2-64n+192=0$$

即

$$(5n-24)(n-8)=0$$

由于 n＞6，所以所求的值为 8．

C2-034　图中 ABCD 为正方形，U、V 分别为边 AB、CD 内部的点．确定使四边形 PUQV 面积为最大时，U、V 的所有可能情况．



【题说】　第二十四届（1992 年）加拿大数学奥林匹克题 3．

【解】　不妨设 BU≥CV．显然，△VQC∽△BQU，所以 QU≥QC 并且 V 到 QC 的距离≤B 到 UQ 的距离．在 QU 上取 E，使 QE=QC，则

$$S_{\triangle BUE}\geq S_{\triangle VUE}，S_{\triangle VQC}=S_{\triangle VQE}$$

又由 BU∥CV 易知 $S_{\triangle BQC}=S_{\triangle QUV}$，所以

$$S_{\triangle UBQ}+S_{\triangle VQC}=S_{\triangle BUE}+S_{\triangle BQE}+S_{\triangle VQE}$$
$$\geq S_{\triangle VUE}+S_{\triangle BQC}+S_{\triangle VQE}=2S_{\triangle UQV}$$

从而

$$S_{\triangle UQV}\leq\frac{1}{4}S_{BCVU}$$

同理

$$S_{\triangle UPV}\leq\frac{1}{4}S_{DAUV}$$

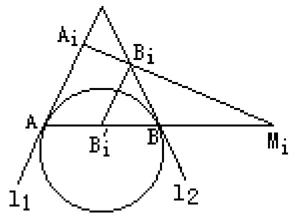
相加得

$$S_{PUQV}\leq\frac{1}{4}S_{ABCD}$$

当且仅当 BU=CV 时等号成立．

因此，在 BU=CV 时，四边形 PUQV 面积最大．

C2-035　直线 l_1 与 l_2 分别切圆周于点 A 和点 B．在直线 l_1 与 l_2 上分别取 1993 个点 A_1，A_2，…，A_{1993} 与 B_1，B_2，…，B_{1993}，使 $AA_i=(i+1)BB_i$（i=1，2，…，1993），并且 A_iB_i 的延长线与 AB 的延长线相交于点 M_i（i=1，2，…，1993）．试问：



$$\frac{A_1B_1}{A_1M_1}\cdot\frac{A_2B_2}{A_2M_2}\cdot\cdots\cdot\frac{A_{1993}B_{1993}}{A_{1993}M_{1993}}=?$$

【题说】　1993 年第十六届哈尔滨市高中数学竞赛二试题 1．

【解】　过点 B_i 作 AA_i 的平行线交 AB 于点 B_i'，显然△$B_iB_i'B$ 是等腰三角形，从而 $BB_i=B_i'B_i$，$AA_i=(i+1)B_i'B_i$，又由 $B_i'B_i∥AA_i$ 知

$$\frac{A_iB_i}{A_iM_i}=\frac{AA_i-B_i'B_i}{AA_i}=\frac{i}{i+1}$$

于是

$$\frac{A_1B_1}{A_1M_1}\cdot\frac{A_2B_2}{A_2M_2}\cdot\cdots\cdot\frac{A_{1993}B_{1993}}{A_{1993}M_{1993}}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{1993}{1993+1}$$
$$=\frac{1}{1993+1}$$
$$=\frac{1}{1994}$$

C2-036　设 D 是锐角三角形 ABC 内部的一个点，使得

$$\angle ADB=\angle ACB+90°$$

并有

$$AC\cdot BD=AD\cdot BC$$

(1) 计算比值 $\frac{AB\cdot CD}{AC\cdot BD}$.

(2) 求证△ACD 的外接圆和△BCD 的外接圆在 C 点的切线互相垂直.

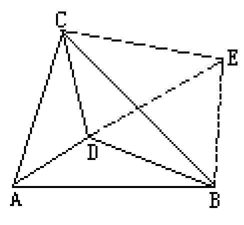
【题说】　第三十四届（1993 年）国际数学奥林匹克题 2.

【解】（1）如图 a，以 BC 为边向△ABC 外作△CBE∽△CAD，则 $\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BE}$. 由已知 $\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}$，所以 $BD=BE$. 又 $\angle DBE=\angle DBC+\angle CBE=\angle DBC+\angle CAD=\angle ADB-\angle ACB=90°$. 所以△DBE 是等腰直角三角形，$\frac{DE}{DB}=\sqrt{2}$.

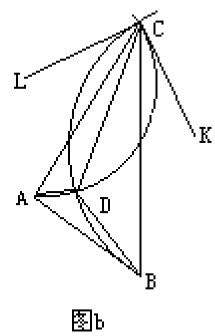
由△CBE∽△CAD，易知△CAB∽△CDE，所以 $\frac{CD}{CA}=\frac{DE}{AB}$. 从而

$$\frac{AB\cdot CD}{AC\cdot BD}=\frac{CD}{CA}\cdot\frac{AB}{DE}\cdot\frac{DE}{DB}=\frac{DE}{DB}=\sqrt{2}.$$

(2) 证明：如图 b，设 CK 是△ACD 的外接圆的切线，CL 是△BCD 的外接圆的切线.



图a



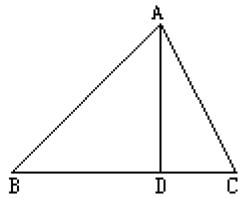
图b

则

$$\angle LCK=\angle LCD+\angle KCD=\angle CBD+\angle CAD=90°$$

即 CL⊥CK．

C2-037　一个三角形的 3 条边长及一条高是 4 个相继的正整数，且这条高将三角形分成的两个直角三角形的边长均为整数．求这三角形的三边长，并证明这是唯一的．



【题说】　第二十五届（1993）加拿大数学奥林匹克题 1．

【解】　设△ABC 中三边及高 AD 为正整数 n，n+1，n+2，n+3．

不妨设 AB＞AC，则 AB＞AC＞AD，故 AD=n 或 n+1．

（1）若 AD=n+1，则 AB=n+3，AC=n+2，BC=n．从而

$BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=2\sqrt{n+2}$　其中$2\sqrt{n+2}$，$\sqrt{2n+3}$是正整数，且

$DC=\sqrt{2n+3}$

$$2\sqrt{n+2}+\sqrt{2n+3}=n$$

由　$n^2-4<n^2=(2\sqrt{n+2}+\sqrt{2n3})^2$

$<(2\sqrt{n+2}+\sqrt{2n+4})^2$

$=(2+\sqrt{2})^2(n+2)$

知　$n-2<(2+\sqrt{2})^2$，$n<14$

但　$\sqrt{n+2}$是整数，故$n=2$或7，而此时

$$\sqrt{2n+3}=\sqrt{7}\text{或}\sqrt{17}$$

都不是整数．因此满足要求的三角形不存在．

（2）若$AD=n$，则$BD\leq\sqrt{(n+3)^2-n^2}=\sqrt{6n+9}$，

$$CD\leq\sqrt{(n+2)^2-n^2}=2\sqrt{n+1}$$

从而　$n+1\leq BC\leq\sqrt{6n+9}+2\sqrt{n+1}<5\sqrt{n+1}$

$\Rightarrow n^2-23n-24=(n+1)(n-24)<0$

$\Rightarrow n<24$

①若 BC=n+1，则 AC=n+2，AB=n+3．这时

$$BD=\sqrt{6n+9}，CD=2\sqrt{n+1}$$

但使$\sqrt{6n+9}$、$\sqrt{n+1}$为整数的n（<24）不存在．

②若 BC=n+2，则 AC=n+1，AB=n，这时

$$BD=\sqrt{6n+9}，CD=\sqrt{2n+1}$$

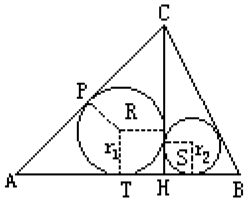
小于24且使$\sqrt{6n+9}$、$\sqrt{2n+1}$都是整数的n，只有一个：$n=12$．从而

AC=13，BC=14，AB=15

③若$BC=n+3$，则$AC=n+1$，$AB=n+2$．这时$BD=2\sqrt{n+1}$，$CD=\sqrt{2n+1}$．而小于24且使$\sqrt{n+1}$，$\sqrt{2n+1}$都是整数的n不存在．

综上所述，满足要求的三角形 ABC，只有一解，其边长分别为 13、14、15．

C2-038　在△ABC 中，CH 为高，R、S 分别为△ACH 和△BCH 的内切圆与 CH 的切点．若 AB=1995，AC=1994，BC=1993，则 RS 可以表示成$\frac{m}{n}$，其中m，n是互质的正整数，求$m+n=$ ？



【题说】　第十一届（1993 年）美国数学邀请赛题 15．

【解】　1997．如图，令△ABC 的三边 BC、AC、AB 分别为 a、b、c，CH= h，AH= x，BH= y，两内切圆的半径分别为 r_1、r_2．于是，RS=|RH-SH|=$|r_1-r_2|$．

熟知　$r_1=\frac{x+h-b}{2}$，$r_2=\frac{y+h-a}{2}$．

所以 $RS=|r_1-r_2|=|\frac{x+h-b}{2}-\frac{y+h-a}{2}|$

$$=\frac{1}{2}|(x-y)+(a-b)| \quad (1)$$

又因　$x^2-y^2=b^2-a^2$

故 $x-y=\frac{(b+a)(b-a)}{x+y}$

$$=\frac{(b+a)(b-a)}{c} \quad (2)$$

将（2）代入（1），得

$$RS=\frac{1}{2}|\frac{(b+a)(b-a)}{c}+(a-b)|$$

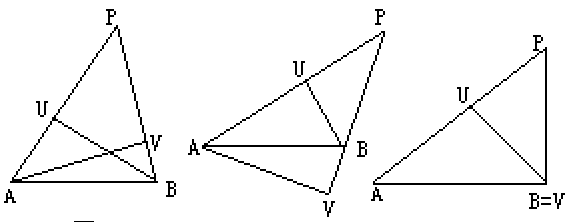
$$=\frac{|b-a|}{2c}|a+b-c|$$

$$=\frac{(1994-1993)}{2\cdot 1995}\cdot(1993+1994-1995)$$

$$=\frac{332}{665}$$

所以 m+n=332+665=997．

C2-039　设 AB 为圆的直径．点 P 不在直线 AB 上．直线 PA、PB 分别交圆于 U、V．设 PU=sPA，PV=tPB，s、t 为非负实数．用 s、t 表出 cos∠APB．



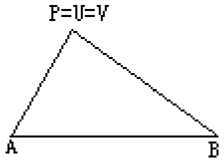
图a　图b　图c

【题说】 第二十六届（1994年）加拿大数学奥林匹克题4．

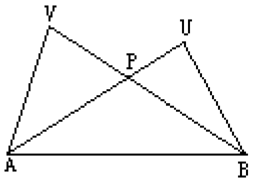
【解】 若P在圆外（如图a、b、c），则

$$\cos\angle APB=\frac{PU}{PB}=\frac{PV}{PA}=\sqrt{\frac{PU}{PA}\cdot\frac{PV}{PB}}=\sqrt{st}$$

若P在圆上（如图d），则



图d



图e

$$\cos\angle APB=\cos 90°=0=\sqrt{st}$$

若P在圆内（如图e），则

$$\cos\angle APB=-\cos\angle APV=-\frac{PV}{PB}$$

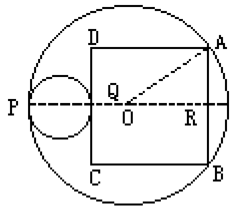
同理

$$\cos\angle APB=-\cos\angle BPU=-\frac{PU}{PB}$$

所以

$$\cos\angle APB=-\sqrt{\frac{PU}{PA}\cdot\frac{PV}{PB}}=-\sqrt{st}$$

C2-040 如图，PQ=10，以PQ为直径的圆与一个以20为半径的圆相切于点P，正方形ABCD的顶点A、B在大圆上，小圆在正方形的外部且与CD切于点Q．若$AB=m+\sqrt{n}$，其中，m、n是整数．求$m+n$．



【题说】 第十二届（1994年）美国数学邀请赛题2．

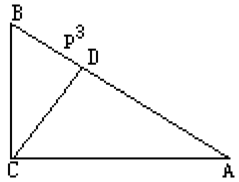
【解】 如图，设大圆圆心为O，则直线PQ过O，设这直线交AB于R，AB=x，那么RO=RQ-OQ=x-10，由勾股定理

$$(x-10)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=20^2$$

解得$x=8+\sqrt{304}$，所以

m+n=8+304=312

C2-041 在Rt△ABC中，∠C为直角，CD为AB边上的高，D为垂足，△ABC各边长都是整数，且$BD=29^3$，$\cos B=\frac{m}{n}$，m、n是互质的正整数，求m+ n．



【题说】　第十二届（1994 年）美国数学邀请赛题 10．

【解】　如图，我们用 a、b、c 分别表示 BC、AC、AB 的长度．设 p=29，则 BD= p^3．

熟知有

$$a^2=p^3c$$

因为 p 是素数，所以，存在自然数 x，使 $a= p^2x$，$c= px^2$，从而

$$b^2=c^2-a^2=p^2x^4-p^4x^2=p^2x^2(x^2-p^2)$$

从而，存在正整数 y，使 x2-p2=y2，故

$$p^2=x^2-y^2=(x-y)(x+y)$$

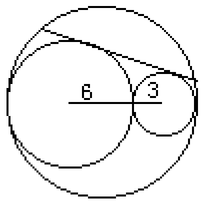
因为 p 是素数，且 x-y＜x+y，则有 x-y=1 和 x+ y= p^2，即

$$x=\frac{p^2+1}{2}，y=\frac{p^2-1}{2}$$

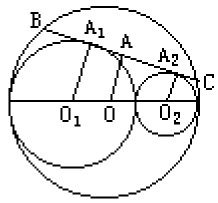
所以 $\cos B=\frac{a}{c}=\frac{p^2x}{px^2}=\frac{p}{\frac{p^2+1}{2}}=\frac{29}{\frac{29^2+1}{2}}=\frac{29}{421}$

因此，m+n=450．

C2-042　半径为 3 和 6 的两圆互相外切，并内切于一半径为 9 的圆．半径为 9 的圆有一条弦是另两圆的公切线．求这弦的长度的平方．



图a



图b

【题说】　第十三届（1995 年）美国数学邀请赛题 4．

【解】　如图，设三圆圆心分别为 O_1、O、O_2，它们在已知弦 BC 上的射影分别为 A_1、A、A_2．

由相切关系易知 O_1、O、O_2 共线，并且

$$OO_1=9-6=3$$

$$OO_2=9-3=6$$

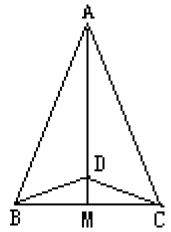
又易知 O_1A_1、O_2A_2 是两圆的半径，所以 $O_1A_1=6$，$O_2A_2=3$．

由定比分点公式

$$OA=\frac{3\times3+6\times6}{3+6}=5$$

$$BC^2=4(OB^2-OA^2)=4(9^2-5^2)=4\times4\times14=15^2-1=224$$

C2-043　△ABC 为等腰三角形，AB=AC，且高 AM=11．设在 AM 上有一点 D，使得 AD=10，∠BDC=3∠BAC，△ABC 的周长可写成 $a+\sqrt{b}$的形式，其中a、b为整数，求a＋b．



【题说】 第十三届（1995年）美国数学邀请赛题9．

【解】 设∠BAM=α，则∠BDM=3α．

$$\tan 3\alpha=\frac{BM}{DM}=\frac{BM}{AM}\times\frac{AM}{AM-AD}=11\tan\alpha$$

设 tanα=x，由倍角公式易得

$$\frac{x+\frac{2x}{1-x^2}}{1-x\cdot\frac{2x}{1-x^2}}=11x$$

即

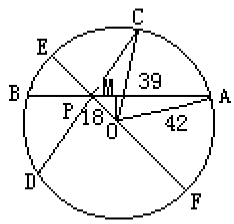
$$\frac{3-x^2}{1-3x^2}=11$$

从而$x=\frac{1}{2}$，即$BM=\frac{11}{2}$．

所以 $a+\sqrt{b}=2\left(\frac{11}{2}+\sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2+11^2}\right)=11+\sqrt{605}$

a+b=11+605=616

C2-044 在一个半径为42的圆中，两条长为78的弦相交，交点与圆心的距离为18．两条弦将圆的内部分成四个区域，其中两个区域由两条长度不相等的线段围成．这两个区域中任一个的面积能唯一地表成 $m\pi=n\sqrt{d}$的形式，其中m，n和d为正整数，d不能为任一素数的平方整除．求 m+n+d．



【题说】 第十三届（1995年）美国数学邀请赛题14．

【解】 如图，两弦AB，CD长均为78，所以它们关于过交点P的直径EF对称．设圆心为O，AB中点为M，则∠OMA=90°，OM=

$\sqrt{OA^2-AM^2}=\sqrt{42^2-39^2}=9\sqrt{3}$．从而Rt△OMP中，$\angle OPM=\frac{\pi}{3}$．

$\angle DPO=\angle OPM=\frac{\pi}{3}$，$\angle CPM=\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$．

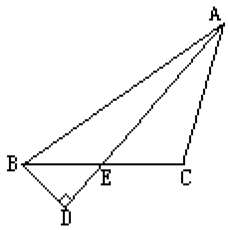
$\overset{\frown}{AC}$含角为$\frac{\pi}{3}$，所以弓形AC的面积

$$S_1=\frac{1}{2}\times 42^2\times\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\times 42^2$$

$$\begin{aligned}m\pi-n\sqrt{d}&=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times PA\times PC+S_1\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}\times PA\times PB+S_1\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}\times PE\times PF+S_1\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(42+18)(42-18)+\frac{1}{2}\times 42^2\times\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\times 42^2\\&=294\pi-81\sqrt{3}\end{aligned}$$

m+n+d=294+81+3=378

C2-045 在△ABC中，$AB=\sqrt{30}$，$AC=\sqrt{6}$，$BC=\sqrt{15}$．有一个点D使得AD平分BC并且∠ADB是直角．比值$\frac{S_{\triangle ADB}}{S_{\triangle ABC}}$能写成$\frac{m}{n}$的形式，这里m、n是互质的正整放．求 m+n．



【题说】 第十四届（1996 年）美国数学邀请赛题 13．

【解】 设BC中点为E．（如图），$AD=\frac{x}{2}$．

由中线公式易得 $AE=\frac{\sqrt{57}}{2}$

由勾股定理

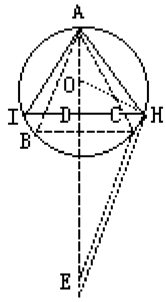
$$(\sqrt{30})^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{57}}{2}\right)^2$$

即
$$120-15+57=2\sqrt{57}x$$

$$\frac{m}{n}=\frac{S_{\triangle ADB}}{2S_{\triangle AEB}}=\frac{AD}{2AE}=\frac{x}{2\sqrt{57}}=\frac{120-15+57}{4\times 57}=\frac{27}{38}$$

m+n=27+38=65

C2-046 在已知圆内求作内接等腰三角形，使这个等腰三角形的底与其底上的高的和为极大．

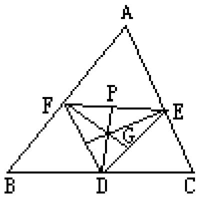


【题说】 1956 年上海市赛决赛题 5.

【解】 如图，任作一圆内接等腰三角形 ABC，并作高 D，延长 AD 至 E，使 DE=BC，则 AE 为底与底上的高的和．连结 EC，由 DC∶DE=1∶2 知 EC 的方向确定．在与 EC 平行的各直线中，能使 AE 最大，且与圆有公共点时应为圆的切线．

因此，作与 EC 平行的切线切圆于 H．连 AH 并在圆上取 I 使 AI=AH，则△AIH 即为所求．

C2-047 由密度均匀的金属细丝绷成一个三角形框架，求这个三角形框架重心的位置．



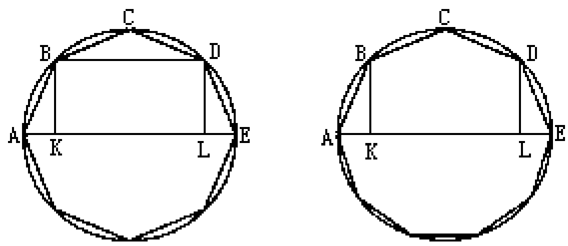
【题说】 1962 年成都市赛高三二试题 3.

【解】 边 BC、CA、AB 的重心即各自的中点 D、E、F．问题化为在 D、E、F 处分别放有质量 a、b、c，求 D、E、F 的重心．

设△DEF中，∠EDF的平分线为DP，则 $\frac{EP}{PF}=\frac{DE}{DF}=\frac{\frac{1}{2}AB}{\frac{1}{2}AC}=\frac{c}{b}$．因此 P 是 E、F 的重心．从而 D、E、F 的重心在 DP 上．同理这重心在∠DEF 的平分线上．因此 D、E、F 的重心即△DEF 的内心 G．

G 也是金属框架的中心．

C2-048 正 n 边形（n＞5）的最长对角线与最短对角线的差等于边长，求 n．



图a 图b

【题说】 第二届（1968 年）全苏数学奥林匹克九年级题 1.

【解】 设 a_n 是边，D_n 和 d_n 是最长的和最短的对角线．

当 n=6 和 n=7 时，由三角形两边之差小于第三边，即得 $D_n-d_n<a_n$.

当 n=8 时（如图 a），从最短对角线 BD 的端点向最长的对角线 AE

作垂线 BK 和 DL．∠ABK=90°-∠BAK=22.5°＜30°．所以，AB= a_8＞2AK=D_8-d_8．

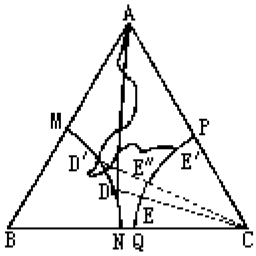
当 n=9 时（如图 b），同理有∠ABK=30°，所以 AB= a_9=2AK=D_9-d_9．

当 n＞9 时，考虑半径为 1 的圆的内接正 n 边形．显然，D_n≥D_9，d_n＜d_9，a_n＜a_9．

因此，D_n-d_n＞D_9-d_9=a_9＞an．

综上所述，n=9．

C2-049　一个战士想要查遍一个正三角形（包括边）区域内或边界上有无地雷，他的探测器的有效度等于正三角形高的一半．这个战士从三角形的一个顶点开始探测．问他循怎样的探测路线才能使查遍整个区域的路程最短．



【题说】　第十五届（1973 年）国际数学奥林匹克题 4．本题由南斯拉夫提供．

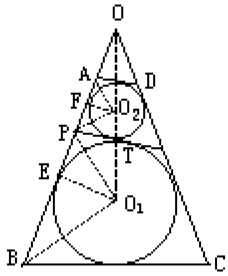
【解】　设战士从顶点 A 出发探测正三角形区域 ABC，△ABC 的高为 2d．以 B 为圆心，d 为半径作圆与 AB、BC 分别交于 M、N；C 为圆心，d 为半径作圆与 AC，BC 分别交于 P、Q．

由题设，战士到达$\overset{\frown}{MN}$上和$\overset{\frown}{PQ}$上都至少一次．不妨设他先到达$\overset{\frown}{MN}$上的D′点，后到达$\overset{\frown}{PQ}$上的E′点．设D为MN的中点．连结AD、CD、CD′分别与$\overset{\frown}{PQ}$交于E、E″．则不难看出战士走过的路不短于 AD′+D′E′≥AD′+D′E″≥AD+DE，后一个不等式是由于 AD+DC≤AD′+D′C．同时由于 D 与 AC 的距离为 d，可见战士沿路线 ADE 就可以完成搜索任务，因此 ADE 就是最短路径．还有

一条最短路径是先到$\overset{\frown}{PQ}$后到$\overset{\frown}{MN}$．最短路径的长度不难算出为

$$\left(\frac{\sqrt{7}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)AB$$

C2-050　已知两个半径分别为 R 和 r 的圆，作出一些不同的梯形 ABCD，使得每个圆与梯形的两条腰及一条底边相切．求出腰 AB 可取的最小长度．



【题说】 第八届（1974 年）全苏数学奥林匹克九年级题 2．

【解】 当⊙O_1（R）与⊙O_2（r）外离或外切或相交时，才有符合题意的梯形存在．不妨设两圆外切于 T 点，梯形 ABCD 的一腰 AB 分别切⊙O_1 与⊙O_2 于 E 与 F，如图，过 T 点作这两圆的公切线交 EF 于 P 点，延长梯形的两腰交于 O 点．则

△O_1PE∽△PO_2F 及△BO_1E∽△O_2AF，于是，PE·PF= Rr 及 BE·AF =Rr．

又 $$PT = PE = PF = \sqrt{Rr}$$

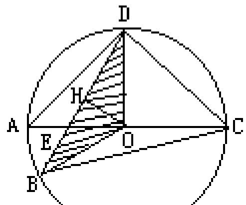
$$BE + AF \geq 2\sqrt{BE \cdot AF} = 2\sqrt{Rr}$$

所以，梯形的腰长

$$AB = BE + PE + PF + AF \geq 4\sqrt{Rr}$$

可见当且仅当$BE = AF = \sqrt{Rr}$（即A点位于O，F之间）时，梯形的腰的最小长度为$4\sqrt{Rr}$．但如果$AF \geq OF$（即A点位于O点及FO的延长线上），也就是$\sqrt{Rr} \geq \sqrt{Rr} \cdot \frac{2r}{R-r}$，即$R \geq 3r$时，梯形不存在．因此，为使本题有解还要 R＜3r 这一附加条件，这样，就不难画出符合题意的梯形 ABCD．

C2-051 E 是某圆直径 AC 上的定点．经过点 E，求作弦 BD，使四边形 ABCD 的面积为最大．



【题说】 第十四届（1980 年）全苏数学奥林匹克九、十年级题 2．

【解】 设 O 为圆心，R 为圆的半径，OE= a，则

$$S_{OED} : S_{ACD} = a : 2R$$

$$S_{OEB} : S_{ABC} = a : 2R$$

所以

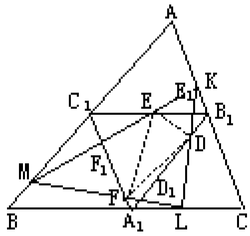
$$S_{OBD} = \frac{a}{2R} S_{ABCD}$$

从而，问题转化为求$S_{OBD} = \frac{1}{2}R^2\sin\varphi$（其中$\varphi = \angle BOD$）的最大值$(\varphi = \frac{\pi}{2})$．

所以$a \geq R/\sqrt{2}$时，弦BD应与圆心相距$R/\sqrt{2}$，当$a < R/\sqrt{2}$时，弦BD

应与直径 AC 垂直．

C2-052　已知△ABC 的面积为 1，设 A_1、B_1 和 C_1 分别是边 BC、CA 和 AB 的中点，如果 K、L 和 M 分别位于线段 AB_1、CA_1 和 BC_1 上，那么△$A_1B_1C_1$ 和△KLM 的公共部分的最小面积是多少？



【题说】　第八届（1974 年）全苏数学奥林匹克十年级题 6．

【解】　设△$A_1B_1C_1$ 的三边与△KLM 的三边的交点为 D、D_1、E、E_1、F、F_1，如图所示，且它们的公共部分的面积记为S．因为A_1B_1∥BA，D在B_1D_1内，所以$\frac{A_1D_1}{D_1D}\le\frac{BM}{MA}\le\frac{BC_1}{C_1A}=1$，于是 $A_1D_1\le D_1D$，因此，

$$S_{\triangle A_1D_1F}\le S_{\triangle D_1DF}$$

同理，$S_{\triangle B_1E_1D}\le S_{\triangle E_1ED}$

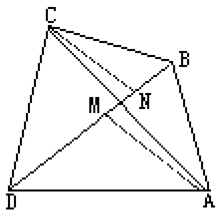
$$S_{\triangle C_1F_1E}\le S_{\triangle F_1FE}$$

所以　$S_{\triangle A_1B_1C_1}-S\le S_{\triangle D_1DF}+S_{\triangle E_1ED}+S_{F_1FE}$

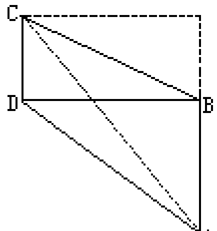
$=S-S_{\triangle DEF}\le S$

即$2S\ge S_{\triangle A_1B_1C_1}=\frac{1}{4}$，亦即$S\ge\frac{1}{8}$．当点M和$C_1$重合，点L和C重合，点K和A重合时，S取得最小值$\frac{1}{8}$．

C2-053　在一个面积为 32cm² 的平面凸四边形中，两条对边和一条对角线的长度之和为 16cm，试确定另一条对角线的所有可能长度．



图a



图b

【题说】　第十八届（1976 年）国际数学奥林匹克题 1．本题由捷克斯洛伐克提供．

【解】　设凸四边形 ABCD（图 a）的面积为 32cm²．

$$AB+BD+CD=16cm$$

于是　　　　$32=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}$

$$=\frac{1}{2}(AM+CN)BD$$

$$\le\frac{1}{2}(AB+CD)\cdot BD$$

$$\le\frac{1}{2}\left(\frac{AB+CD+BD}{2}\right)^2$$

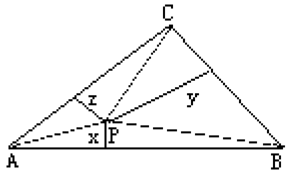
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{16}{2}\right)^2=32$$

故式中应取等号，从而 AB+CD=DB=8，

则 AB⊥DB，CD⊥DB（图 b）．因此，

对角线 $AC=\sqrt{(AB+DC)^2+DB^2}=\sqrt{128}=8\sqrt{2}cm$

C2-054　设三角形三边长为 3、4、5，P 为这三角形内一点，求 P 到这三角形三边距离乘积的最大值．



【题说】　1979 年陕西省赛二试题 7．

【解】　如图，设 BC=3，CA=4，AB=5．点 P 到 AB、BC、CA 的距离分别为 x、y、z，因

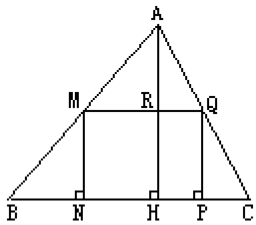
$$5x+3y+4z=12$$

所以当 $5x=3y=4z=\frac{12}{3}=4$ **时，乘积**

$$5x\cdot 3y\cdot 4z=64$$

为最大．故 xyz 的最大值为 16/15．

C2-055　在已知锐角△ABC 中作内接正方形，试求其面积最大者．



【题说】　1979 年云南省赛二试题 7．

【解】　如图，内接正方形 MNPQ 有两个顶点在 BC 上．边长为 x_a，面积为 S_a，则

$$\frac{x_a}{a}=\frac{h_a-x_a}{h_a}=\frac{h_a}{a+h_a}$$

故

$$x_a=\frac{ah_a}{a+h_a}$$

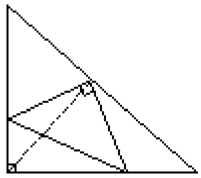
其中 a= BC，h_a= AH．

设△ABC 中，c≥b≥a，熟知

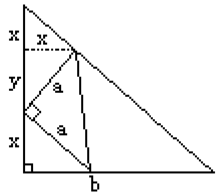
$$a+h_a\ge b+h_b\ge c+h_a$$

所以在锐角△ABC 三边上的三个内接正方形中，最小边上的内接正方形的面积最大．

C2-056　已知两个等腰直角三角形，将一个的三个顶点分别放在另一个三角形的三条边上，问这两个三角形的面积之比最小值是多少？



图a



图b

【题说】　第十三届（1979 年）全苏数学奥林匹克八、九年级题 1．

【解】$\frac{1}{5}$．

较小三角形的直角顶点位置有两种情况：

（1）当放在较大三角形的斜边上时，（如图 a）两个三角形直角边的比小于
1/2，它们的面积之比不小于 1/4．

（2）当放在较大三角形的直角边上时（如图 b），$x^2+y^2=a^2$，且 $b=2x+y\leq\sqrt{5}a$．它们的面积比不小于 $\frac{1}{5}$．

C2－057　已知边长为 4 的正三角形 ABC，D、E、F 分别是 BC、CA、AB上的点，且|AE|＝|BF|＝|CD|＝1，连接AD、BE、CF，交成△RQS，P 点在△RQS 内及其边上移动，P 点到△ABC 三边的距离分别记作 x、y、z．

1．求证：当 P 点在△RQS 的顶点位置时，乘积 xyz 有极小值．

2．求上述乘积的极小值．

【题说】　1982 年全国联赛题 4．

【解】　如图 a，第一步，先固定 x，考虑 yz 最小值．即过 P 作直线 l∥BC，当 P 在 l 上变化时，yz 何时最小？

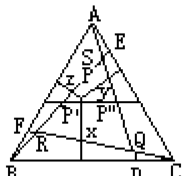


图 a

第二步，证两个引理：

引理 1：z+y+z=定值，这个定值就是△ABC 的高．

引理2：设y∈[α，β]，y的二次函数y（a－y）在[α，β]的一个端点处取得最小值．

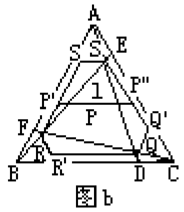
这两个引理很容易证明．由此不难得到结论：如果 P′、P″为 l 上两点，那么当 P 在区间[P′，P″]上变动时，xyz 在端点 P′或 P″处取得最小值．

第三步，扩大 P 点的变化区域：

根据上面所述，当 P 点在 l 上变动时，xyz 的值在 P′或 P″处为最小，这里 P′、P″是 l 与△RQS 的边界的交点．但△RQS 的边不与△ABC

的边平行，因而在P移到△RQS的边界后，不能搬用上述方法再将P′或P″调整为△RQS的顶点．

但是我们可以把P′点变化区域由△PQR扩大为图b所示的六边形RR′QQ′SS′，其中RR′∥Q′S∥CA，R′Q∥SS′∥BC，QQ′∥RS′∥AB，也就是说：



图b

R′与R关于∠ABC的平分线为对称．

S′与R关于∠ACB的平分线为对称，等等．

过P作平行于BC的直线l，将P调整为l与六边形RR′QQ′SS′的边界的交点P′（或P″），再将P′调整为顶点R或S′，每一次调整都使xyz的值减小．

由于对称，xyz在六个顶点R、R′、Q、Q′、S、S′处的值显然相等，因而命题成立．

2．由题易知，△ABE≌△BCF≌△CAD，从而△AER≌△BFQ≌△CDS，△RQS是正三角形．

由1，我们只考虑S点x，y，z的取值．

由于△ARE∽△ADC，故$|AR|:|RE|=4:1$．

由于△AFS∽△ABD，故$|AS|:|SF|=4:3$．

所以$|AR|:|RS|:|SD|=4:8:1$，又由于△ABC的高$h=\sqrt{12}$，故可求得

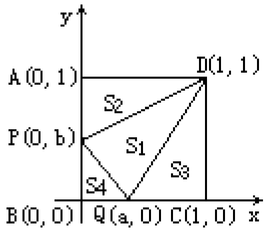
$$x=\frac{1}{13}h, y=\frac{9}{13}h, z=\frac{3}{13}h$$

$$xyz=\frac{1}{13}\cdot\frac{9}{13}\cdot\frac{3}{13}\cdot\left(\sqrt{12}\right)^3=648\sqrt{3}/2197$$

C2－058　在正方形ABCD的边AB、BC上分别取点P、Q，连接DP、DQ、PQ，分别记△DPQ、△DAP、△DQC和△PBQ的面积为S_1、S_2、S_3、S_4，问点P、Q如何选取时，$S_1^2+S_2^2+S_3^2+S_4^2$取最小值？

【题说】第二届（1987年）东北三省数学邀请赛题5．

【解】不妨设正方形边长为1．如图建立坐标系．设P（0，b）与Q（a，0），于是，



$$S_2=\frac{1}{2}(1-b)$$

$$S_3=\frac{1}{2}(1-a)$$

$$S_4=\frac{1}{2}ab$$

$$S_1=1-S_2-S_3-S_4$$
$$=\frac{1}{2}(a+b-ab)$$

从而 $S_1^2+S_2^2+S_3^2+S_4^2$

$$=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2-a-b+1+ab-a^2b-ab^2+a^2b^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}[\left(b^2-b+1\right)a^2-\left(b^2-b+1\right)a+\left(b^2-b+1\right)]$$

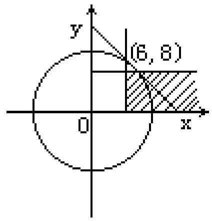
$$=\frac{1}{2}\left(a^2-a+1\right)\left(b^2-b+1\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]\left[\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right] \quad (1)$$

显然，$a=\frac{1}{2}$**，**$b=\frac{1}{2}$**时，（1）右端取最小值**$9/32$**．即**P、Q**分别选为线段**AB、BC**的中点时，**$S_1^2+S_2^2+S_3^2+S_4^2$**取得最小值**$9/32$**．**

C2－059 边长为 5 的菱形，它的一条对角线的长不大于 6，另一条不小于 6，求这个菱形两条对角线长度之和的最大值．

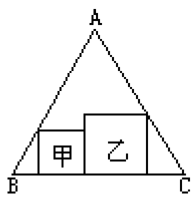
【题说】1987 年全国联赛一试题 1（2）．原题为选择题．



【解】设菱形的两条对角线长分别为 x 及 y，则由已知$\begin{cases}x^2+y^2=100\\x\geq 6\\y\leq 6\end{cases}$

考虑平行直线族 x+y=c．当直线过点（8，6）时，得 x+y 的最大值 14．

C2－060 在边长为 10 的正三角形 ABC 中，以如图所示的方式内接两个正方形（甲、乙两个正方形有一边相重迭，都有一边落在 BC 上，甲有一顶点在 AB 上，乙有一顶点在 AC 上）．求这样内接的两个正方形面积和的最小值．



【题说】 1988年北京市赛高一题 3．

【解】 设甲、乙两正方形的边长分别为 x、y，易知 BC 边上的四条线段之和为：

$$\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)x+\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)y=10$$

记$1+\frac{\sqrt{3}}{3}=k$,则$y=\frac{10}{k}-x.$

记甲、乙两正方形面积之和为 S，则有

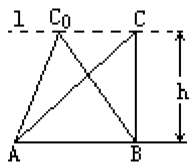
$$S=x^2+\left(\frac{10}{k}+x\right)^2$$

$$=2\left(x-\frac{5}{k}\right)^2+\frac{50}{k^2}$$

当$x=\frac{5}{k}=\frac{5}{1+\sqrt{3}/3}=\frac{5}{2}\left(3-\sqrt{3}\right)=y$时，S取得最小值：

$$\frac{50}{k^2}=\frac{450}{\left(3+\sqrt{3}\right)^2}=\frac{25}{2}\left(3-\sqrt{3}\right)^2$$

C2－061 考虑所有底 AB 固定，C 点引出的高为常数的△ABC，什么时候它的高的乘积为最大？



【题说】1990年亚太地区数学奥林匹克题 3．

【解】 $h_a a=h_b b=hc$，得

$$h_a h_b h=\frac{h^3c^2}{ab}$$

欲使 h_ah_bh 最大，只要 ab 最小．

当 a=b 时，△ABC 为等腰三角形．记这时的 C 为 C_0（如图），且不妨设 C_0 与 C 在 AB 同侧，由 CC_0 确定的直线 l∥AB，两者距离为 h，显然 C 点的轨迹为直线 l，这时△ABC 的外接圆 O 在 C_0 处的切线即为 l，而 C 点在⊙O 外，因此，∠ACB＜∠AC_0B，于是

$$CA\times CB=\frac{ch}{\sin\angle ACB}>\frac{ch}{\sin\angle AC_0B}=C_0A\times C_0B$$

即当 C 与 C_0 重合时，ab 最小，此时三条高乘积最大．

C2－062 在△ABC 中，AB=9，BC：CA=40：41，这个三角形可能有的最大面积是多少？

【题说】 第十届（1992年）美国数学邀请赛题 13．

【解】 设 AB=c，AC=rb，BC=ra，（a＜b，r＞0）AB 上按

$\lambda=\frac{a}{b}$内外分点分别为E、F．那么，C点轨迹是以EF为直径的圆（Apollonius 圆）．因此，当该圆半径为△ABC 的高时，它有最大面积．

若λ $=\frac{40}{41}$，该圆半径为

$$R=\frac{\lambda c}{\lambda^2-1}=\frac{9\times\left(\frac{40}{41}\right)}{\left(\frac{40}{41}\right)^2-1}=1640/9$$

因此，$\max S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}R\cdot c=820$.

[别解] 设 BC=40k，AC=41k，AB=9，则

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{(81k+9)(81k-9)(9-k)(9+k)}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{81\left(81k^2-1\right)\left(81-k^2\right)}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{\left(81k^2-1\right)\left(81^2-81k^2\right)}$$

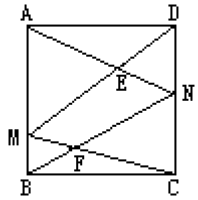
$$\le\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(81k^2-1+81^2-81k^2\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(81^2-1\right)=820$$

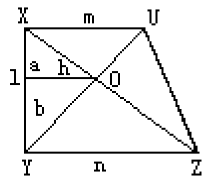
当 k=1 时，达到最大值.

C2－063 如图，边长为 1 的正方形 ABCD 的一组对边 AB、CD 上各取一点 M、N，AN、DM 交于 E，BN、CM 交于 F．试求四边形 EMFN 的最大面积，并指出 M，N 在何位置时可取此最大值.

【题说】 1993 年河北省高中数学联赛二试题 2．本题由第 24 届加拿大数学奥林匹克题 3 改编而来（见 C2-034）.



图a



图b

【解】 首先考察图中直角梯形 XYZU，其上、下底分别为 m、n，直角腰长为 1．显然△XYO 与 UZO 等积．令其面积为 t，过 O 的高长为 h，这高将 XY 分为长为 a、b 的两段，则

$\frac{h}{m}=b$，$\frac{h}{n}=a$,所以$\frac{h}{m}+\frac{h}{n}=1$，从而$h=\frac{mn}{m+n}$，$t=\frac{mn}{2(m+n)}$.

现在令 AM=x，CN=y，则 MB=1-x，DN=1-y．根据对直角梯形的考察可得△MEN面积 $=\frac{x(1-y)}{2(1+x-y)}$,△MFN面积 $=\frac{y(1-x)}{2(1+y-x)}$．故四边形MFNE面积 $=\frac{x(1-y)}{2(1+x-y)}+\frac{y(1-x)}{2(1+y-x)}=\frac{x(1-x)+y(1-y)}{2[1-(x-y)^2]}$.

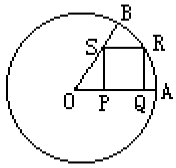
因为$2[x(1-x)+y(1-y)]\le 1(x-y)^2 \Leftrightarrow (x+y-1)^2\ge 0$

所以$\frac{x(1-x)+y(1-y)}{2(1-x(x-y^2))}\le\frac{1}{4}$，即四边形MFNE面积的最大值为$\frac{1}{4}$.

这最大值当 x+y=1 时（即 M，N 连线平行于正方形的底边时）达到．

C2－064 在单位圆内，扇形AOB的顶角在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内变动，PQRS是该扇形的内接正方形（如图）．试求 OS 的最小值．

［题设］1993 年四川省高中数学联赛题 5（2）．



【解】 设∠AOB=θ，OS=l，则各点坐标为 P（lcosθ，0），S（lcosθ,lsinθ），R（$\sqrt{1-l^2\sin^2\theta}$,lsinθ），Q（$l-l^2\sin^2\theta$，0）．

因PS＝SR，所以，$l\sin\theta=\sqrt{1-l^2\sin^2\theta}$．从而，有$l-l^2\sin^2\theta=l^2$（sinθ+cosθ）²=l²（l+sin²θ）．

故 $$l^2=\left(\frac{3}{2}+\sin2\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\right)^{-1}$$

$$f(\theta)=\frac{3}{2}+\sin2\theta-\frac{1}{2}\cos2\theta$$

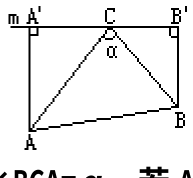
$$=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt5}{2}\sin(2\theta-\varphi)\left(\cos\varphi=\frac{2}{\sqrt5},\sin\varphi\frac{1}{\sqrt5}\right)$$

当sin（2θ -φ） ＝1时，f（θ）为最大，这时$f(\theta)=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt5}{2}$,从而

$$l\text{的最小值为}\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt5}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{-1}=\frac{\sqrt5-1}{2}$$

C2－065 在平面上有三个不同的点 A、B、C．构造一条过 C 点的直线 m，使得 A，B 两点到 m 的距离的积最大．对于每组点 A、B、C，这样的 m 是否唯一？

【题说】 1995 年城市数学联赛高年级普通水平题 4．



【解】设 BC=a，AC=b，∠BCA=α．若 A、B 在直线 m 的同侧，令θ是 m 与 CA 的夹角，则 m 与 CB 的夹角是π－α－θ．A、B 两点到 m 的距离之积为

$$ab\sin\theta\sin(\pi-\alpha-\theta)=\frac{ab}{2}(\cos\alpha-\cos(\alpha+2\theta))$$

最大值为$\frac{ab}{2}$（cosα+1），在$\theta=\frac{\pi-\alpha}{2}$，即m是∠ACB的外角平分

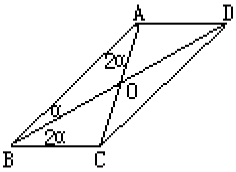
线时取得最大值．同理，若 A、B 两点分居 m 两

侧，则最大值为 $\frac{ab}{2}$（cosα -1），这时m是∠ACB的平分线．因为

$$\cos\alpha+1>1-\cos\alpha \Leftrightarrow \alpha>\frac{\pi}{2}$$

所以，若α是锐角，则 m 是∠ACB 的外角平分线；若α是钝角，则 m 是∠ACB 的平分线；若α是直角，则 m 是∠ACB 的平分线或外角平分线，此时 m 不唯一．

C2－066 在平行四边形 ABCD 中，设 O 是对角线 AC 与 BD 的交点．∠CAB 与∠DBC 每一个都是∠DBA 的两倍，∠ACB 是∠AOB 的 r 倍．求不超过 1000r 的最大整数．



【题说】 第十四届（1996 年）美国数学邀请赛题 15．

【解】 设∠DBA=α．由于∠CAB=∠CBO=2α，所以

△CAB∽△COB

$$CB^2=CO\times CA=\frac{1}{2}CA^2$$

在△ABC 中，由正弦定理

$$\frac{\sin3\alpha}{\sin2\alpha}=\frac{AC}{BC}=\sqrt{2}$$

即

$$3-4\sin^2\alpha=2\sqrt{2}\cos\alpha$$

所以

$$4\cos^2\alpha\,2\sqrt{2}\cos\alpha-1=0$$

解得

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\alpha=15°$$

∠ABO=180°-3×15°=135°

∠ACB=135°-2×15°=105°

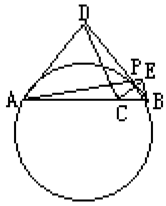
所以

$$r=\frac{105}{135}=\frac{7}{9}$$

$$1000r=\frac{7000}{9}=777\frac{7}{9}$$

答案为 777．

C2－067 在给定线段 AB 上任取一点 C，以 AC、CB 为底向同一侧作正三角形 ACD 及 CBE，连 AE 和 BD 相交于 P 点，求 P 点的轨迹．



【题说】 1958 年武汉市赛高三初赛题 3．

【解】 在△ACE 与△DCB 中，AC=DC，CE=CB

∠ACE=∠DCB=120°

所以 △ACE≌△DCB

从而 ∠EAC=∠BDC

A、C、P、D 四点共圆

∠DPA=∠ACD=60°

∠APB=180°-60°=120°

所以 P 点轨迹是以 AB 为弦，圆周角为 120°的圆弧．

C2－068 设在线段 AB 上有一点 M,并在线段 AB 的同一侧以线段 AM、MB 为一边分别作正方形 AMCD 和 MBEF.这两个正方形的外接圆(分别以 P、Q 为圆心）除点 M 外还交于点 N．

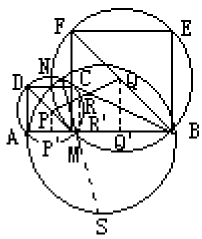
（a）求证：AF、BC 通过 N 点；

（b）证明：直线 MN 总是过一定点；

（c）当 M 在 A、B 之间变动时，求线段 PQ 中点的轨迹．

【题说】 第一届（1959 年）国际数学奥林匹克题 5．本题由罗马尼亚提供．

【解】如图，



（a）连线段 AN、NF、BC 和 CN，则

∠ANM=∠ADM=45°

∠MNF=180°－∠MBF=135°

所以 ∠ANF=∠ANM+∠MNF

=45°+135°=180°

N 位于 AF 上．因线段 AC 是直径，∠ANC=90°；又∠ANB=∠ANM+∠MNB=45°+45°=90°．因此 C 位于 BN 上，即 AF 和 BC 交于 N．

（b）因∠ANM=∠MNB=45°，直线 NM 平分∠ANB．所以，NM 的延长线通过直径为 AB 的下半圆周的中点 S．

（c）设 PP′，QQ′和 RR′分别是过 P，Q 和线段 PQ 的中点 R 到 AB 的垂线，则

$$RR' = \frac{1}{2}\left(PP' + QQ'\right) = \frac{1}{2}\frac{AM+MB}{2} = \frac{AB}{4}$$

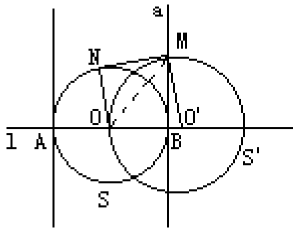
即 R 到 AB 的距离是常值.当 M=A 时,P′=A,AQ′=AB/2,AR′=AB/4.当 M=B 时，Q′=B．P′B=AB/2．R′B=AB/4．于是 R 的轨迹是长为 AB/2 的线

段，平行于线段 AB 且与 AB 的距离为 AB/4．

C2－069 在平面上给定一个圆 S 及过圆心 O 的直线 l．过 O 任作一圆心在 l 上的圆 S′．求 S 与 S′的公切线与 S 相切的切点 M 的集合．

【题说】 1962 年全俄数学奥林匹克八年级题 2．

【解】 设 S 的圆心为 O′，l 交⊙O 于 A、B，MN 是 S、S′公切线，则有



∠NOM=∠OMO∠（ON∥O′M）

但又有　　∠O′OM=∠OMO′

（O′O=O′M）

于是　　∠NOM=∠O′OM

而有　　△NOM≌△BOM

因此　　∠MBO=∠MNO=90°

即　　MB⊥l

反之，若 M 是过 B 而垂直 l 的直线上一点，过 M 作 MN 切⊙O 于 N，连 ON．又作 MO′∥NO，交 l 于 O′，则易证 O′M=O′O，且 O′M⊥NM．故以 O′为圆心、 OO′为半径的圆 S′切 MN 于 M．即 M 是 SS′公切线与 S′的切点．

因此轨迹是 l 的分别过 A、B 的两条垂线．

C2－070 如果 A、B 是已知圆上的固定点，与圆心不共线，XY 为变直径．求 P 点（AX 与 BY 交点）的轨迹．

【题说】 第五届（1973 年）加拿大数学奥林匹克题 6．第五届（1976 年）美国数学奥林匹克题 2．

【解】 P 点可以在圆外（图 a），也可以在圆内（图 b）．

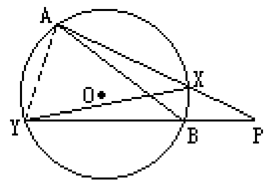


图 a

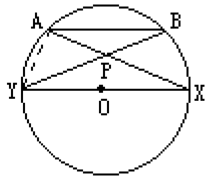


图 b

在图 a 的情形，∠AYB 为定角α，∠PAY=90°，因而∠APB 为定角 90°-α，所以 P 点的轨迹为对 AB 张角为 90°-α的弓形弧

$\overset{\frown}{AB}$（优弧）．

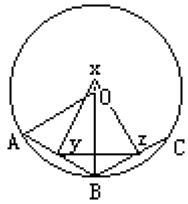
在图 b 的情形，∠APB=∠AYB+∠XAY=α+90°亦为定角．所以

P点的轨迹为对AB张角为90°+α的弓形弧$\overset{\frown}{AB}$（劣弧）．

因二者所对弦 AB 相同，且张角互补，故合成一圆．因此，P 点轨迹为以 AB 为弦的圆．其半径容易算得为 R=AB/2sin（90°-α）．

C2－071 以点 O 为中心的正 n 边形（n≥5）的两个相邻顶点记为 A、

B．△xyz 与△OAB 全等．最初令△xyz 重合于△OAB，然后在平面上移动△xyz，使点 y 和 z 都沿着多边形的周界移动一周，而点 x 保持在多边形内移动，求点 x 的轨迹．



【题说】 第二十七届（1986 年）国际数学奥林匹克题 4．本题由冰岛提供．

【解】因△xyz≌△OAB，所以 ∠yxz=180°-2∠ABO

=180°-∠yBz

故 x、y、B、z 四点共圆．从而

∠yBx=∠yzx=∠yBO

可知 Bx 与 BO 重合，即 x 在 BO 延长线上．

由正弦定理知

$$Bx=xy\cdot \sin\angle xyB/\sin\angle yBx$$

$$= xy\cdot \sin\angle xyB/\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}$$

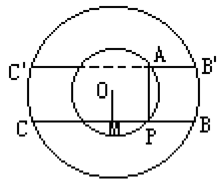
由于∠xyB的变化范围是：$\frac{(n-2)\pi}{2n}\le\angle xyB\le\pi-\frac{(n-2)\pi}{2n}$．所以点 x 到中心 O 的最大距离是

$$d=\left[xy/\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)\right]-OB=a\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)/\sin\frac{2\pi}{n}$$

其中 a 为正 n 边形一边的边长．

可见，当点 y 在 AB 上变化时，点 x 恰好在 BO 延长线上由 O 点出发描绘了长度为 d 的线段两次．所以，x 的轨迹是由正 n 边形的中心背向每一顶点的长度为 d 的线段所组成的“星形”．

C2－072 考虑在同一平面上半径为 R 与 r（R＞r）的两个同心圆．设 P 是小圆周上的一个定点，B 是大圆周上的一个动点，直线 BP 与大圆周相交于另外一点 C．过点 P 且与 BP 垂直的直线 l 与小圆周相交于另一点 A（如果 l 与小圆相切于 P，则 A=P）．



（i）求表达式 $BC^2+CA^2+AB^2$ 所取值的集合；

（ii）求线段 AB 的中点的轨迹．

【题说】 第二十九届（1988 年）国际数学奥林匹克题 1．本题由卢森堡提供．

【解】 （i）设两圆圆心为 O，过 O 作 OM 与 BC 垂直，且交 BC 于M．设$AP=2t$，则$OM=\frac{1}{2}AP=t$，于是

$$BC=2BM=2\sqrt{R^2-t^2}$$

$BP^2+CP^2=(BM-PM)^2+(BM+MP)^2=2(BM^2+PM^2)$

即 $BP^2+CP^2=2(R^2-t^2)+2(r^2-t^2)=2(R^2+r^2)-4t^2$

于是 $BC^2+CA^2+AB^2=BC^2+(PC^2+PA^2)+(BP^2+PA^2)$

$=BC^2+BP^2+CP^2+2PA^2$

$=4(R^2-t^2)+2(R^2+r^2)-4t^2+2PA^2$

$=6R^2+2r^2-8t^2+2(2t^2)=6R^2+2r^2$

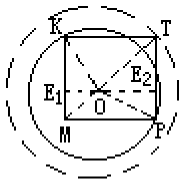
故 $BC^2+CA^2+AB^2$ 的值集为 $\{6R^2+r^2\}$．

（ii）过 A 作直线平行于 CB，交大圆周于 C′及 B′两点，易见 PBB′A 为一矩形，因此线段 AB 的中点 G 也就是线段 PB′的中点．当 B 在大圆周上变动一周时，B′也在大圆周上变动一周．因此，以 P 为位似中心，1/2 为相似比作位似变换，则大圆周就变成 G 点的轨迹，即 G 点轨迹是以线段 OP 的中点为圆心，以 R/2 为半径的圆周．

C2－073 给定圆 O 及内部一定点 M．考虑所有矩形 MKTP，其顶点 K、P 在给的圆周上，求点 T 的轨迹．

【题说】 第十六届（1990 年）全俄数学奥林匹克十年级题 8．

【解】 设⊙O 半径为 R，OM=l，则 T 点的轨迹是以 O 为圆心，$R_1=(2R^2-l^2)^{\frac{1}{2}}$为半径的圆S．



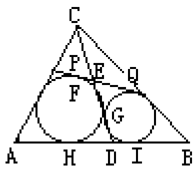
事实上，设 MKTP 是符合条件的一个矩形，过 O 分别引 OE_1⊥MK 于E_1，OE_2⊥PT于E_2，则由勾股定理$OT^2+OM^2=OK^2+OP^2$ $=OE_1^2+E_1M^2+OE_2^2+E_2T^2$，因此$OT=\sqrt{2R^2-l^2}$（若M = 0，则1 = 0，上式也成立）即T在圆S上．

反之，对 S 上任意一点 T，设 P 是给定圆周与以 MT 为直径的半圆的交点，作符合题设的矩形 MPT_1K，由于 T、T_1 均在∠KMP 内部，且 $OT_1=OT=R_1$，故 $T=T_1$．综上所述，S 是所求的轨迹．

C2－074 设 D 是已知三角形 ABC 的边 AB 上任一点，E 是△ACD、△BCD 内切圆的外公切线与 CD 的交点（在△ABC 内部），证明点 E 的轨迹是一段圆弧．

【题说】 第二十届（1989 年）美国数学奥林匹克题 5．

【证】 如图，设 AB 分别切二圆于 H、I，CD 分别切二圆于 F、G，二圆另一公切线为 PQ，P、Q 分别是切点．于是



$$PQ=PE+EQ=EF+EG=2EF+FG.$$

同理，HI=2DG+FG．

因为　　　　　　　PQ=HI

所以　　　　　　　EF=DG

又因为

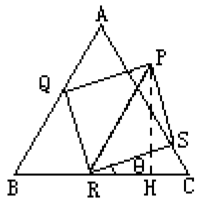
$$CF=\frac{AC+CD-AD}{2}$$

$$DG=\frac{CD+BD-BC}{2}$$

所以　　　　　　　CE=CF-EF=CF-DG=（AC+BC-AB）/2

故 E 点轨迹是以 C 为圆心，（AC+BC-AB）/2 为半径的在△ABC 内部的一段圆弧．

C2－075 正方形 PQRS 的顶点 Q、R、S 分别在边长为 2 的正三角形 ABC 的边 AB、BC、CA 上滑动，求 P 点的轨迹．



【题说】 第一届（1990 年）希望杯高二二试题 3（3）．

【解】 设∠SRC=θ，RS=x，P 到 BC 距离 PH=h，则

$$h＝PR\sin（45°+θ）=\sqrt{2}x\sin（45°+θ）\qquad (1)$$

在△RSC 和△QRB 中用正弦定理，有

$$\frac{x\cdot\sin(60°+θ)}{\sin 60°}=BR$$

$$\frac{x\cdot\sin[60°-(90°-θ)}{\sin 60°}=RC$$

相加得

$$x[\sin（60°＋θ）＋\sin（15°-θ）]=2\sin 60°=\sqrt{3}$$

即　$\sqrt{2}x\sin（θ＋45°）＝3-\sqrt{3}$　　　　(2)

由（1）、（2）得$h=3-\sqrt{3}$．这就是说，P点距BC之距离为定值$3-\sqrt{3}$．

设 BC 边的高为 AD．当 R 由 B 向 C 移动时，P 由 AD 上一点向相反方向沿 BC 的平行线移动，直至 QR⊥BC．此时 P 点的轨迹是平行于 BC的线段，它与BC相距为$3-\sqrt{3}$，其长度为2，且与BC构成一矩形．

[评注] 由（2）有

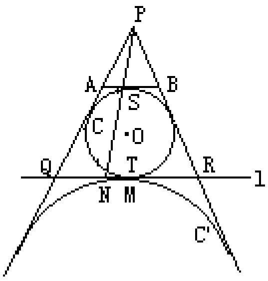
$$x=\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sin(θ+45°)}$$

$$x^2=\frac{3(2-\sqrt{3})}{\sin^2(θ+45°)}\quad(0°\le θ\le 45°)$$

因此，正方形面积，当$θ=0°$时，有最大值$6（2-\sqrt{3}）$；当$θ=45°$时，有最小值$3（2-\sqrt{3}）$．

C2－076 在一个平面中，直线 l 是圆 O 的一条切线，M 为 l 上一点，

试求出具有如下性质的所有点 P 的集合：在直线 l 上存在两个点 Q 和 R，使得 M 是线段 QR 的中点，且圆 O 是三角形 PQR 的内切圆．



【题说】 第三十三届（1992 年）国际数学奥林匹克题 4．本题由法国提供．

【解】 设圆 O 与直线 l 的切点为 T，点 T 关于点 O 的对称点为 S，显然点 S 也在圆 O 之上．

任取一个满足条件的点 P，过 P 作圆 O 的两条切线，设它们与 l 的交点分别为 Q、R．

过 S 作 l 的平行线，设其与 PQ、PR 相交于 A、B．于是圆 O 是△PAB 在 AB 边上的旁切圆，且在该边上的切点为 S．

再作△PQR 在 QR 边上的旁切圆 O′，它与 QR 切于点 N．

由于 AB∥QR，所以△PAB 与△PQR 关于点 P 位似．在此位似变换下，⊙O 变到⊙O′，S 与 O 分别变为 N 和 O′．这表明，点 P 必在直线 NS 上，且 $TR=\frac{1}{2}\left(PR+QR-PQ\right)=QN$ （1）

又由已知 MQ=MR，从而有

NM=MT （2）

亦即 N 点是 T 关于 M 的对称点．

综上所述，P 点必位于直线 NS 之上，其中 N 是点 T 关于点 M 的对称点，S 是点 T 关于点 O 的对称点；且 P 点与 N 点位于点 S 的不同侧．

反之，在直线 NS 任取一与 N 位于 S 的不同侧的点 P，过 P 作圆 O 的二切线，设它们分别与 l 相交于点 Q 和 R，则重复上述作旁切圆的推导过程，仍得（1）式．又因点 N 满足（2）式，因而 QM=MR．可见点 P 确实满足所有条件．

总之，所求 P 点的集合，即为直线 SN 上以 S 为端点、与 SN 方向相反的射线，S 点不包括其内．

C2-077 给定等边△ABC，对于形内任意一点 P，直线 AP 与 BC 交于点 A′，直线 CP 与 BA 交于点 C′．试求点 P 的几何位置．使得线段 AA′与 CC′相等．

【题说】 第五十八届（1995 年）莫斯科数学奥林匹克九年级题 8．

【解】 在 BC 上任取一点 A′，并连线段 AA′．易知，一个端点为 C，另一个端点在边 AB 上的所有线段中，只有两条与 AA′相等，这就是图 a 中 CC′与 CC″，其中 BC′=BA′，AC″=BA′．线段 AA′同 CC′的交点位于△ABC 的高 BH 上，易知，这高的每一点都符合要求．

设 AA′与 CC″的交点为 P．因为△ACC″≌△BAA′，所以

∠APC=180△-（∠PAC+∠PCA）

=180°-（∠PAC+∠PAC″）

$$=180°-\angle CAB=120°$$

这表明点 P 在弧 r 上，弧 r 是由 A、C 及△ABC 的垂心所决定的圆，在△ABC 内的部分．

反之，弧 r 上的点均符合要求．

综上所述，点 P 的集合是高 BH 及弧 r，如图 b 所示．

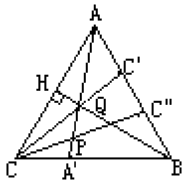


图 a

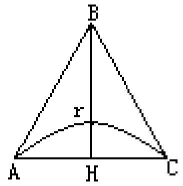


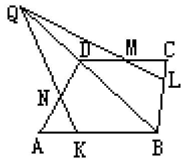
图 b

C2-078 P 是凸四边形 ABCD 所在平面上一点，∠APB、∠BPC、∠CPD、∠DPA 的平分线分别交 AB、BC、CD、DA 于点 K、L、M、N．

1．寻找一点 P，使得 KLMN 是平行四边形．

2．求所有这样 P 点的轨迹．

【题说】 1995 年城市数学联赛高年级高水平题 1．



【解】 1．设 P 是 AC，BD 的垂直平分线的交点，则 PA=PC，PB=PD．因为 PK 平分∠APB，PL 平分∠BPC，所以，

$$\frac{AK}{KB}=\frac{PA}{PB}=\frac{PC}{PB}=\frac{CL}{LB},KL\parallel AC$$

同理，MN∥AC．故 KL∥MN．

同理，LM∥NK，故 KLMN 是平行四边形．

2．设 KLMN 是平行四边形，由角平分线性质可得

$$\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MD}\cdot\frac{DN}{NA}=\frac{PA}{PB}\cdot\frac{PB}{PC}\cdot\frac{PC}{PD}\cdot\frac{PD}{PA}=1 \qquad (1)$$

假设 KN 与 BD 交于点 Q，在△ABD 中应用梅涅劳斯定理，有

$$\frac{DN}{NA}\cdot\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BQ}{QD}=1$$

结合（1）得

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MD}\cdot\frac{DQ}{QB}=1$$

在△BCD 中应用梅涅劳斯定理的逆定理得 Q、M、L 三点共线，从而 KN 与 LM 交于点 Q，矛盾．故 KN∥BD∥LM．因此，

$$\frac{PA}{PB}=\frac{AK}{KB}=\frac{AN}{ND}=\frac{PA}{PD}$$

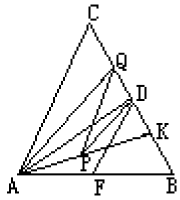
从而 PB=PD．

同理 PA=PC．所以，P 点一定是 AC，BD 的垂直平分线的交点．

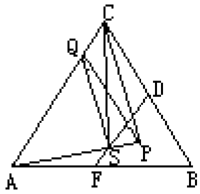
C2-079 已知 P 是△ABC 内部一点，在△ABC 的周界上求一点 Q，使折线 APQ 平分△ABC 的面积．

【题说】 1954年～1955年波兰数学奥林匹克二试题1．

【解】 设BC、CA、AB的中点分别为D、E、F，直线AP交BC于K．不妨设K在线段BD内．



图a



图b

若K=D，取Q=D即可．

若K≠D，又有两种情况：

（1）P不在△DFB内（图a）．连PD，过A作PD的平行线交CD于 Q，则

$$S_{\triangle AKB}+S_{\triangle QPK}=S_{\triangle AKB}+S_{\triangle PDK}+S_{\triangle ADP}=S_{\triangle ADB}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$$

所以Q即为所求．

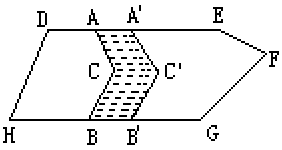
（2）P在△DFB内（图b）．

设AP交DF于S，连PC．作SQ∥PC交AC于 Q，则

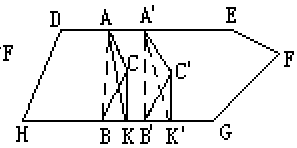
$$S_{\triangle APQ}=S_{\triangle ASQ}+S_{\triangle SQP}=S_{\triangle ASQ}+S_{\triangle SQC}=S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$$

所以Q即为所求．

C2－080 如图，两块水田间有一条曲折的水沟，今要把水沟的两岸变成直线，而每块水田的面积不变．



图a



图b

1．如果A、A′两点不变，则水沟应如何配置？

2．如果A点不变，而要求水沟两岸平行，则水沟又应如何配置？

各说明其方法．

【题说】 1956年上海市赛复赛题3．关键是等积变换．

【解】 1．它的要求是把多边形变成边数少1的等积多边形，且A、A′两点不变．

作法：联AB，作CK∥AB，联AK，仿此作出A′K′（图b）．

2．它的要求可从图b中所得的四边形AA′KK′变成一等积的梯形AKNM，使NM∥AK，如图c中MN为所求的线．

（1）当DA不平行于HK′时，延长A′D与K′H交于T．作A′R∥AK

则 $TR^2:TN^2=S_{\triangle TA'R}:S_{\triangle TA'N}=S_{\triangle TA'R}:S_{\triangle TA'K'}=TR:TK'$

所以 $TN=\sqrt{TR\cdot TK'}$

因此，只要作出TK及TK′的比例中项，定出N点，并作NM∥RA′，则MN即为所求水沟的一边．（证明略）

（2）当 DA′∥HK′，则只须求 A′K′的中点 L，过 L 作 MN∥AK（图 d）由△LNK′≌△LMA′，所以 MN 即为所求的水沟一边．

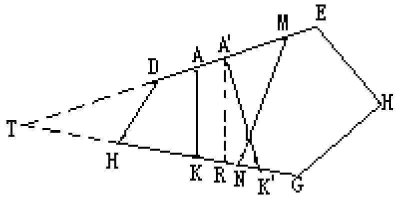


图 c

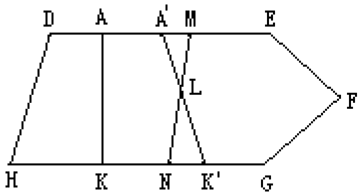
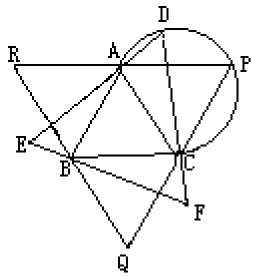


图 d

C2-081 已知等边三角形 ABC，求作它的外接等边三角形 DEF，使其面积为极大．

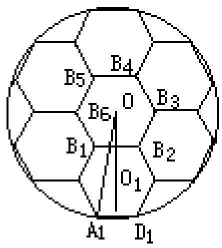
【题说】 1957 年上海市赛高二复赛题 4．

【解】 如图，∠ADC=60°为定角，故 D 点在以 AC 为弦，含角为 60°的（△ABC外侧的）弓形弧上，显然D为 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点P时，△DAC 面积极大，此时△APC 也为等边三角形，从而 AP∥BC，因此有下面作法：



过等边△ABC 各顶点 A、B、C 分别作平行于对边的直线，两两相交于 P、Q、R，则△PQR 即为所求的三角形（证明略）．

C2-082 在一已知半径为 R 的圆内，试作七个全等的正六边形，它们的位置如下：一个在中间，它的中心和圆心重合；另外六个各有一边和中间一个的一边重合，且每一个还有一边是圆的弦．



【题说】 1958 年上海市赛高三题 4．

【解】 如图，设正六边形边长为 r，则

$$OD_1 = 3O_1D_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}r$$

$$A_1D_1 = r/2, OA_1 = R$$

所以

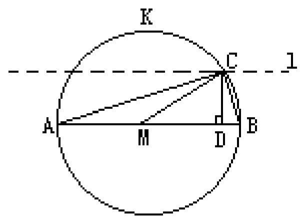
$$R^2 = A_1D_1^2 + OD_1^2 = \frac{r^2}{4} + \frac{27}{4}r^2 = 7r^2$$

$$r = \frac{\sqrt{7}}{7}R$$

作R与$\frac{1}{7}R$的比例中项r，以O为圆心，r为半径作圆．作这圆的内接正六边形 $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$．不难进一步作出其他的六边形．

C2－083 已知直角三角形 ABC 的斜边 c，斜边上的中线是两条直角边的比例中项，求作这个直角三角形．

【题说】 第一届（1959 年）国际数学奥林匹克题 4．本题由匈牙利提供．



作法：（1）作线段 AB=c，以 AB 为直径作圆 K；

（2）作直线$l\parallel AB$，使l与AB间的距离为$\frac{c}{4}$；

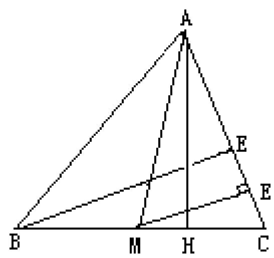
（3）设直线 l 与圆 K 相交于点 C，连结 CA、CB，则△ABC 即为所求作的直角三角形．

［证明］在△ABC 中，由作法（1）知 AB=c，且由 C 点在圆 K 上，

故$\angle C=90°$．又因AB上的高$CD=\frac{c}{4}$，所以$CA\cdot CB=c\cdot\frac{c}{4}=\frac{c^2}{4}$，

而AB上的中线$CM=\frac{1}{2}AB=\frac{c}{2}$，因此$CM^2=CA\cdot CB$，即△$ABC$斜边上的中线是两直角边的几何中项．

C2－084 求作三角形 ABC，使顶点 A 和 B 到对边的高分别等于已知长度 h_a 和 h_b，及顶点 A 到对边的中线等于已知长度 m_a。



【题说】 第二届（1960 年）国际数学奥林匹克题 4．本题由匈牙利提供．

【解】 先作△AHM，使∠AHM=90°，AH=h_a，AM=m_a．

以AM为直径作圆，再以M为圆心，$\frac{1}{2}h_b$为半径画弧交圆于E'．

直线 AE′与 MH 相交于 C，在直线 MH 上取 B，使 BM=MC，则△ABC 即为所求．

当且仅当$m_a\geq h_b$，$m_a>\frac{1}{2}h_b$时，本题有解．

C2－085 已知一等腰梯形，其底为 a 和 b，高为 h．

1．在梯形的对称轴上求作点 P，使从 P 看两腰的视角为直角；

2．求点 P 到两底边的距离；

3．在什么条件下可以作出 P 点（讨论各种可能的情况）？

【题说】 第二届（1960 年）国际数学奥林匹克题 7．本题由原民主德国提供．

【解】 1．设 MN 为等腰梯形 ABCD 的对称轴．以 BC 为直径作圆，交 MN 于点 P．

2．两直角三角形 CPM 和 PBN 相似，设 MP=d，CD=b，AB=a，MN=h．因为 Rt△CPM∽Rt△PBN，所以

$$d(h-d)=(b/2)(a/2)$$

其中 a、r 为正数．

由前面讨论，（1）内某两项之和应等于另外两项之和．这只能是 $a+ar^3=ar+ar^2$，从而 r=1，这就说明四个三角形的面积相等．因此 M 到 AB 的距离等于 M 到 CD 的距离，M 到 AD 的距离等于到 BC 的距离，M 是平行四边形的中心，即对角线的交点．

C2－086 设 A、B、C 为圆周 K 上的三个已知点，在圆周 K 上求作一点 D，使四边形 ABCD 有一个内切圆．

【题说】 第四届（1962 年）国际数学奥林匹克题 5．本题由保加利亚提供．

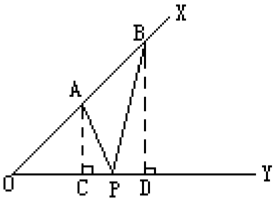
【解】 设 I 为内切圆圆心，则

$$\angle AIC=\angle IAB+\angle ICB+\angle ABC$$

$$=\frac{1}{2}(\angle BAD+\angle BCD)+\angle ABC=90°+\angle ABC$$

因此 I 在以 AC 为底，含角为 90°+∠ABC 的弓形弧上，又在∠ABC 的角平分线上．于是 I 可以定出，再作∠IAD=∠IAB，它的边与圆周 K 的交点就是 D．

C2-087 如图，设 OX、OY 是两条给定的射线，A、B 是 OX 上两定点，P 点在 OY 上移动．问 P 点在什么位置时，PA^2+PB^2 最小？用怎样的几何方法作出？



【题说】 1963 年武汉市赛高三二试题 3．

【解】 过 A、B 分别作 AC⊥OY，BD⊥OY，交 C，D 两点，并令 CD=a，则 CD 之中点即为所求．

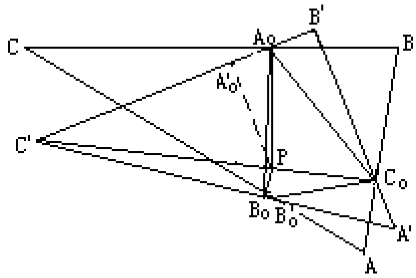
事实上，令 CP=x，则 PD=a-x，从而

$$PA^2+PB^2=AC^2+x^2+BD^2+(a-x)^2$$
$$=2x^2-2ax+(AC^2+BD^2+a^2).$$

当$x=-\frac{-2a}{2\times 2}=\frac{a}{2}$时，$PA^2+PB^2$有最小值．

C2－088 给出两个锐角三角形 $A_0B_0C_0$ 和 A′B′C′，求作一个三角形 ABC 与三角形 A′B′C′相似（A、B、C 依次与 A′、B′、C′相对应），且△$A_0B_0C_0$ 是三角形 ABC 的内接三角形（这里 AB 过 C_0，BC 过 A_0，CA 过

B_0）．又求作上述这类三角形中面积最大的一个三角形．



【题说】 第九届（1967 年）国际数学奥林匹克题 4．本题由意大利提供．

【解】 先在△$A_0B_0C_0$ 内，找出一点 P，使∠B_0PC_0=180°-∠A，∠B_0PA_0=180°-∠C′．

再过 A_0 作 BC⊥PA_0，过 B_0 作 CA⊥PB_0，过 C_0 作 AB⊥PC_0，交成的三角形 ABC 就是所述类中面积最大的那个三角形．

因为任作一个所述类中的三角形 $A_1B_1C_1$（这是很容易做的），则 P 到 B_1C_1 的距离 PA′≤PA_0，而

$$\angle B_0C_1A_0=\angle B_0CA_0=180°-\angle B_0PA_0$$

所以，A_0、C、C_1、B_0、P 五点共圆．

$$\angle PC_1A_0'=\angle PCA_0$$

$$\triangle PC_1A_0'\backsim\triangle PCA_0$$

$$S_{\triangle PC_1B_0'}\leq S_{\triangle PCB_0}=\left(\frac{PA_0'}{PA_0}\right)^2\leq 1$$

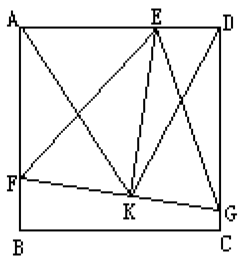
同样可证 $S\triangle PC_1B'_0\leq S\triangle PCB_0$ 等，所以

$$S_{\triangle A_1B_1C_1}\leq S_{\triangle ABC}$$

C2－089 设有一边长为 1 的正方形，试在这个正方形的内接正三角形中找出一个面积最大的和一个面积最小的，并求出这两个面积（须证明你的论断）．

【题说】 1978 年全国联赛二试题 6．

【解】 如图，设△EFG 为正方形的任一内接正三角形，由于正三角形的三个顶点至少必落在正方形的三边上，所以不妨设其中 F、G 是在正方形的一组对边上．

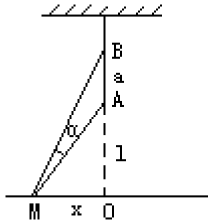


作△EFG 边 FG 上的高 EK，则 E、K、G、D 四点共圆．连 KD，则有∠KDE=∠EGK=60°．同理，有∠KAE=60°．所以，△AKD 为正三角形，而 K 是它的一个顶点，由此可知，内接正△EFG 的边 FG 中点 K 必是不动点．

又正三角形面积由边长决定，故当 KF⊥AB 时，边长 1 最小，面积

$S=\frac{\sqrt{3}}{4}$也最小；当KF通过B（或C）点时，边长$2\sqrt{2-\sqrt{3}}$最大，面积$S=2\sqrt{3}-3$也最大．

C2－090 设一细棍 AB 垂直悬挂，其长为 a，棍的下端与地面的距离为 l，在地面上求一点 M，使∠AMB 最大，并写出 M 点到棍的延长线和地面的交点 O 的距离．



【题说】 1979 年云南省赛二试题 4．

【解】 设 OM=x（如图），则

$$\tan\alpha=\frac{\frac{a+l}{x}-\frac{l}{x}}{1+\frac{a+l}{x}\cdot\frac{l}{x}}=\frac{ax}{x^2+(a+l)l}$$

即 $x^2\tan\alpha-ax+l(a+l)\tan\alpha=0$ 由判别式 $a^2-4\tan^2\alpha\cdot(a+l)\geq0$，得

$$0\leq\tan\alpha\leq\sqrt{\frac{a^2}{4(a+l)l}}$$

所以α的最大值为

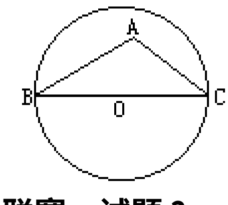
$$abc=a+b+c=-\frac{1}{6},a^3+b^3+c^3=-\frac{181}{216}$$

此时 $x=a/2\tan\alpha=\sqrt{(a+l)l}$

即 x 为（a+l）与 l 比例中项．

［别解］可通过下面的方法确定 M 点：过 A、B 两点作一圆与地面相切于 M，则 M 即为所求．

C2－091 在△ABC 中，∠A 为钝角，求作一个面积最小的圆，把这个三角形完全盖住，并说明理由．



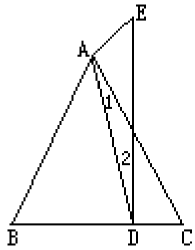
【题说】 1979 年全国联赛一试题 3．

【解】 以 BC 边为直径作一圆 O，此圆即为所求．事实上

1．因∠A 为钝角，故 A 点在圆内，即圆 O 盖住△ABC．

2．若另有一圆 O′盖住△ABC，则 BC≤圆 O′的直径，因此，圆 O 是盖住△ABC 的最小圆．

C2-092 命题“一对对角及一对对边相等的四边形必为平行四边形”对吗？如果对，请证明；如果不对，请作一四边形满足已给条件，但它不是平行四边形，并证明你的作法．



【题说】 1979 年全国联赛二试题 2．

【解】 命题不对．

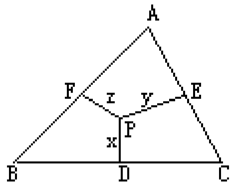
如图，任作一等边△ABC，在底边 BC 上取 D，使得 BD＞M．由 D 作∠2=∠1．取 DE=AC，连接 AE．则四边形 ABDE 满足已给条件，但它不是平行四边形．

事实上，由△ADC≌△DAC 知∠E、∠C=∠B，又 DE=AC=AB，所以四边形 ABCD 满足已给条件，但

AE=DC＜BD

故四边形 ABCD 不是平行四边形．

C2-093 P 为△ABC 内一点，D、E、F 分别为 P 到 BC、CA、AB各边所引垂线的垂足，求所有使$\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$为最小的P点．



【题说】 第二十二届（1981 年）国际数学奥林匹克题 1．

【解】 设△ABC 的三边 BC=a，CA=b，AB=c，面积为 S，PD=x，PE=y，PF=z，则 ax+by+cz=2S．由柯西不等式，

$$\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)(ax+by+cz)\geq(a+b+c)^2$$

即
$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2S}$$

当且仅当$ax:\frac{a}{x}=by:\frac{b}{y}=cz:\frac{c}{z}$，也就是$x=y=z$时取等号，亦即当P点是△ABC内心时，$\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$最小值为$\frac{(a+b+c)^2}{2S}$．

C2－094 请举出这样的三角形例子，它可分割成：（1）12 个全等的三角形；（2）5 个全等的三角形．

【题说】 第十五届（1989 年）全俄数学奥林匹克八年级题 6．

【解】 （1）如图 a，先将正△ABC 分割成四个全等的小正三角形，然后每个小正三角形又可分割成三个全等的三角形．

（2）如图 b，Rt△ABC（直角边 BC：AB=1：2）被分成五个全等的直角三角形，其中 E 是 AB 中点．

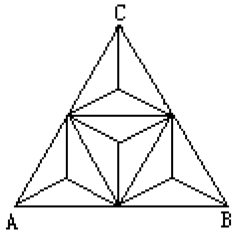


图 a

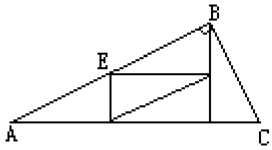
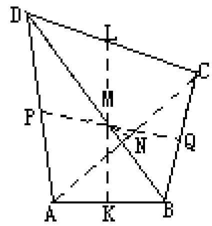


图 b

C3 立体几何证明

C3－001 证明:如果四面体 ABCD 的对棱分别相等(即 AB=CD,AC=BD,AD=BC),那么通过每组对棱中点的直线互相垂直，并且是四面体的对称轴．



【题说】 1953 年～1954 年波兰数学奥林匹克三试题 3．

【证】 如图，设 K、L、P、Q、M、N 分别是四面体各棱

中点．由于 AD=BC，BD=AC，AB 公用，所以△ABD≌△BAC，因而它们的对应中线 DK=CK，由此知 KL⊥CD，同理 LK⊥AB．这说明 A 与 B 关于 KL 对称，C 与 D

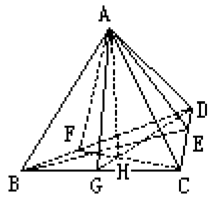
也关于 KL 对称．因此，KL 是四面体的对称轴．BC 的中点 Q 与 DA 的中点 P 对称，因而 PQ⊥KL．同理可得结论中的其它部分．

［别证］将四面体的各组对棱分别作为一个平行六面体各面的对角线，由于各组对棱分别相等，所以这六面体为长方体，而长方体的对面中心的连线是对称轴并且互相垂直．

C3-002 四面体 ABCD，若 AB⊥CD，AC⊥BD，则 AD⊥BC．

【题说】 1957 年天津市赛初赛题 3，1979 年上海市赛题 4．

【证】 过 A 作 BCD 的垂线 AH，连 BH、CH、DH 并延长，分别交 CD、DB、BC 于 E、F、G，再连 AE、AF、AG．



因 AH⊥平面 BCD，AB⊥CD，得 BE⊥CD．同理，CF⊥BD，故 H 为△BCD 的垂心，所以 DG⊥BC，得 AD⊥BC

C3-003 已知一个圆锥及其内切球，这个球外接一个圆柱，该圆柱的底面在圆锥底面上．并设 V_1 是圆锥的体积，V_2 是圆柱的体积．

(a) 证明：不可能成立 $V_1=V_2$；

(b) 求出使 $V_1=KV_2$ 成立的最小的数 K．并作出这种情况下的圆锥顶角．

【题说】 第二届（1960 年）国际数学奥林匹克题 6．本题由保加利亚提供．

【解】（a）轴截面如图．设球半径为 R，锥底面半径为 r，高为 h=（c+2）R．

则 $R/(h-R)=r/\sqrt{r^2+h^2}$

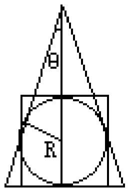
所以 $r^2=(c+2)^2R^2/[(c+1)^2-1]$

$=(c+2)R^2/c$

所以 $V_1=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi R^3(c+2)2/c$

$=\frac{1}{3}\pi R^3[c+\frac{4}{c}+4]$

$\geq\frac{8}{3}\pi R^3$



（因为$\frac{1}{2}$（$c+\frac{4}{c}$）$\geq\sqrt{c\times\frac{4}{c}}=2$）

$V_2=2\pi R^3$

所以 $V_1\neq V_2$．

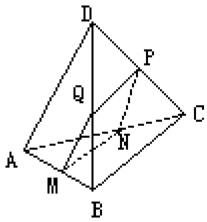
（b）由（a）可知$K=\frac{4}{3}$，此时$c=2$，$h=4R$，圆锥顶角

$$2\theta=2\arcsin R/(h-R)=2\arcsin\frac{1}{3}$$

C3-004 证明：如果四面体被平面所截得的截面形状是平行四边形，那么这个平行四边形的半周长介于四面体的最长棱长和最短棱长之间．

【题说】 1960 年～1961 年波兰数学奥林匹克三试题 3．

【证】 设四面体 ABCD 被平面所截得的截面是平行四边形 MNPQ，各点位置如图所示．



因为 PQ∥MN，所以 PQ∥平面 ABC，从而 PQ 平行于平面 ABC 与平面 BCD 的交线 BC，因此 MN∥BC．同理，MQ∥AD∥NP．于是

$$\frac{MN}{BC}=\frac{AM}{AB}，\frac{MQ}{AD}=\frac{MB}{AB}$$

由此得：

$$\frac{MN}{BC}+\frac{MQ}{AD}=\frac{AM+MB}{AB}=1$$

设 a 和 b 分别是四面体的最小棱和最大棱，则 a≤BC，AD≤b，由此得

$$a\leq MN+MQ\leq b$$

C3-005 设有一个四面体 SABC 有如下性质：有五个球与棱 SA、SB、SC、AB、BC、CA 或其延长线相切．证明：

(a) 该四面体是正四面体；

(b) 反之，对每一正四面体都有这样的五个球．

【题说】 第四届（1962 年）国际数学奥林匹克题 7．本题由前苏联提供．

【证】 设球 K 与四面体 ABCD 的各棱相切，则 K 与各个面，比如面 ABC，相交得一个圆，这圆是△ABC 的内切圆或旁切圆，记为 K_{ABC}．每两个这样的圆，如 K_{ABC} 与 K_{ABD} 有一个唯一的公共点，也就是球 K 与 AB 的切点．

有两种情况：

Ⅰ．所有的圆都是内切圆．

由于 K_{ABC} 与 K_{ABD} 均唯一确定，而且不在同一平面上，所以如果有这样的球 K，只可能有一个．

Ⅱ．有一个圆为旁切圆．

例如圆 K_{ABD} 是与 D 相对的旁切圆，即它与 DA、DB 的延长线相切，那么 K_{BCD}、K_{CAD} 也是与 D 相对的旁切圆，而 K_{ABC} 与 AB、BC、CA 相切于内点，所以是内切圆．

与Ⅰ同理，对于每个顶点，这种球至多有一个．

因而与四面体各棱都相切的球至多有五个，一个类型Ⅰ，四个类型Ⅱ．

现在假定有五个球与四面体各棱都相切．由内切球 K_1，可得（设 DA =a，DB =b，DC =c，BC =a′，CA =b′，AB =c′）：

$a+a'=b+b'=c+c'=$ 自 A、B、C、D 所作四条切线之和

考虑 D 所对的旁切球，可得

$$a-a'=b-b'=c-c'$$

所以
$$a=b=c,\quad a'=b'=c'$$

再考虑其他旁切球，可得

$$a=b=c=a'=b'=c'$$

所以 ABCD 为正四面体．

反之，正四面体显然有五个和各棱都相切的球．

C3-006 (a) 已知一四面体 ABCD．顶点 D 和底面△ABC 的重心 D_1 相连接，过 A、B、C 作 DD_1 的平行线，分别交于该点相对的底面所在平面于 A_1、B_1、C_1．证明：四面体 ABCD 的体积是四面体 $A_1B_1C_1D_1$ 体积的三分之一．

(b) 当点 D_1 是底面△ABC 内任一点时，结果又如何？

【题说】 第六届（1964 年）国际数学奥林匹克题 6．本题由波兰提供．

【证】 (a) 设 E、F、G 分别为 AD_1、BD_1、CD_1 与 BC、CA、AB 的交点．则 A_1 在 ED 上，且$\triangle ED_1D\backsim\triangle EAA_1$，$AA_1 \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} 3DD_1$，同样 $BB_1 \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} CC_1 \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} 3DD_1$，所以四面体 $A_1B_1C_1D_1$ 的底面$\triangle A_1B_1C_1\cong\triangle ABC$，而四面体 $A_1B_1C_1D_1$ 的高等于四面体 ABCD 的高的 3 倍．所以

$$V_{A_1B_1C_1D_1}=3V_{ABCD}$$

（b）当 D_1 为任意点时，结论仍然成立．

设 DD_1 交平面 $A_1B_1C_1$ 于 D_1，A_1D_2、B_1D_2、C_1D_2 分别交 B_1C_1、C_1A_1、A_1B_1 于 E_1、F_1、G_1．则

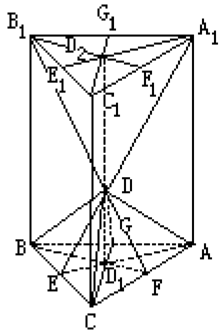
$$A_1A=\frac{EA}{ED_1}\cdot D_1D,\quad B_1B=\frac{FB}{FD_1}\cdot D_1D$$

$$C_1C=\frac{GC}{GD_1}\cdot D_1D$$

$$\begin{aligned}D_2D_1&=\frac{E_1D_2}{E_1A_1}\cdot A_1A+\frac{F_1D_2}{F_1B_1}\cdot B_1B+\frac{G_1D_1}{G_1C_1}\cdot C_1C\\&=\frac{ED_1}{EA}\cdot A_1A+\frac{FD_1}{FB}\cdot B_1B+\frac{GD_1}{GC}\cdot C_1C\\&=3D_1D\end{aligned}$$

过 D_1、D_2 任意作两个平行平面与直线 AA_1、BB_1、CC_1 相截而得到的柱体，体积都是 V_{D_2ABC} 的三倍，因而

$$V_{D_1A_1B_1C_1}=V_{D_2ABC}=3V_{DABC}$$

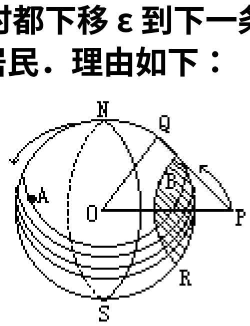


C3-007　在某个球形的星球上的居民，他能在星球表面上以不大的速度 u 移动，有一艘以速度 v 飞行的宇宙飞船．证明：若 v/u＞10，则从飞船上总能看到这个星球居民，假定他没有藏起来的话．

【题说】　1965 年全俄数学奥林匹克十一年级题 5．

【证】　设行星半径是 1，取任一直径的二端点为南北极 N、S，过 N、S 引一条基准子午线．再将它分成若干段长度为 ε 的相等的弧，过这些分点作纬线．

飞船的飞行计划如下：在距离行星中心 $\sqrt{2}$ 区处绕纬线飞行，从 N 开始，每次到达基准子午线时都下移 ε 到下一条纬线．这样，便能保证从飞船上看到行星上移动的居民．理由如下：



如图，由 $OP=\sqrt{2}$，$OQ=1$，$QP\perp OQ$ 知 $PQ=1$．因此飞船的“可见

区域”是一个半径为1，高为$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$的球冠(球冠面积 = $\pi(2-\sqrt{2})$)．

假如飞船在点 B 上空，行星居民在 A，A 与 B 纬度相同．那么飞船绕纬线飞行半周时间为$\frac{\sqrt{2}\pi}{v}$，这时A移动$\frac{\sqrt{2}\pi}{2}\cdot u\leq\frac{\sqrt{2}\pi}{10}<(2-\sqrt{2})\pi$，因此，当纬线的弧$\widehat{BA}$（沿飞船飞行方向，从 B 到 A）＜π时，居民来不及逃避．当$\widehat{AB}$＜π时，由于 ε 很小，可以认为飞船在到 B 之前，仍在同一纬度上飞行．由于飞船到 B 时，居民在 A，所以飞船在 A 时（比到 B 早$\sqrt{2}\pi/v$），居民逃不出飞船的可见范围．

C3-008 证明：一个正四面体的外接球球心，到它的四个顶点的距离之和，小于空间中的其它任一点到四个顶点的距离之和．

【题说】 第八届（1966 年）国际数学奥林匹克题 3．本题由保加利亚提供．

【证】 过这正四面体的各个顶点作对面的平行平面，围得一个大的正四面体．任一点 P 到原四面体各个顶点的距离和 a 不小于该点到大四面体的各个面的距离和a′．$\frac{1}{3}$a′乘大四面体一面的面积等于大四面体的体积，因此 a′等于大四面体的高 h（当点 P 在大四面体外时，P 到各面距离的代数和等于 h，因而 a′＞h）．而原四面体外接球球心到各顶点的距离和等于 h．因此命题成立．

C3-009 以四面体 ABCD 的棱 AB、AC、AD 为直径各作一个球．证明：这些球覆盖了整个四面体．

【题说】 第二届（1968 年）全苏数学奥林匹克十年级题 3．

【证】 由 A 点作平面 BCD 的垂线 AH，再由 H 点分别作线段 BC、BD、CD 的垂线 HK、HL 和 HM．显然，棱锥 ABKL、ACKM、ADML 分别被相应的球所覆盖．

C3-010 证明：任何一个四面体总有一个顶点，以这个顶点引出的三条棱为三边可构成一个三角形．

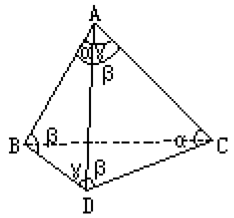
【题说】 第十届（1968 年）国际数学奥林匹克题 4．本题由波兰提供．

【证】 设四面体 ABCD 中，AB 是最长的棱．

因为 AC+BC＞AB，AD+BD＞AB，所以 AC+AD+BC+BD＞2AB．从而 AC+AD＞AB 与 BC+BD＞AB 中至少有一个成立．不妨设前者成立，这时 AC、AD、AB 可构成三角形．

C3-011 一个给定的四面体 ABCD 是等腰的，即 AB=CD，AC=BD，AD=BC．证明：该四面体的各面都是锐角三角形．

【题说】 第一届（1972 年）美国数学奥林匹克题 2．



【证】 由题设知，四面体各面为全等三角形．

设其三内角分别为α、β、γ，则$\alpha+\beta+\gamma=180°$．又α、β、γ中每一个角小于其它两个的和，所以每一个角都小于90°，即各个面都是锐角三角形．

C3-012 在空间的八个点上放置探照灯，若它的照射范围是以此点为顶点的直三面角．证明：这些探照灯能照亮整个空间．

【题说】 第一届（1967年）全苏数学奥林匹克十年级题2．

【证】 作一平面，使已知点中的四个在它的一侧，其余四点在另一侧，则放在平面一侧的四个探照灯可以照遍另一侧．

C3-013 设一个凸多面体P_1的9个顶点为A_1，A_2，…，A_9．设P_i为由P_1通过平移$A_1\to A_i$（i=2，3，…，9）得到的凸多面体，证明：在多面体P_1，P_2，…，P_9中至少有两个最少包含有一个公共内点．

【题说】 第十三届（1971年）国际数学奥林匹克题2．本题由前苏联提供．

【证】以A_1为原点建立一个坐标系，设A_2，…，A_9的坐标分别是v_2，…，v_9，令A'_i的坐标为$2v_i$（$1\le i\le 9$），则P_k的诸顶点的坐标为

$$v_k+v_i=\frac{1}{2}(2v_k+2v_i)\quad(1\le i\le 9)$$

即A'_i和A'_k连线的中点．由于以A'_i（$1\le i\le 9$）为顶点的凸多面体P'是以A_1为位似中心将P_1放大到2倍的结果，它的体积是P_1的8倍，而且P_1，P_2，…，P_9都落在P'内部（因为它们都是凸的，并且顶点都在P'面上），它们的体积之和为P_1的9倍，大于P'的体积，根据重叠原则，至少有两个P_i（$1\le i\le 9$）有公共内点．

C3-014 已知四个不重合的平行平面，试证：存在一个正四面体，使每个平面上都有该四面体的一个顶点．

【题说】 第十四届（1972年）国际数学奥林匹克题6．本题由英国提供．

【证】 设已知平面为E_1，E_2，E_3，E_4，并且在编号中，使平面E_2，E_3，E_4依次在平面E_1的同一侧，记平面E_i与平面E_{i+1}间的距离为d_i（i=1，2，3）．

任取一正四面体$P'_1P'_2P'_3P'_4$．并且依照定比$d_1:d_2:d_3$分线段$P'_1P'_4$，依次得分点Q_2和Q_3，依照定比$d_2:d_3$分线段$P'_2P'_4$得分点R_3；依照定比$d_1:d_2$分线段$P'_1P'_3$，得分点S_2（如图a），于是有

$$P'_4Q_3:P'_4Q_2=P'_4R_3:P'_4P'$$

从而可知

$$Q_3R_3\parallel Q_2P'_2$$

类似地，由

$$P'_1Q_2:P'_1Q_3=P'_1S_2:P'_1P'_3$$

可知
$$Q_2S_2\parallel Q_3P'_3$$

因此过Q_2、P'_2、S_2的平面E'_2与过Q_3、R_3、P'_3的平面E'_i3平行．

设E'_1和E'_4分别是过点P'_1和P'_4且平行于E'_2的平面（如图

b），过点 P'_4 引平面 E'_1 的垂线交平面 E'_i 于点 T_i（i=1，2，3），记平面 E'_i 与 E'_{i+1} 间的距离为 t_i（i=1，2，3）．

于是有

$$t_1:t_2:t_3=P'_1Q_2:Q_2Q_3:Q_3P'_4=d_1:d_2:d_2 \qquad (1)$$

由（1）式可知，在空间可作一相似变换将平面 E'_1、E'_2、E'_3、E'_4 分别变换为平面 E''_1、E''_2、E''_3、E''_4，使平面 E''_i 与平面 E''_{i+1} 间的距离为 d_i（i=1，2，3），在这相似变换下，正四面体 $P'_1P'_2P'_3P'_4$ 变换为正四面体 $P''_1P''_2P''_3P''_4$，并且点 P''_i 在平面 E'_i 内（i=1，2，3，4）．

最后，移动平面 E''_1、E''_2、E''_3、E''_4 使它们分别与平面 E_1、E_2、E_3、E_4 重合，于是正四面体 $P''_1P''_2P''_3P''_4$ 变换为正四面体 $P_1P_2P_3P_4$，并且 P_i 在平面 E_i 内（i=1，2，3，4）．

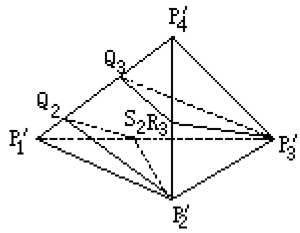


图 a

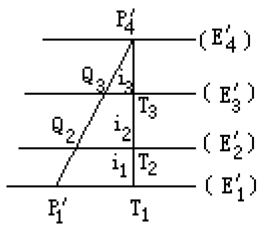
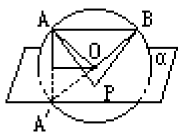


图 b

C3-015 半径为 1 的球面上两点，用球内长度小于 2 的曲线连结起来，证明：这条曲线一定落在这个球的某个半球内．

【题说】 第三届（1974 年）美国数学奥林匹克题 3．



【证】 作点 A、B 所在的大圆，连结 AB，并过球心 O 作平行 AB 的平面α，如图曲线整个地落在α以上的半球内．如若不然，曲线必与α交于某点 P，连 AP、BP，作 A 关于α的对称点 A′，连 AO、BO、A′O、A′P，曲线长≥AP+BP=A′P+BP＞A′B=2．与已知矛盾．因此，原命题成立．

C3-016 凸多面体 N 在每个顶点处都形成一个三面角．又知它的每个面是多边形，且内接于一个圆周．证明：该多面体能内接于一个球．

【题说】 第十一届（1977 年）全苏数学奥林匹克十年级题 3．

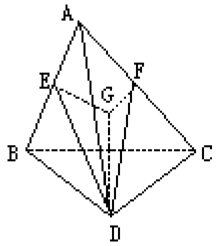
【证】 过多面体棱 AB 的两个界面的外接圆可唯一确定一个球面δ，球面δ含有上述两个界面上的所有顶点．如果 BC 和 BD 是由 B 出发的另外两条棱，那么包含 B、C、D 的圆（包含界面的外接圆）也属于δ，因为由棱 BC 连接的界面的顶点全部落在δ上．

类似地研究由 C 出发的棱连接的界面，等等，一直到多面体的任意顶点全部落在球面δ上．

C3-017 1．若四面体的六个二面角（即两面之间的夹角）相等，那么，这个四面体一定是正四面体．

2．如果五个二面角相等，这个四面体一定是正四面体吗？

【题说】 第七届（1978 年）美国数学奥林匹克题 4．



【证】作 DE⊥AB，DF⊥AC，又作 EG⊥AB，FG⊥AC，设 EG 与 FG 交于 G．则 AB⊥面 DEG，AC⊥面 DGF．所以

AB⊥DG，AC⊥DG

所以 DG⊥面 ABC

∠DGE=∠DGF=90°

由设 ∠DEG=∠DFG

由是 Rt△DEG≌Rt△DFG，DE=DF

因此 Rt△ADE≌Rt△ADF

∠BAD=∠CAD

同理可证 ∠ADB=∠ADC

所以 △ABD≌△ADC

得 AB=AC，BD=DC

再考虑以 B、C 为顶点的三面角，又得 AB=BD，AC=DC，由此，该四面体六条棱皆相等，每个面都是等边三角形，因而是正四面体．

2．结论不成立，可如下作出一个非正四面体，它有五个二面角相等：使∠ABC=∠CBD=∠DBA=∠ACB=∠BCD=∠DCA=40°，∠BAD=∠CAD=∠CDA=∠BDA=70°，∠BAC=∠BDC=100°．显然，这样的四面体存在，其中除二面角 B-AD-C 外，五个二面角皆相等，而它不是正四面体．

[别解] 若取∠ABC 等 6 个角为 80°,∠BAD 等 4 个角为 80°,∠BAC=∠BDC=20°．则也有五个二面角相等的非正四面体．

C3-018 众所周知，在欧氏几何中，三角形内角和为定值．试证明四面体的二面角的和不是定值．

【题说】 第十一届（1979 年）加拿大数学奥林匹克题 2．

【解】 考虑正三棱锥 ABCD．设侧面与底面所成二面角为α，侧面间的二面角为β．

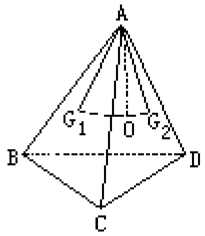
当顶点 A 趋向于底面中心 O 时，α→0，β→π，四面体所有的二面角的和趋向于 3π．

当顶点 A 趋向于无穷时，α→π/2，β→π/3，四面体所有二面角的和趋向于 3（π/2+π/3）=5π/2．

由此可知，四面体的所有二面角的和不是定值．

C3-019 已知四面体内切球的切点是四面体各面的重心，求证：该四面体是正四面体．

【题说】 第九届（1980 年）美国数学奥林匹克题 4．



【证】 设 G_1、G_2 分别是△ABC、△ADC 的重心，则切线 $AG_1=AG_2$，$CG_1=CG_2$．△ABC 与△ADC 中有两组中线对应相等，又共有 AC．易知二者全等．

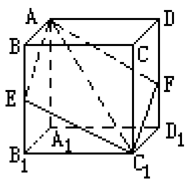
因而得

$$AB=AD,\ BC=DC$$

同理 AC=AD，BC=BD；AD=BD，AC=BC．四面体六条棱都相等，故是正四面体．

C3-020 过正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的一条对角线 AC_1 任作一平面，截正方体．在截面不是对角面的情况下，能否使截面成为一个矩形？试证明你的结论．

【题说】 1982 年芜湖市赛题 4．



【解】如图，设截面为矩形 AEC_1F，则

$$EF=AC_1=BD_1$$

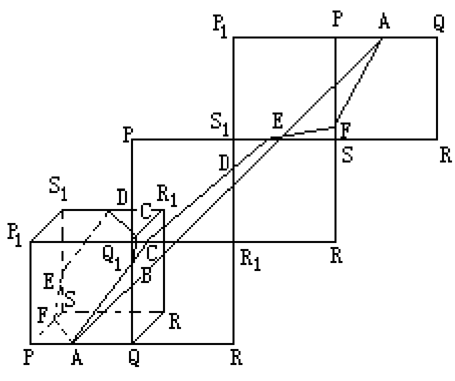
但矩形 BB_1D_1D 中，显然 $EF\leq BD_1$，等号仅在 EF 是对角线 BD_1 或 B_1D 时成立．

[别解] AB 是面 BCC_1B_1 的垂线，所以 BE 是斜线 AE 在面 BCC_1B_1 上的射影，若 $AE\perp EC_1$，则 $BE\perp EC_1$，显然这是不可能的．

C3-021 经过正方体中心的任一截面的面积不小于正方体的一个侧面面积，试证明．

【题说】 第十八届（1984 年）全苏数学奥林匹克十年级题 8．

【证】显然正方体的截面是中心对称凸多边形，并且边数是偶数的，即或是四边形或是六边形．



如果截面是四边形，那末它与正方体某两个相对的侧面不相交，并且截面在这两个侧面上射影是整个侧面，因此截面四边形的面积不小于

正方体一个侧面的面积．

如果截面是六边形，那末它与正方体的六个侧面都相交，考察正方体的侧面展开图，可知截面的周长 P 有不等式．

$$P\geq|AA'|=\sqrt{(3a)^2+(3a)^2}=3\sqrt{2}a$$

其中 a 是正方体的棱长．截平面交正方体内切球的截圆半径为 a/2，所以对截面积 S，有

$$S>(P\cdot a/2)/2\geq 3\sqrt{2}a^2/4>1.06a^2$$

这时截面六边形的面积也不小于正方体的一个侧面的面积．

C3-022 AB、BC、CD 为不在同一平面内的三条线段，AB、BC、CD的中点分别为P、Q、R，且$PQ=2$，$QR=\sqrt{5}$，$PR=3$．证明：$AC\perp BD$．

【题说】 1986 年北京市赛高一题 1（4）．原题为选择题．

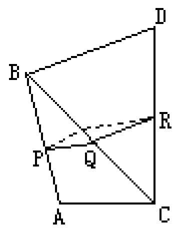
【证】 因 P、Q、R 分别为 AB、BC、CD 的中点，故 PQ∥AC，QR∥BD．

在△PQR 中，有

$$PQ^2+QR^2=2^2+(\sqrt{5})^2=3^2=PR^2$$

所以∠PQR=90°，即 PQ⊥QR，从而

AC⊥BD



C3-023 在球面外部的空间有九个点，求证：在球面上可找到这样的点,从该点至多只能看到上述九点中的三点(球面被认为是不透明的)．

【题说】 第十二届（1986 年）全俄数学奥林匹克题选．

【证】 设α是任一经过球心 O 的平面．l 是过 O 点且垂直于平面α的直线，l 交球面于 A、B 两点（这两点就是球直径的两端点）．平面α将整个空间分为两个半空间．

显然，从 A 点（或 B 点）看不见平面α及 B 点（或 A 点）所在的半空间的所有点．

根据此可解决本题：

以 A_i（i=1，2，…，9）表示给定的九个点，今过球心 O 以及 A_1、A_2 这三点作平面α．其余七点 A_j（j=3，4，…，9）将分布在平面α分成的两个半空间或平面α内，分布在平面α内的点，不论从 A 点或 B 点都看不到（A、B 两点即垂直于平面α的直径的两端点）．去掉平面α内的这些点，其余的点分布在两个半空间，显然在某一半空间上的点不多于三点．如果 A（或 B）点就在该半空间的话，它便是符合题目要求的点．

C3-024 四面体 ABCD 的棱 AB、CD 之中点分别是 E、F，过 EF 任作一个平面．试证：这个平面将四面体分成两个等积的部分．

【题说】 1987 年芜湖市赛题 4，第二十九届（1988 年）IMO 预选题 8．

【证】 如图，设截面为 EGFH，DG：AG=λ，d（x）表示点 x 到截面

EGFH 的距离，则

$$\lambda=\frac{DG}{AG}=d(\frac{D}{A})=d(\frac{C}{B})=\frac{HC}{BH}$$

所以

$$\frac{HC}{BC}=\frac{\lambda}{1+\lambda}$$

设△BCD 面积为 S，A 到平面 BCD 的距离为 h，则

$$V_{A\text{-}HCF}=\frac{1}{3}S_{\triangle HCF}\cdot h=\frac{1}{3}\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\cdot\frac{1}{2}\cdot S\right)h$$

$$=\frac{\lambda}{2(1+\lambda)}\cdot V_{A\text{-}BCD}$$

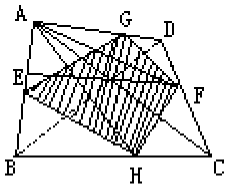
同理可得

$$V_{F\text{-}AEG}=\frac{1}{4(1+\lambda)}V_{C\text{-}ABD}$$

$$V_{F\text{-}AEH}=\frac{1}{4(1+\lambda)}V_{D\text{-}ABC}$$

三式相加，得

$$V_{AEHCFG}=\frac{1}{2}V_{ABCD}$$



C3-025 设 $A_1A_2A_3A_4$ 是一个四面体，S_1、S_2、S_3、S_4 分别是以 A_1、A_2、A_3、A_4 为球心的球，它们两两相切，如果存在一点 Q，以这点为球心可作一个半径为 r 的球与 S_1、S_2、S_3、S_4 都相切，还可以作一个半径为 R 的球与四面体的各棱都相切．求证这个四面体是正四面体．

【题说】 第二届（1987 年）全国冬令营赛题 5．

【证】 设以 A_i 为球心的球半径为 r_i（$1\leq i\leq 4$）．半径为 R 的球切棱 A_iA_j 于 B_{ij}，$A_iB_{ij}=a_i$（$1\leq i$，$j\leq 4$，$i\neq j$）．则 $r_i+r_j=a_i+a_j$（$1\leq i$，$j\leq 4$，$i\neq j$）．从而 $r_i=a_i$（$1\leq i\leq 4$），又

$$(r+r_i)^2-r_i^2=QB_{ij}^2=(r+r_j)^2-r_j^2$$

所以 $r_i=r_j$（$1\leq i$，$j\leq 4$，$i\neq j$）．从而各棱均相等，四面体为正四面体．

C3-026 正方形 ABCD 中，M 为 AB 上一点，N 是 BC 上一点，且 AM=BN．连 DM、DN 分别交对角线 AC 于 P、Q，剪去△MNB．求证：

（1）以 DM、DN 为折痕，将 DA、DC 重合，可以构成一个三棱锥的侧面；

（2）以线段 AP、PQ、QC 为边，恰可构成有一个内角为 60°的三角形．

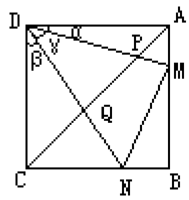


图 a

【题说】 第一届（1990）希望杯高一二试题5．

【证】 （1）设∠ADP=α，∠CDQ=β，∠PDQ=γ．

因为α+γ＞45°＞β，β+γ＞45°＞α，故只须证明 α+β＞γ．

设AM =BN =a，CN =b，AB=1．则

$$\tan\alpha=\frac{AM}{AD}=\alpha，\tan\beta=b，a+b=1．$$

从而 $$\tan（\alpha+\beta）=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{a+b}{1-ab}=\frac{1}{1-ab}>1$$

因此α+β＞45°，从而α+β＞γ．

（2）在折成的四面体D-A（C）MN中，DA⊥AN，DA⊥AM，故DA⊥底面△AMN，且

△AMN≌△BMN（图1中）

故∠MAN=90°．

又AQ平分∠DAN，AP平分∠DAM．

过Q作QR∥AN交DA于R过R作RS∥AM交AP于S.则四面体R-AQS中，RS=RQ=RA，且∠ARQ=∠QRS=∠ARS=90°．

从而$AQ=QS=AS=\sqrt{2}AR$．即△ARS是等边三角形，所以∠PAQ=60°．

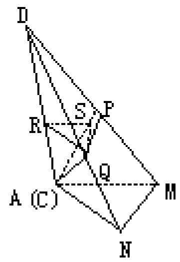


图 b

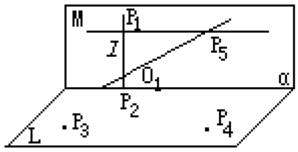
C3-027 在空间给定若干个点，其中任意四点不共面．给定的点具有以下性质：若有球面过其中任意四点，则所有其余的点均在该球面上或球面内．证明：所有给定的点，均在一个球面上．

【题说】 第十四届（1988年）全俄数学奥林匹克十年级题4．

【证】 在给定点中取点A、B、C，使其余的点都在平面ABC的同一侧．设D、E是另两个已知点，若E在过A、B、C、D的球面S的内部，则点D在过A、B、C、E的球面的外部，与已知矛盾．因此，点E必在球面S上．同理可证所有其余的点均应在球面S上．

C3-028 三维欧氏空间（xyz空间）所有点的集合为E．A_1、A_2、A_3、A_4、A_5是E的非空子集，满足条件：（1）$A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5=E$；（2）若$i\neq j$，则$A_i\cap A_j=\phi$，求证：存在一个平面，它含有$A_1$、

A_2、A_3、A_4、A_5 中至少 4 个集合的点．



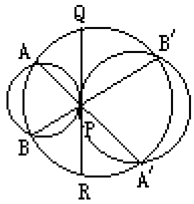
【题说】 1990 年日本第二轮选拔赛题 1．

【证】 若存在直线 l 至少含 3 个相异子集 A_i 的点，则过该直线及另一子集的点作平面即为所求．设任何直线至多含两个相异子集的点．设 P_i 分别为 A_i 的点（i=1，2，3，4，5）．考虑连结 P_1、P_2 的直线 l，除 P_1、P_2 外 l 上还有 A_1 或 A_2 的点．不失一般性，设 l 上含 A_1 的点 $Q_1 \neq P_1$．过 P_2、P_3、P_4 作平面 L，若 l 在 L 内，则 L 即为所求；若 l 不在 L 内，过 P_5 和 l 作平面 M， M 与 L 的交线为过 P_2 的直线 a．在 M 内，过 P_5 的两条直线 P_1P_5 和 P_5Q_1 至少有一条与 a 相交，交点属于 A_1 或 A_5，所以平面 L 必含有 4 个不同子集的点．

C3-029 设 AA′、BB′、CC′是球的不在同一平面的三条弦，它们相交于球内一点 P．若过 A、B、C、P 的球面和过 A′、B′、C′、P 的球面相切，求证：AA′=BB′=CC′．

【题说】 第二十一届（1992 年）美国数学奥林匹克题 4．

【证】 过 A、A′、B、B′的平面截三个球得三个圆，其中两个圆分别是△ABP 及△A′B′P 的外接圆，这两个圆相切于 P 点（如图）．设 RQ 是它们在 P 点的公切线．于是，有



$$\angle ABP=\angle APQ=\angle A'PR$$
$$=\angle A'B'P=\angle BAP$$

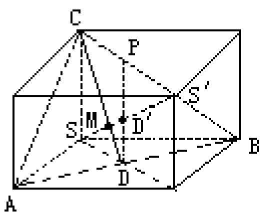
所以 AP=BP

同理 A′P=B′p

相加得 AA′=BB′

同理 BB′=CC′

C3-030 三棱锥 S-ABC 中，侧棱 SA、SB、SC 两两互相垂直，M 为△ABC 重心，D 为 AB 中点，过 D 作 DP∥SC．证明：



（1）DP 与 SM 共面；

（2）设 DP 与 SM 交点为 D′，则 D′是 S-ABC 的外接球球心．

【题说】 1993 年全国联赛一试题 3．

【证】 如图，把三棱锥 S-ABC 补成长方体 SS_1，则棱 SS_1 与平面 ABC 交点，就是△ABC 的重心 M．SM、DP 都在长方体的对角面 SS_1 上，D′是此长方体的中心.D′是长方体SS′的外接球球心,当然也是三棱柱S-ABC外接球球心．

C3-031 设 T 为四面体，h_1，h_2，h_3，h_4 分别为 T 的四个面上的高，r_1，r_2，r_3，r_4分别为T内一点到这四个面的距离，则$\frac{r_1}{h_1}+\frac{r_2}{h_2}+\frac{r_3}{h_3}+\frac{r_4}{h_4}$的值是 1．

【题说】 1994 年四川省高中数学联赛填空题 3．

【解】 设四个面的面积分别为 F_1，F_2，F_3，F_4，T 的体积为 V，则

$$V_1F_1+V_2F_2+V_3T_3+V_4F_4=3V \quad (1)$$

又

$$h_1F_1=h_2F_2=h_3F_3=h_4F_4=3V$$

从而

$$F_i=\frac{3V}{h_i}\ (i=1，2，3，4) \quad (2)$$

将(2)代入(1)，得

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{r_i\cdot 3V}{h_i}=3V$$

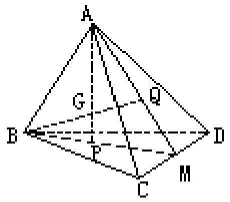
所以

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{V_i}{h_i}=1$$

C3-032 将一个四面体的每个顶点与它所对底面三角形的重心相连接，得 4 条线段．证明这四条线段相交于一点．

【题说】 1994 年全国高中数学联赛河北省预赛一试题 4．

【证】 如图，取 CD 之中点 M，连 AM、BM．设 P、Q 分别为分 BM 与 AM 成 2∶1 的点，即 P 及 Q 分别为△BCD 及△ACD 的重心．在△ABM 中，AP、BQ 相交于一点 G．



易知PQ∥AB且$\frac{PQ}{AB}=\frac{MP}{MB}=\frac{1}{3}$，所以$\frac{AG}{GP}=\frac{PQ}{AB}=\frac{1}{3}$，$\frac{BG}{GQ}=\frac{1}{3}$．

同理，C、D 与对面重心的连线也均与 AP 相交，并分 AP 为 3∶1．即所述四条线段交于同一点 G．

C3-033 在正三棱锥 S-ABC 的侧棱 SA、SB 和 SC 上分别取点 A_1、B_1 和 C_1，使得面 $A_1B_1C_1$ 和面 ABC 平行．设过点 S、A、B 和 C_1 的球的球心为 O．证明：直线 SO 垂直于面 A_1B_1C．

【题说】 第二十届（1994 年）全俄数学奥林匹克十一年级题 7．

【证】 在面 SBC 上，球 O 的截口是△SBC_1 的外接圆 O_1，O_1 为 O 在这平面上的射影．设 SO_1 的延长线交圆于 S_1（如图）．

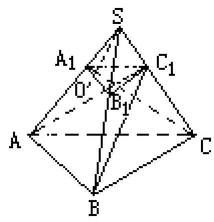


图 a

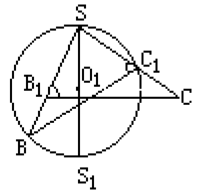


图 b

因为 $A_1B_1C_1$∥面 ABC，所以 B_1C_1∥BC．

因为 SB=SC，所以 $SB_1=SC_1$．从而

$$\triangle SBC_1 \cong \triangle SCB_1，\angle SB_1C=\angle SC_1B$$

于是

$$\angle SB_1C+\angle B_1SS_1$$

$$=\angle SC_1B+\angle BSS_1$$

$$=\frac{1}{2}\overset{\frown}{SB}+\frac{1}{2}\overset{\frown}{BS_1}$$

$$=\frac{1}{2}\times 180°=90°$$

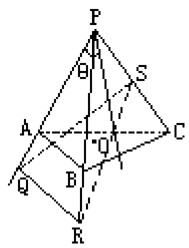
所以 $SO_1 \perp B_1C$

据三垂线定理的逆定理，$SO\perp B_1C$，同理 $SO\perp A_1C$，所以 SO⊥面 A_1B_1C．

C3-034 设 O 是正三棱锥 P-ABC 底面△ABC 的中心，过 O 任作一平面分别交PA、PB、PC于Q、R、S，证明$\frac{1}{PQ}+\frac{1}{PR}+\frac{1}{PS}$为定值．

【题说】 1995 年全国联赛一试题 1（6）；原为选择题．

【证】 设∠APB=∠BPC=∠CPA=α，O 到各侧面距离为 d，则



$$V_{P\text{-}QRS}=V_{O\text{-}PQR}+V_{O\text{-}PRS}+V_{O\text{-}PSQ}$$

$$=\frac{1}{6}d\cdot\sin\alpha\cdot(PQ\cdot PR+PQ\cdot PS+PR\cdot PS) \quad (1)$$

设 PQ 与平面 PRS 交角为θ，则

$$V_{P\text{-}QRS}=\frac{1}{6}PR\cdot PS\cdot(PQ\sin\theta)\cdot\sin\alpha \quad (2)$$

由（1）、（2）得

$$(PQ\cdot PR+PQ\cdot PS+PR\cdot PS)d=PQ\cdot PR\cdot PS\cdot\sin\theta$$

故得

$$\frac{1}{PQ}+\frac{1}{PR}+\frac{1}{PS}=\frac{\sin\theta}{d}$$

为定值．

显然 d等于A到底面PBC的距离h的三分之一，而$\frac{\sin\theta}{h}=\frac{1}{PA}$，所以上述定值即$\frac{3}{PA}$．

C3-035 空间四个球，它们的半径分别为 2、2、3、3．每个球都与其他三个球外切．另有一个小球与这四个球都外切，求这个小球的半径．

【题说】 1995 年中国数学奥林匹克（第 10 届数学冬令营）题 4．

【解】 设半径为 3 的球心为 A、B，半径为 2 的球心为 C、D．考虑四面体 ABCD，易知 AB=6，CD=4，AC=AD=BC=BD=5．

设小球球心为 O，半径为 r．则 O 点在四面体 ABCD 内，且 AO=BO=3+r．

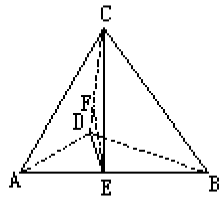


图 a

取 AB 中点 E，连 CE、DE，则 AB⊥EC、AB⊥ED，因此平面（CDE）是 AB 垂直平分面α．故 O∈α．

又 CO=DO=2+r，故 O 点在 CD 的垂直平分面β内．而因 ED=EC，故 O 在△ECD 边 CD 的高 EF（F 为 CD 中点）上．

容易算得$ED=EC=4$，故△ECD为等边三角形，$EF=2\sqrt{3}$．

又 $OF^2=OC^2-CF^2=(2+r)^2-2^2$

$=r(4+r)$

$OE^2=AO^2-AE^2=(3+r)^2-3^2$

$=r(6+r)$

所以

$$\sqrt{r(6+r)}+\sqrt{r(4+r)}=2\sqrt{3}$$

解得 r=6/11．

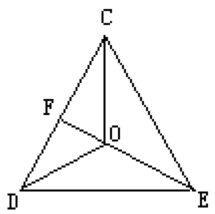
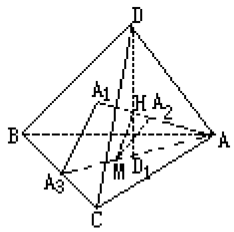


图 b

C3-036 四面体 ABCD 的四条高 AA_1、BB_1、CC_1、DD_1 相交于 H 点（A_1、B_1、C_1、D_1 分别为垂足）．三条高上的内分点 A_2、B_2、C_2 满足 $AA_2:A_2A_1=BB_2:B_2B_1=CC_2:C_2C_1=2:1$．

证明：H、A_2、B_2、C_2、D_1 在同一个球面上．

【题说】 第二十一届（1995 年）全俄数学奥林匹克第十一年级题 7．



【证】 设 M 是△ABC 重心，则它将中线 AA_3 分为 2∶1，于是 MA_2∥A_3A_1．因为 AA_2⊥面 BCD，所以 AA_1⊥A_3A_1，从而 MA_2⊥A_1A，∠MA_2H=90°．同理∠MB_2H=∠MC_2H=90°．又 DD_1 是四面体的高，所以 DD_1⊥MD_1，即∠MD_1H=90°．因此 M、A_2、B_2、C_2、D 及 H 在以 MH 为直径的球面上．

C4　立体几何求解

C4-001 将图中的正方形沿虚线折成一个正四棱柱面．原对角线 AE 就成为一条绕在柱面上的折线 ABCDE．

试求：这折线相邻线段间的夹角．

【题说】 1956 年武汉市赛题 5．利用余弦定理．

【解】 设正方形边长为 4a，则折成之正四棱柱面底面边长为 a，高为 4a．

$$AB=BC=\frac{1}{4}\cdot AE=\sqrt{2}a$$

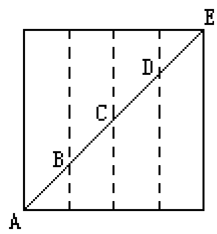
连 AC 及 AC_1，则有

$$AC^2=AC_1^2+CC_1^2=(\sqrt{2}a)^2+(2a)^2=6a^2$$

在△ABC 中，由余弦定理

$$\cos\theta=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{2a^2+2a^2-6a^2}{4a^2}=-\frac{1}{2}$$

所以∠ABC=θ=120°，即折线相邻线段间的夹角为 120°．



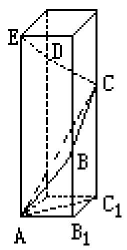


图 a　　　　图 b

C4-002 设人造卫星的位置高出地面恰等于地球的直径，问在卫星上所看到地面占地球全面积的百分之几？（设地球为半径 R 的球面）

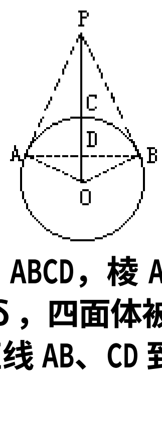
【题说】 1963 年武汉市赛高三二试题 3．

【解】 令卫星为 P，地球中心为 O，如图过 P、O 的平面截地球得一大圆，连 PO 交这大圆于 C，过 P 作这大圆的两条切线 PA、PB，连 AB 交 PO 于 D，过 D 作平面垂直于 PO 截得的球冠即为卫星上看到的地面．

熟知$OD=\frac{OB^2}{OP}=\frac{R^2}{3R}=\frac{R}{3}$，所以球冠的高$h=CD=R-\frac{R}{3}=\frac{2}{3}R$．

$$\frac{S_{球冠}}{S_{球}}=\frac{2\pi Rh}{4\pi R^2}=\frac{h}{2R}=\frac{1}{3}\approx 33.3\%$$

答：卫星上所看到地面占地球全面积 33.3%．

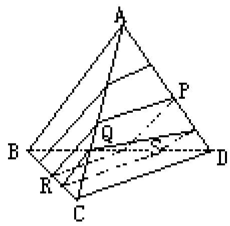


C4-003 已知一个四面体 ABCD，棱 AB 长为 a，棱 CD 长为 b，直线 AB 和 CD 的距离为 d，交角为δ，四面体被平行于直线 AB 和 CD 的一个平面α截成两部分，如果已知直线 AB、CD 到平面α的距离之比是 K，求这

两部分的体积之比．

【题说】 第七届（1965 年）国际数学奥林匹克题 3．本题由捷克斯洛伐克提供．

【解】 由于α平行于 AB 和 CD，它交四面体于一平行四边形 PQSR，PQ∥SR∥CD 和 QR∥PS∥AB（如图）．



立体$AB\ PQ\ RS$的平行于面$PQRS$的中截面，两邻边长为（$1+\frac{K}{2}$）RQ，$\frac{1}{2}PQ$，因此它的面积M_1与面$PQRS$的面积M的比为$\frac{1}{2}(1+\frac{K}{2})$．

同样，立体 CDPQRS 的、平行于面 PQRS 的中截面面积

$$M_2：M=\frac{1}{2}\frac{(K+1/2)}{K}$$

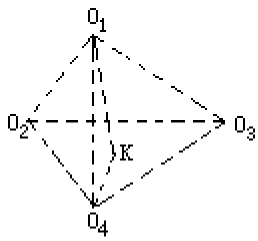
利用拟柱的体积公式$V=\frac{h}{6}$（S_1+4M+S_2）（其中S_1、S_2是互相平行的底面，h 是高，M 是中截面的面积）易知上述两个立体体积之比为

$$K(M+4M_1):(M+4M_2)=\frac{K\left(1+2\left(1+\frac{K}{2}\right)\right)}{1+2\left(K+\frac{1}{2}\right)/K}$$

$$=\frac{K^2(K+3)}{3K+1}$$

C4-004 把半径为 1 的四个小球叠成两层放在桌面上：下层三个，上层一个，两两相切，求上层小球最高点离桌面的高度．

【题说】 1978 年全国联赛一试题 5．



【解】 如图，设上层小球的球心为 O_1，下层三个小球球心为 O_2、O_3、O_4、O_1-$O_2O_3O_4$ 可以看作一个棱长是 2 的正四面体．

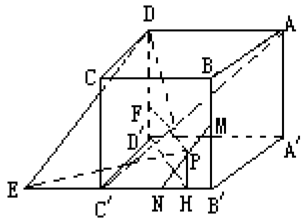
过 O_1 作正四面体的高 O_1K，那么 K 应是正△$O_2O_3O_4$ 的中心，连 O_4K，则$O_4K=\frac{2}{3}\sqrt{3}$，所以 $O_1K=\sqrt{O_1O_4{}^2-O_4K_2}=\frac{2}{3}\sqrt{6}$．

球O_1上最高点到桌面的距离是$1+\frac{2}{3}\sqrt{6}+1=2+\frac{2}{3}\sqrt{6}$．

C4-005 已知边长为 1 的正方体 ABCD-A′B′C′D′，AC′是对角线．M、N 分别是 BB′、B′C′的中点，P 是线段 MN 的中点．求 DP 与 AC′的距离．

【题说】 1981 年上海市赛二试题 5．

【解】 如图，在平面 AB′C′D 中过 D 作 AC′的平行线交 B′C′延长线于 E，则 AC′∥面 DPE．所以 DP 与 AC′间的距离即为 AC′到平面 DPE 的距离，亦即三棱锥 C′-DEP 的高，设为 d．由于



$$\frac{1}{3}d\cdot S_{\triangle DEP}=\frac{1}{3}DC\cdot S_{\triangle C'EP} \qquad (1)$$

则 $$\left(\frac{x}{2}\right)^2+y^2+\left(\frac{z}{2}\right)^2\leq AE^2+EF^2+CF^2$$

$$=AC^2\leq 1$$

$$PE=HE^2+PH^2=\frac{5}{4}\sqrt{2}$$

$$DP=PF^2+DF^2=\frac{\sqrt{34}}{4}$$

由海伦公式得 $$S_{\triangle DEP}=\frac{1}{8}\sqrt{86}$$

所以，由（1）得

$$d=\frac{DC\cdot S_{\triangle C'EP}}{S_{\triangle DEP}}=\frac{\sqrt{86}}{86}$$

C4-006 在六条棱长分别为 2、3、3、4、5、5 的所有四面体中，最大的体积是多少？证明你的结论．

【题说】 983 年全国联赛二试题 4．

【解】 三角形两边之和大于第三边，按题设的数据，一边为 2 的三角形，其余两边只可能是：①3，3；②5，5；③4，5；④3，4．

从而，四面体中，以 2 为公共边的两个面，其余两边只可能有下列三种情形：1．①与②；2．①与③；3．②与④．

下面就这三种情形分别讨论．

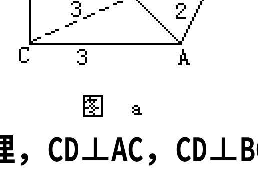


图 a

1．如图 a，由勾股定理，CD⊥AC，CD⊥BC，所以，四面体的体积

$$V_1=\frac{1}{3}CD\cdot S_{\triangle ABC}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot 4\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3^2-1}=8\sqrt{2}/3$$

2．如图 b、C，这样的四面体有两个，它们的体积

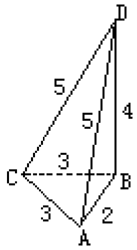


图 b

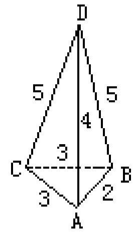


图 c

$$V_2<\frac{1}{3}\cdot 4\cdot S_{\triangle ABC}<V_1$$

3．如图 d、图 e，这样的四面体也有两个，体积

$$V_3<\frac{1}{3}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\sqrt{3^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{5}{6}\sqrt{11}<V_1$$

故所求最大的体积为$V_1=8\sqrt{2}/3$**．**

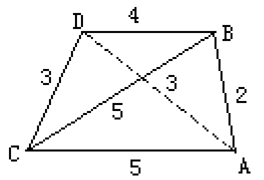


图 d

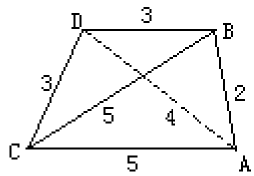


图 e

C4-007 以边长为 s 的正方形为底的物体，如图所示．其上方的一条边平行于底面，且长度为$2s$**，其它边的长度均为**s**，若**$s=6\sqrt{2}$**，此物体的体积是多少？**

【题说】 一届（1983 年）美国数学邀请赛题 11．设法将图补成四面体．

【解】如图，将 AE、BF 延长交于点 C，将 AH、BG 延长交于点 D．易证 ABCD 是边长为 2s 的正四面体，其体积恰为原五面体的 2 倍，故原五面体体积 V 为：

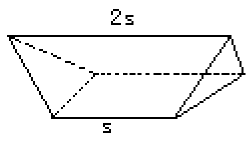


图 a

$$V=\frac{1}{2}V_{ABCD}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}（2s）^2\times\sqrt{\frac{2}{3}}（2s）$$
$$=\frac{1}{3}\sqrt{2}s^2=288$$

[别解] 连结上棱中点 M 与下底四角顶，将形体分为两个小正四面体和一个正四棱锥．

C4-008 圆柱直径为 4R，高为 22R，问最多能装多少个直径为 2R 的球？

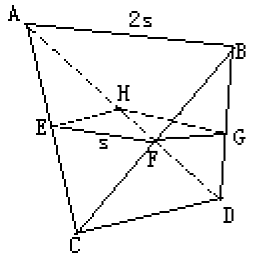


图 b

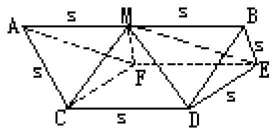


图 c

【题说】 1984 年上海市赛一试题 1（10）．

【解】 最底层放二个球 O_1 和 O_2，它们彼此相切，同时与圆柱相切，在 O_1 球和 O_2 球上面放上 O_3 球和 O_4 球，使 O_1O_2 与 O_3O_4 垂直，且这四个球中任二个球相切．同样在 O_3 球和 O_4 球上面放 O_5 球和 O_6 球，…，直到不能再放为止．显然最底层二个球的球心比圆柱下底面升高 R．下面计算球心 O_3 和 O_4 比过球心 O_1 和 O_2 且平行底面的平面升高的高度．该平面截球 O_1、O_2 及圆柱得到的是圆．所求的高度就是 O_3 到这个平面的距离 $d=O_3B$．如图所示．设 O_1 球与 O_2 球相切于 A 点．因 $O_1O_3=2R$，

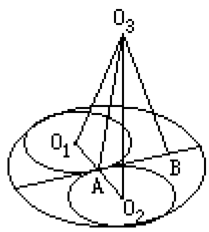
$O_2O_3=2R$，$O_1A=O_2A=R$，所以$O_3A=\sqrt{3}R$．而O_3球与圆柱相切，故

$$AB=2R-R=R$$

$$d=\sqrt{O_3A^2-AB^2}=\sqrt{2}R$$

设在 O_1 球和 O_2 球上能装 K 层，则 K 满足：

$$22R-\sqrt{2}R<R+\sqrt{2}RK+1\leq 22R\ (K=14)$$



所以最多能装 30 个球．

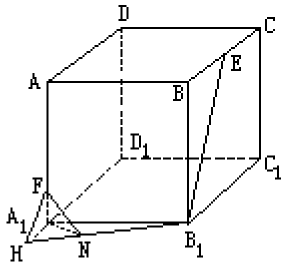
C4-009 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是 BC 的中点，F 在 AA_1 上，且 A_1F：FA=1：2．求平面 B_1EF 与底面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成的二面角．

【题说】 1985 年全国联赛二试题 2．

【证】不妨设正方体的棱长为 6，由 A_1F：FA=1：2 得出 $A_1F=2$，FA=4．

因为平面 ADD_1A_1 ∥ BCC_1B_1，所以平面 B_1EF 与平面 ADD_1A_1 的交线 FH ∥ B_1E．设 FH 交直线 A_1D_1 于 H．△A_1FH 与△BB_1E 的对应边平行，因而相似，于是

$$A_1H=\frac{BE}{BB_1}\cdot A_1F=1$$



在平面 B_1HA_1 上，连接 HB_1，过点 A_1 作 $A_1N\perp HB_1$ 交 HB_1 于 N，连接 FN，由三垂线定理可知，$FN\perp HB_1$．故$\angle A_1NF$ 为所求二面角的平面角．

在$Rt\triangle B_1HA_1$中，$A_1N = A_1H\cdot A_1B_1 / HB_1 = 6/\sqrt{37}$，故

$$\angle A_1NF = \arctan（A_1F / A_1N） = \arctan(\sqrt{37}/3)$$

即所求二面角为$\arctan(\sqrt{37}/3)$．

C4-010 有三个 12 厘米×12 厘米的正方形，如图 a 所示，将其相邻两边中点连结，把每个正方形分成 A、B 两块．然后如图 b 所示，将 6 块粘附于一个正六边形，然后折叠成一个多面体，这多面体体积是多少？

【题说】 第三届（1985 年）美国数学邀请赛题 15．

【解】 折叠成的立体如图 c 所示，恰好是一个大四面体，去掉 3 个小四面体，故其体积为

$$V = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 18^3 - 3\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 6^3 = 864 \text{（立方厘米）}$$

[别解] 亦可将图（c）中顶点 O 与六边形各顶连结，将该多面体剖分为一个正六棱锥和三个相等的四面体．

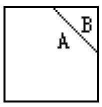


图 a

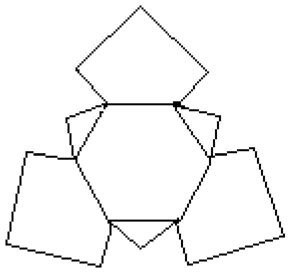


图 b

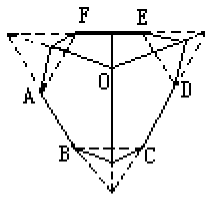


图 c

C4-011 现有边长分别为 3、4、5 的三角形两个，边长分别为 4、5、$\sqrt{41}$的三角形四个，边长分别为$\frac{5}{6}\sqrt{2}$、4、5的三角形六个．用上述三角形为面，可以拼出多少个四面体？

【题说】 1987 年全国联赛一试题 2（4）．原题为填空题．

【解】 显然前两种三角形为直角三角形，第三种为钝角三角形．

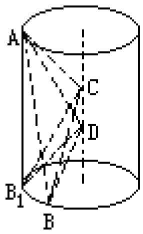
如果四面体ABCD的棱长$CD = \frac{5}{6}\sqrt{2}$，$AC = BD = 4$，$BC = AD = 5$，将△BCD 绕 CD 旋转到面 ACD 上成为$\triangle B_1CD$．这时四边形 AB_1CD 是等腰梯形，设它的高为 h，易知

$$\sqrt{5^2 - h^2} - \sqrt{4^2 - h^2} = \frac{5}{6}\sqrt{2}$$

所以

$$AB_1=\sqrt{5^2-h^2}+\sqrt{4^2-h^2}=\frac{5^2-4^2}{\sqrt{5^2-h^2}-\sqrt{4^2-h^2}}=\frac{9}{\frac{5}{6}\sqrt{2}}>\sqrt{41}$$

AB_1是以CD为轴的圆柱的母线，B在底面圆周上，所以AB＞AB_1＞$\sqrt{41}$．因此，有一边为$\frac{5}{6}\sqrt{2}$的已知三角形不可能与其它已知三角形组成四面体．



如果拼成的四面体ABCD，棱$CD=\sqrt{41}$，$AC=BD=4$，$BC=AD=5$，那么$AB\neq\sqrt{41}$，否则$\angle ABD+\angle ABC=\angle BDC+\angle BCD=90°=\angle CBD$与B-ADC为三面角不合．因此AB应当为3，这样的四面体存在，事实上，先作△BCA使AB=3，BC=5，AC=4，再作面BCA的垂线$BD=4$，则$DC=\sqrt{41}$，$DA=5$，四面体ABCD由边长为4、5、$\sqrt{41}$与3、4、5的三角形各两个拼成．

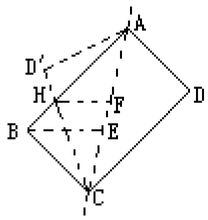
如果四面体ABCD的棱CD=5，AC=BD=4，BC=AD=3，那么与上面同样的理由，AB≠5．所以拼成的四面体只有一种．

C4-012　长为$\sqrt{2}$，宽为1的矩形，以它的一条对角线为轴旋转一一周，求得到的旋转体的体积．

【题说】　1988年全国联赛一试题3．

【解】　如图，设D′是D关于AC的对称点，CD′交AB于H．作BE⊥AC于点E，HF⊥AC于点F．则

$$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{3}$$
$$BE=AB\cdot BC/AC=\sqrt{2}/\sqrt{3}$$
$$HF=BC\cdot AF/AB=\sqrt{3}/2\sqrt{2}$$



设△ABC、△ADC、△AHC绕AC旋转所成的旋转体的体积为V_1、V_2、V_3，则有

$$V_1=V_2=\frac{1}{3}\pi\cdot AC\cdot BE^2=2\sqrt{3}\pi/9$$
$$V_3=\frac{1}{3}\pi\cdot AC\cdot HF^2=\sqrt{3}\pi/8$$

所以 $V=V_1+V_2-V_3=23\sqrt{3}\pi/72$．

C4-013　求以长方体8个顶点中的任意3个为顶点的所有三角形

中，锐角三角形的个数．

【题说】 1989 年全国联赛一试题 1（4）．原题为选择题．

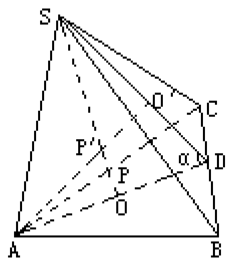
【解】 以长方体 8 个顶点中的任意 3 个为顶点的三角形共有 $C_8^3=56$个，易知，这些三角形只能是直角三角形或锐角三角形，因为以长方体的每个顶点为直角顶点的三角形都是 6 个，所以在 56 个三角形中共有 6×8=48 个直角三角形，从而，锐角三角形的个数为 8．

[别解] 对每个顶点，与它有棱相连的三个顶点组成锐角三角形．

C4-014 已知正三棱锥 S-ABC 的高 SO=3，底面边长为 6，过 A 点向它所对的侧面 SBC 作垂线，垂足为 O′，在 AO′上取一点 P，使 AP/PO′=8，求经过 P 点且平行于底面的截面的面积．

【题说】 1989 年全国联赛一试题 4．

【解】 如图，平面 SAO 交 BC 于 D，则 SO⊥AD，BC⊥平面 ADS，所以 AO′在平面 ADS 上．



设 AO′∩SO=P′，∠SDA=α，在△SOD 中，tanα=SO/OD=$\sqrt{3}$，故$\alpha=60°$．又$AP'=AO/\sin\alpha=4$，$AO'=AD\sin\alpha=9/2$．

$$AP=8AO'/(8+1)=4=AP'$$

故 P 与 P′重合，PO=APcosα=2．

设所求截面面积为 S_1，则

$$S_1/S_{\triangle ABC}=(SP/SO)^2=1/9$$

$$S_1=\frac{1}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot6^2=\sqrt{3}$$

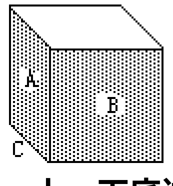
C4-015 若干棱长为 2、3、5 的长方体，依相同的方向拼成棱长为 90 的正方体．求正方体的一条对角线贯穿小长方体的个数．

【题说】 1990 年日本第 1 轮选拔赛题 6．

【解】 因 2、3、5 的最小公倍数是 30，故所求贯穿长方体的个数等于棱长为 30 的正方体的对角线贯穿长方体个数的 3 倍．

$$\frac{30}{2}+\frac{30}{3}+\frac{30}{5}-\frac{30}{2\times3}-\frac{30}{3\times5}-\frac{30}{2\times5}+\frac{30}{2\times3\times5}=22$$

所以，棱长为 90 的正方体中对角线贯穿小长方体的个数是 66 个．

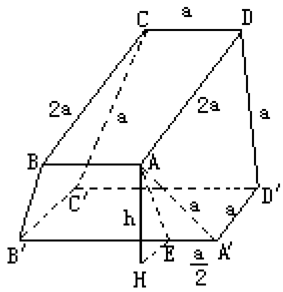


C4-016 用 4 块腰长为 a，上、下底边各为 a、2a 的等腰梯形硬纸片和两块平面多边形硬纸片围成一个六面体，求这个六面体的体积．

【题说】 第一届（1990）希望杯高二二试题 3（2）．

【解】 本题的六面体有二种．一是四棱台，容易算出$V_1=\frac{7}{6}\sqrt{2}a^3$；一是拟柱：

如图，在面AA′B′内作AE⊥A′B′，又作AH⊥底面．则在Rt△AEA′中



$$AA'=a,\ A'E=\frac{a}{2},\ AE=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

在Rt△AEH中，$EH=\frac{a}{2}$，从而拟柱的高

$$h=AH=\sqrt{AE^2-EH^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

上、下底面面积$S=S'=2a^2$

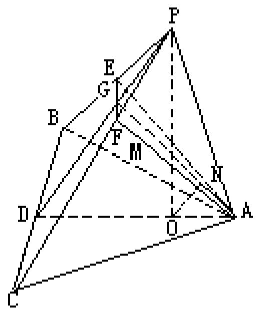
中截面$S_0=\left(\frac{3}{2}a\right)^2=\frac{9}{4}a^2$

故 $V_2=\frac{1}{6}h\ (S+4S_0+S')=\frac{13}{12}\sqrt{2}a^3$

C4-017 设正三棱锥P-ABC的高为PO，M为PO的中点．过AM作与棱BC平行的平面，将三棱锥截为上、下两部分，试求此两部分体积之比．

【题说】 1991年全国联赛一试题3．

【解】 设过AM平行于BC的平面与棱PB、PC分别交于E、F，则EF∥BC，又设D为BC的中点，连接PD交EF于G，则EF：BC=PG：PD．



因为A到平面PBC的距离即A到平面PEF的距离，所以

$$\frac{V_{P-AEF}}{V_{P-ABC}}=\frac{S_{\Delta PEF}}{S_{\Delta PBC}}=\left(\frac{PG}{PD}\right)^2$$

在△PDA中,过O点作PD的平行线交AG于N,则PG：GD=ON：GD=AO：Ap=2：3，PG：PD=2：5，故

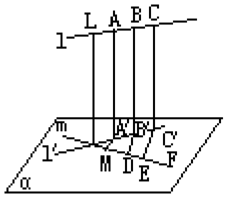
$$V_{P-AEF}/V_{P-ABC}=4/25$$

因此，所求的上、下两部分体积之比为4/25．

C4-018　设 l、m 是两异面直线，在 l 上有 A、B、C 三点，且 AB=BC．过 A、B、C 分别作 m 的垂线 AD、BE、CF，垂足分别为 D、E、F．已知$AD=\sqrt{15}$，$BE=\frac{7}{2}$，$CF=\sqrt{10}$．求l与m的距离．

【题说】　1992 年全国联赛一试题 2．

【解】　过 m 作平面α∥l，设 l 在α内的射影为 l′，A、B、C 在α内的射影分别为 A′、B′、C′，则 A′、B′、C′∈l′．



在平面α上，由三垂线定理，点 A′、B′、C′在直线 m 上的射影即分别为 D、E、F．从而 A′D∥B′E∥C′F．

又设 m 与 l′交点为 M．在 l 与 l′所成平面内，过 M 作 ML⊥l 交 l 于 L，则 LM 即为 l 与 m 的距离．且

$$LM \underline{\underline{\parallel}} AA' \underline{\underline{\parallel}} BB' \underline{\underline{\parallel}} CC'$$

设 LM=x，则 AA′=BB′=CC′=x．

因为 AB=BC，所以 A′B′=B′C′，DE=EF．

若 A、B、C 在 L 同旁，则有 2B′E=A′D+C′F，从而

$$2\sqrt{3.5^2-x^2}=\sqrt{15-x^2}+\sqrt{10-x^2}$$

解得 $x=\sqrt{6}$．

若 A、B、C 不同在 L 同旁，则有

$$2\sqrt{3.5^2-x^2}=|\sqrt{15-x^2}-\sqrt{10-x^2}|$$

方程无解．

故l与m的距离为$\sqrt{6}$．

C4-019　设 a，b，c，d，e，f 是一个给定的四面体的六条棱长，S 是它的表面积，求证：

$$S\leq\frac{\sqrt{3}}{6}(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)$$

【题说】　1992 年捷克和斯洛伐克数学奥林匹克（最后一轮）题 2．

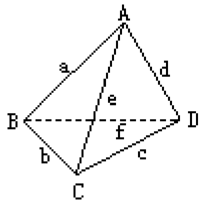
【证】　由于在$\triangle ABC$中，有$a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S_{\triangle ABC}$．于是对于如图所示的四面体 ABCD，有

$$a^2+b^2+e^2\geq 4\sqrt{3}S_{\triangle ABC}$$

$$e^2+c^2+d^2\geq 4\sqrt{3}S_{\triangle ACD}$$

$$a^2+d^2+f^2\geq 4\sqrt{3}S_{\triangle ABD}$$

$$b^2+c^2+f^2\geq 4\sqrt{3}S_{\triangle BCD}$$



将上面四式相加，得

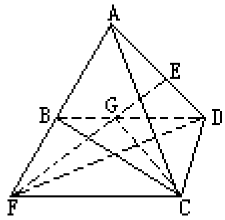
$$2\left(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2\right)\geq 4\sqrt{3}S$$

即 $S\leq\frac{\sqrt{3}}{6}\left(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2\right)$．

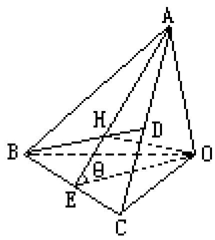
C4-020　设四面体ABCD的体积为V，E为棱AD的中点，F在AB的延长线上，且BF=AB，过C、E、F三点的平面交BD于G，求四面体CDGE的体积．

【题说】　1993年江苏省高中数学竞赛一试题3．

【解】　在△AFD中，因为G点是中线BD与EF的交点，所以 $DG=\frac{2}{3}BD$．又因为 $DE=\frac{1}{2}AD$，所以 $S_{\triangle DGE}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABD}$．三棱锥 $C-DGE$ 与 $C-ABD$ 具有相同的高，故四面体CDGE的体积为 $\frac{V}{3}$．



C4-021　如图，AO⊥平面BOC，点O在平面ABC内的射影H是△ABC的垂心．若OA、OB、OC的长分别为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$、1和1，求二面角 $A-BC-O$ 的大小．



【题说】　1993年四川省高中数学联赛题4．

【解】　设AH交BC于E，则BC⊥AE，又BC⊥AO．所以∠AEO是二面角A-BC-O的平面角．设∠AEO=θ，由于OB在平面ABC内的射影BD⊥AC，所以OB⊥AC．从而AC在平面BOC内的射影

$OC\perp OB$，即 $\angle BOC=90°$．在等腰直角三角形BOC中，$OE=\frac{1}{\sqrt{2}}$，

所以 $\tan\theta=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{3}$，$\theta=60°$．

C4-022 对 V 个顶点，E 条棱，F 个面的凸多面体有欧拉公式 V-E+F=2．某一个凸多面体有 32 个面，每个面是三角形或五边形．V 个顶点，在每一个顶点处，有 T 个三角形面和 P 个五边形面相交．求 100P+10T+V=？

【题说】 第十一届（1993 年）美国数学邀请赛题 10．

【解】 250．

由 F-E+V=2，F=32，得 E=V+30．

因为每个顶点处有 T+P 个面相交，所以每个顶点处有 T+P 条棱，2E=V（T+P）．从而

$$V(T+P)=2(V+30)$$

即
$$V(T+P-2)=60 \qquad (1)$$

每个三角形面有 3 个顶点，所以 VT 将每个三角形面算了 3 次，故三角形面共有 $\frac{VT}{3}$ 个．同理，五边形面有 $\frac{VP}{5}$ 个．又因为每个面是三角形或五边形，所以

$$V\left(\frac{T}{3}+\frac{P}{5}\right)=32 \qquad (2)$$

由（1）、（2）消去 V 得

$$3T+5P=16$$

此方程有唯一的非负整数解 T=P=2．

从而，由（1） V=30，所以 100P+10T+V=250．

C4-023 已知空间四面体 ABCD 中，$AB^2+CD^2=BC^2+DA^2$，求 AC 和 BD 所成的角的度数．

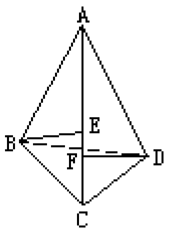
【题说】 1994 年江苏省高中数学竞赛题 4．

【解】 分别在面 ABC、ACD 中，过 B、D 作 AC 的垂线，垂足分别为 E 与 F，则

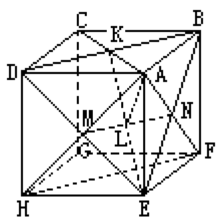
$$AB^2-BC^2=AE^2-CE^2=AC(AE-CE)$$

$$AD^2-CD^2=AC(AF-CF)$$

由已知，AC（AE-CE）=AC（AF-CF），即 AE-EC=AF-FC，所以 E 与 F 重合，从而 AC 与△BDE 所在平面垂直，即 AC 和 BD 所成的角为 90°．



C4-024 如图，正方体 ABCD-EFGH 的面 AFH 和面 BDE 的交角为θ（0°≤θ≤90°），求 cosθ．



【题说】 1994年日本数学奥林匹克预选赛题3．

【解】 如图,平面AFH与BDE的交线为MN,M、N分别是正方形ADHE，ABFE的中心．设AC交BD于K，EK交MN于L，连AL．由△EBD是正三角形，M、N、K分别是三边中点知KL=LE并且EK⊥MN，又△AMN中AM=AN，所以中线AL⊥MN．于是∠ALK为面AFH与面BDE的交角．由AL=LE=KL知，∠ALK=2AEK，故

$$\cos\theta = 2\cos^2\angle AEK - 1 = 2\left[\frac{1^2}{1^2+\frac{1}{2}}\right] - 1$$

$$= \frac{1}{3}$$

C4-025 求曲面S：$x^2-4y^2+z^2-12xy=20$与平面L：$2x+3y+z=3$的交线所围成的部分的面积．

【题说】 1995年日本数学奥林匹克预选赛题10．

【解】 由平面L的方程得$z=3-2x-3y$，代入曲面S并整理得：

$$\left(x-\frac{6}{5}\right)^2+\left(y-\frac{9}{5}\right)^2=\frac{172}{25}$$

即L与S的交线在xy平面上的正投影是以$\left(\frac{6}{5}，\frac{9}{5}\right)$为圆心、$\sqrt{\frac{172}{25}}$为半径的圆．因而L与S的交线为椭圆，其面积为$\frac{172\pi}{25\cos\theta}$（其中θ为L与xy平面的交角，且0°≤θ≤90°）．

L的法向量为（2，3，1），xy平面的法向量为（0，0，1），所以

$$\cos\theta=\frac{(2，3，1)\cdot(0，0，1)}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2}}=\frac{1}{\sqrt{14}}$$

故所求的面积为$\frac{172\sqrt{14}\pi}{25}$．

C4-026 四棱锥O-ABCD有一个正方形的底ABCD，相等的棱OA、OB、OC和OD，∠AOB=45°．设θ为面OAB和OBC所成的两面角的大小，$\cos\theta=m+\sqrt{n}$，其中m、n为整数，求$m+n$．

【题说】 第十三届（1995年）美国数学邀请赛题12．

【解】 各侧面均为全等的等腰三角形．在△AOB内作高AE，E在OB上，则CE也是△COB的高，∠AEC=θ．

设$OA=1$，则$AE=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$AB=2\sin\frac{45°}{2}$．

$$AC^2=2AB^2=8\sin^2\frac{45°}{2}=4（1-\cos45°）=4-2\sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{AE^2+CE^2-AC^2}{2\times AE\times CE} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-(4-2\sqrt{2})}{2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= -3+\sqrt{8}$$

所以 $m+n=-3+8=5$

C4-027　在 xyz 空间内有 4 个点（0，0，0），（1，0，0），（0，1，0），（0，0，1），求以这 4 点为顶点的四面体的内切球的半径．

【题说】　1996 年日本数学奥林匹克预选赛题 1．

【解】　设 4 个点为 O（0，0，0），A（1，0，0），B（0，1，0），C(0,0,1)．内切球的球心为 P，半径为 r．由 $V_{OABC}=V_{POAB}+V_{POBC}+V_{POCA}+V_{PABC}$ 得

$$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\right)\cdot 1=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)r$$

所以 $r=(3-\sqrt{3})/6$．

C4-028　一个四面体恰有一棱比 1 大．证明：该四面体的体积 V≤ $\frac{1}{8}$．

【题说】　第九届（1967 年）国际数学奥林匹克题 2．本题由波兰提供．

【证】　设 AB=x＞1，

CD=z，平面直线 AB、CD 的公垂线（线段）EF=y．不妨设

$$AE\geq\frac{x}{2}，CF\geq\frac{z}{2}$$

则　$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+y^2+\left(\frac{z}{2}\right)^2\leq AE^2+EF^2+CF^2$$

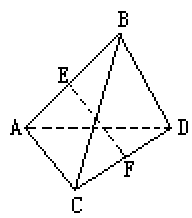
$$=AC^2\leq 1$$

所以

$$V=\frac{1}{6}xyz=\frac{z}{3}\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 y^2}$$

$$\leq\frac{z}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{z}{2}\right)^2}{2}$$

$$=\frac{1}{24}\cdot z(4-z)\ 2\leq\frac{1}{24}z(2-z)(2+1)\leq\frac{1}{8}$$



C4-029　设在四面体 ABCD 中，∠BDC 是直角，D 到平面 ABC 的垂线

的垂足 S 是△ABC 的垂心，试证：

$$(AB+BC+AC)^2\leq 6(AD^2+BD^2+CD^2)$$

并说明等号成立时是一个什么四面体？

【题说】 第十二届（1970 年）国际数学奥林匹克题 5．本题由保加利亚提供．

【证】 由 DS⊥平面 ABC，BS⊥AC，得 DB⊥AC；又因∠BDC 是直角，即 BD⊥DC，故 DB⊥平面 ADC，从而∠ADB 是直角．同理，∠ADC 是直角．

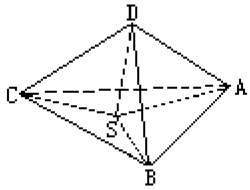
由勾股定理可得

$$AD^2+BD^2=AB^2$$
$$BD^2+CD^2=BC^2$$
$$AD^2+CD^2=AC^2$$

于是利用柯西不等式得

$$6(AD^2+BD^2+CD^2)=3[(AD^2+BD^2)+(BD^2+CD^2)+(CD^2+AD^2)]$$
$$=3(AB^2+BC^2+AC^2)\geq(AB+BC+AC)^2$$

等式当且仅当 AB=BC=AC 时成立．



这种四面体是存在的，只需过 D 点作三条直线两两垂直，在直线上取 A、B、C，使 DA=DB=DC，则四面体 DABC 即合乎要求．

C4-030 一个四面体 ABCD 的各面都是锐角三角形，我们考察所有的闭合折线 XYZTX，其中 X、Y、Z、T 分别是棱 AB、BC、CD、DA 上的内点，证明：（a）若∠DAB+∠BCD≠∠ABC+∠CDA，则这些闭合折线中没有最短的；

（b）若∠DAB+∠BCD=∠ABC+∠CDA，则这些闭合折线中有无穷多条最短的，而且其长度为

$$2AC\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$$

其中α=∠BAC+∠CAD+∠DAB．

【题说】 第十三届（1971 年）国际数学奥林匹克题 4．本题由荷兰提供．

【证】 将四面体 ABCD 展开辅平（如图，其中 C 和 C′、D 和 D′都是由同一点铺开成的两点）．若 CD∥C′D′，则显然 ZYXTZ′的长不小于 ZZ′=CC′，设 ZZ′与 BC、AB、AD 分别交于 Y′、X′、T′，则 ZY′X′T′Z′显然就是一条最短折线，若 CD 与 C′D′不平行，则

ZZ′＞CC′

或 ZZ′＞DD′

此时最小值仅在 Z 与 C 或 D 重合时达到.由于已假定 Z 是内点,所以 ZYXTZ′没有最小值．

再注意 CD∥C′D′的充要条件（如图）是∠P=∠Q，而

∠P=∠BCD-∠CBA

∠Q=∠ADC-∠BAD

合起来就是

$$\angle DAB+\angle BCD=\angle ABC+\angle CDA$$

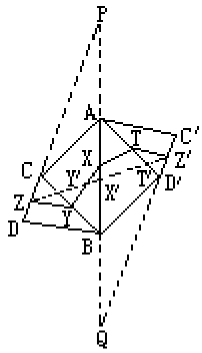
为了计算 CC′，注意 CA=AC′，故由正弦定理

$$CC' = \frac{AC\sin\angle CAC'}{\sin\dfrac{180°-\angle CAC'}{2}}$$

$$= AC\cdot\frac{\sin\angle CAC'}{\cos\dfrac{\angle CAC'}{2}}$$

$$= 2AC\sin\frac{\angle CAC'}{2} = 2A\sin\frac{\alpha}{2}$$

其中　$\alpha=\angle BAC+\angle CAD+\angle DAB$



C4-031　设一个三直角的四面体 PABC（即∠APB=∠BPC=∠CPA=90°）的六棱长度之和是 S，试求（并加以证明）它的极大体积．

【题说】　第五届（1976 年）美国数学奥林匹克题 4．是一立体几何极值问题．

【解】　设三条互相垂直的棱为 AP=a，PB=b，PC=c．由已知得

$$S=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}+a+b+c$$

$$\geq\sqrt{2ab}+\sqrt{2bc}+\sqrt{2ca}+3\sqrt[3]{abc}$$

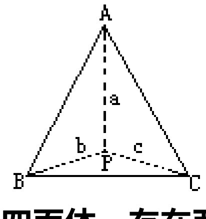
$$\geq 3\sqrt{2}\sqrt[3]{abc}+3\sqrt[3]{abc}$$

$$=3(\sqrt{2}+1)\sqrt[3]{6V}$$（V是四面体体积）

于是

$$V\leq\frac{(5\sqrt{2}-7)S^3}{162}$$

当$a=b=c$，等号成立．因此，体积V的极大值为$\dfrac{5\sqrt{2}-7}{162}S^3$．



C4-032　证明：对任意四面体，存在两个平面，使四面体在两个平面上投影的面积之比不小于$\sqrt{2}$．

【题说】 第十二届（1978 年）全苏数学奥林匹克十年级题 6．

【证】 设对棱 AB=a、CD=b 的公垂线为 h，过 h 作平面 Q，则四面体 ABCD 在 Q 上的投影为梯形，底 a′、b′分别为 a、b 在 Q 上的投影，高为h．因此，投影的面积为$\frac{h}{2}$（a′+b′）．

不妨设 a≥b，向量 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$、$\overrightarrow{CD}=\vec{b}$ 之间的夹角为α（≤90°）．当 Q⊥AB 时，a′+b′=0+bsinα=bsinα．当 Q 与 $\vec{a}+\vec{b}$ 平行（在 h 上任取一点 H，将 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 平移，使 H 为它们的始点，然后由平行四边形法则作出 $\overrightarrow{HE}=\vec{a}+\vec{b}$，再过 h 与 E 作平面 Q）时，$a'+b'=|\vec{a}+\vec{b}|$．而

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=a^2+b^2+2ab\cos\alpha\geqslant a^2+b^2\geqslant 2b^2\geqslant 2b^2\sin\gamma$$

所以对四面体在这两个平面的投影，面积之比不小于$\sqrt{2}$．

C4-033 在一个边长为 1 的正三棱锥内有 13 个点，其中任三点不共线，任四点不共面．试证：在以这些点中的四个点为顶点的三棱锥中，至少有一个的体积

$$V<\sqrt{2}/48$$

【题说】 1979 年新疆区赛二试题 7．

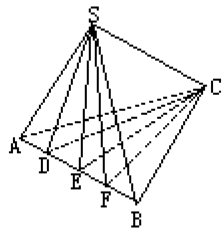
【证】 如图，将底面正△ABC 的任一边（例如 AB）四等分：

AD=DE=EF=FB

于是平面 SCD、SCE、SCF 将正三棱锥分为四个等体积的小三棱锥，每个小三棱锥的体积为：

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{48}$$

由于$\frac{13}{4}>3$，所以有一个小三棱锥内至少含有四个已知点，以这四点为顶点的三棱锥的体积小于$\sqrt{2}/48$．



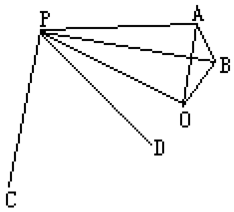
C4-034 P、A、B、C、D 是空间中不同的五点，使得∠APB=∠BPC=∠CPD=∠DPA=θ，θ是一给定的锐角．试确定∠APC+∠BPD 的最大值和最小值．

【题说】 第十三届（1984 年）美国数学奥林匹克题 3．

【解】 由于三面角中两个面角之和总大于第三面角，有

$$\angle APC+\angle BPD<\angle APB+\angle BPC+\angle BPS+\angle CPD=4\theta$$

作∠APC 的平分线 PO．则三面角 P-ABO 与三面角 P-CBO 对称，因此，二面角 A-PO-B=C-PO-B-90°．同理二面角 A-PO-D=C-PO-D=90°．故平面 PBD⊥平面 PAC，且 PO 也平分∠BPD．



现取 PB=1，作 BO⊥PO，AO⊥PA．令∠APO=α，∠BPO=β，在四面体 P-ABO 中，

$$PO=PB\cos\beta$$

$$PA=\cos\alpha\cdot PO=PB\cos\beta\cdot\cos\alpha=\cos\alpha\cos\beta$$

但又因 BO⊥PO 即有 BO⊥平面 APC，BO⊥PA．加之 AO⊥PA，由三垂线定理知 PA⊥BA．因此，

$$PA=PB\cos\theta=\cos\theta$$

即得 $$\cos\alpha\cos\beta=\cos\theta$$

于是 $$\cos(\alpha+\beta)=2\cos\theta-\cos(\alpha-\beta)$$

由于 $\cos(\alpha+\beta)$（$0<\alpha+\beta<2\theta<180°$）随 $\alpha+\beta$ 增加而减小．故当 $\alpha=\beta$ 时，$\cos(\alpha+\beta)$ 取极小值 $2\cos\theta-1$，而 $\alpha+\beta$ 取极大值 $\arccos(2\cos\theta-1)$．亦即∠APC+∠BPD 取极大值 $2\arccos(2\cos\theta-1)$．

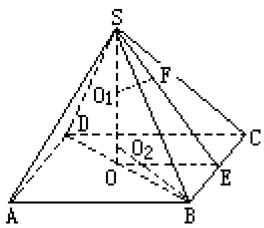
又 $\alpha+\beta>\theta$，故∠APC+∠BPD＞2θ 但可任意接近 2θ．因此它有下界而无极小值．

C4-035　正四棱锥内接于半径为 R 的球且外切于半径为 r 的球．求证：

$$\frac{R}{r}\geq\sqrt{2}+1$$

【题说】　1985 年苏州、镇江市赛题 4．

【证】　设正四棱锥 S-ABCD 的底面中心为 O，底面边长为 a，它的外接球球心为 O_2，内切球球心为 O_1，由对称性知 O_1、O_2 必在 SO 上，且 SO⊥底面 ABCD．



作 O_1F⊥平面 SBC 于 F，直线 SF 必过 BC 中点 E．记 SO=h，∠SEO=α，顶点为 D，矩形 PBDC 的中心为 E，则由中线公式

$$OP^2+OD^2=\frac{1}{2}(PD^2+4\cdot OE^2)=OB^2+OC^2 \quad (1)$$

同样

$$OP^2+OQ^2=OA^2+OD^2 \quad (2)$$

由（1）、（2）得 $OQ=\sqrt{OA^2+OB^2+OC^2-2\cdot OP^2}=\sqrt{3R^2-2r^2}$

所以 Q 在以 O 为球心，$\sqrt{3R^2-2r^2}$ 为半径的球面上．

反之，对上述大球上任意一点 Q，以 PQ 为直径作球交小球 O 于一圆，

在此圆上任取一点 A，作矩形 PAQD，则

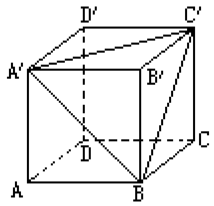
$$OD^2+OA^2=OP^2+OQ^2$$

于是 $$OD^2=OP^2+OQ^2-OA^2=2R^2-r^2＞R^2$$

因而 D 在小球 O 外，过尸作 PA 的垂面 M．平面 M 过 D，与小球 O 交于圆 K，P 在圆 K 内，D 在圆 K 外，在平面 M 上以 PD 为直径作圆与 K 交于 B，再作矩形 PBDC′，则 $OC^2=OP^2+OD^2-OB^2=R^2$，因此，C′也在小球 O 上，这表明大球上的点 Q 均合乎题中条件．

综上所述，所求的轨迹是以O为球心，以$\sqrt{3R^2-2r^2}$为半径的球面．

C4-036　试在棱长为 1 的立方体表面上取三点 P、Q、R，使△PQR 的面积达到最大值，求出此最大面积并说明理由．



【题说】　1990 年南昌市赛一试题 5．

【解】　设立方体的侧面与△PQR 所在平面的夹角分别为α、β、γ，不难证明

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

从而可设 $\cos^2\alpha\geq 1/3$，α是面 PQR 与面 ABCD 的夹角．设△PQR 在正方形 ABCD 上的投影为△P′Q′R′，则

$$S_{\triangle P'Q'R'}=S_{\triangle PQR}|\cos\alpha|\geq(\sqrt{3}/3)\cdot S_{\triangle PQR}$$

又正方形 ABCD 内任一个三角形的面积不大于该正方形面积之半，即$S_{\triangle P'Q'R'}\leq 1/2$．所以$S_{\triangle PQR}\leq\sqrt{3}/2$．

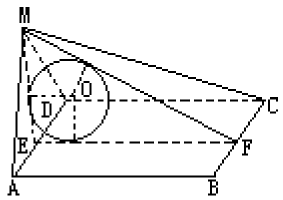
另一方面，如图易知△A′BC′的面积等于$\frac{3}{-}/2$．所以△PQR面

积的最大值为$\sqrt{3}/2$．

C4-037　设棱锥 M-ABCD 的底面是正方形，且 MA=MD，MA⊥AB．如果△AMD 的面积为 1，试求能放入这个棱锥的最大球的半径．

【题说】　1990 年全国联赛一试题 5．

【解】　由于 AB⊥AD，AB⊥AM，所以 AB⊥平面 MAD，从而平面 ABC⊥平面 MAD．作截面 MEF⊥AD，则 MEF 为直角三角形，面积为



$$\frac{1}{2}EF\cdot EM=\frac{1}{2}AD\cdot EM=1$$

易知$EF=EM$时，△MEF有最大内切圆，这时$EF=EM=\sqrt{2}$，$MF=2$，内切圆半径

$$r=\frac{1}{2}(EF+EM-MF)=\sqrt{2}-1$$

设圆心 O 到侧面 MAB、MDC 的距离为 d，则

$$V_{M\text{-}ABCD}=\frac{1}{3}r(S_{MAD}+S_{ABCD}+S_{MBC})+\frac{2}{3}dS_{MAB}$$

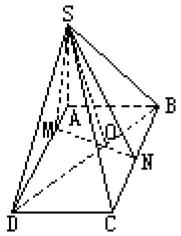
$$=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot EM$$

即 $$(\sqrt{2}-1)(1+2+\sqrt{2})+\sqrt{5}d=2\sqrt{2}$$

解得 $$d=1/\sqrt{5}>\sqrt{2}-1=r$$

故以O为心，$\sqrt{2}-1$为半径的球在棱锥内部，与锥体的三面相切，显然是能放入的最大球.

C4-038 棱锥 S-ABCD 的底面是中心为 O 的矩形 ABCD，AB=4，AD=12，SA=3，SB=5，SO=7，过顶点 S、底面中心 O 和棱 BC 上一点 N 作棱锥的截面. 问 BN 为何值时，所得截面△SMN 的面积取得最小值？这个截面△SMN 的面积的最小值是多少？



【题说】 1996 年北京市中学生数学竞赛高一复试题 4.

【解】 由已知

$$SA^2+AB^2=SB^2，SA^2+AO^2=SO^2$$

所以

$$\angle SAB=90°，\angle SAO=90°$$

$$SA\perp 底面 ABCD$$

又 $$CB\perp AB$$

从而 $$CB\perp 面 SAB$$

设 BN=x，则

$$AM=CN=BC-BN=12-x$$

$$SN=\sqrt{SB^2+BN^2}=\sqrt{25+x^2}$$

$$SM=\sqrt{SA^2+AM^2}=\sqrt{x^2-24x+153}$$

$$MN=\sqrt{AB^2+(AM-BN)^2}=2\sqrt{x^2-12x+40}$$

因为三角形面积 $=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\sqrt{1-\cos^2A}=\frac{1}{2}bc\sqrt{1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2}$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}$$

所以　　　截面SMN的面积

$$=\frac{1}{4}\sqrt{4(x^2-24x+153)(25+x^2)-(2x^2-24x-18)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{52x^2-816x+3744}=\sqrt{13\left(x-\frac{102}{13}\right)^2+\frac{1764}{13}}$$

所以当$BN=\frac{102}{13}$时，截面面积取得最小值$\sqrt{\frac{1764}{13}}=\frac{42\sqrt{13}}{13}$．

C4-039　一边长为1厘米的木制立方体放在一水平面上．在一个上顶点的正上方 x 厘米处的一个点光源照射立方体在水平面上成一影子，这影子的面积，不包括立方体下底面的面积，是48平方厘米．求不超过1000x的最大整数．

【题说】　第十四届（1996年）美国数学邀请赛题4．

【解】　影子包括立方体底面在内，面积为

48+1=49

由相似易知

$$\frac{x}{x+1}=\frac{1}{\sqrt{49}}$$

所以

$$x=\frac{1}{6}$$

$$1000x=\frac{1000}{6}=166\frac{4}{6}$$

所求最大整数为166．

C4-040　正四面体Γ的六条棱与水平面所成的角中，最大的角为θ．Γ可在空间任意转动，求θ的最小值．

【题说】　1996年日本数学奥林匹克题4．

【解】　不妨设Γ的棱长为1，Γ的各棱在水平面上的正投影中最短的长度为x．则cosθ=x．

设Γ的四个顶点为A、B、C、D，在水平面上的正投影分别为A′、B′、C′、D′．Γ的正投影为三角形或四边形．

当Γ的正投影是△A′B′C′时，D′被△A′B′C′所包含，若D′在△A′B′C′的边界（如A′B′）上，则$A'D'+D'B'=A'B'\le 1$，所以$A'D'$或$D'B'$不超过$\frac{1}{2}$．若D'在△A′B′C′的内部，则△A′D′B′、△B′D′C′、△C′D′A′至少有一个为钝角三角形．不妨设△A′D′B′为钝角三角形，则 $A'D'^2+B'D'^2\le A'B'^2\le 1$，从而A′D′或$D'B'$不超过$\frac{\sqrt{2}}{2}$．

当Γ的正投影为凸四边形A′B′C′D′时．四边形内角至少有一个不小于90°，不妨设∠A′≥90°．则$A'B'^2+A'D'^2\le B'D'^2\le 1$，从而$A'B'$或$A'D'$不超过$\frac{\sqrt{2}}{2}$．

另一方面，当Γ的一对对棱均与水平平面平行时，Γ在水平面上的

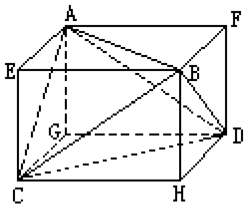
投影是边长为$\frac{\sqrt{2}}{2}$的正方形．此时$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

综上所述，x的最大值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，因而θ的最小值为45°．

C4-041　四面体 ABCD 的对边长分别相等，AB=CD=a，AC=BD=b，AD=BC=c．求这个四面体外接球的直径．

【题说】　1997 年日本数学奥林匹克预选赛题 11．

【解】　如图，作长方体 AEBF-GCHD．使得 GH=AB=CD=EF=a，FH=AC=BD=EG=b，EH=AD=BC=FG=c．



这个长方体与四面体有共同的外接球，球的直径即为长方体的对角线长．不难求得此对角线长为

$$\sqrt{(a^2+b^2+c^2)/2}$$

C4-042　在已知平面的一侧有不共线的三个定点，如果有一个球通过这三点并且与平面相切，求这切点的位置（本题只限用圆规和直尺）．

【题说】　1956 年北京、天津市赛二试题 8．

【解】　设过三个定点 A、B、C 的平面为π_1，O_1是△ABC 的外心．

若已知平面π∥π_1，则过O_1作平面π的垂线，垂足 Q 即为所求．此时有且仅有一解．

若已知平面π与π_1相交于直线 l，设O_1在 l 上的射影为 P，过 P 作⊙O_1的切线，切点为 T，在平面π上，过 P 作 l 的垂线 a，并在 a 上取 Q，使 PQ=PT，则 Q 点即为所求．当 P 在⊙O_1外时，本题有两解（Q 与 Q′在 P 的两侧并且 Q′P=PQ）．当 P 在⊙O_1上时，本题仅一解（Q 与 P 重合），当 P 在⊙O_1内时，无解．

C4-043　已知四面体 ABCD，设 E、F 分别是 AB 及 AC 边上的一点，使△AEF的面积＞$\frac{1}{2}$△ABC的面积，在AD上求一点G，使四面体 AEFG 的体积等于四面体 ABCD 体积的一半．

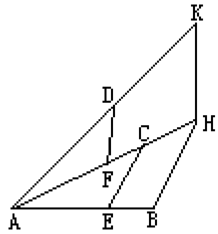
【题说】　1957 年上海市赛高三决赛题 6．

【解】　易知$\frac{AG\times AE\times AF}{AD\times AB\times AC}=\frac{V_{AEFG}}{V_{ABCD}}=\frac{1}{2}$

因此　$AG=\frac{1}{2}\times\frac{AD\times AB\times AC}{AE\times AF}$

AG 的长不难作出．如图，在从 A 出发的射线上，B、C、D、E、F均为已知，连EC，作BH∥EC交AC于H，则$AH=\frac{AB\times AC}{AE}$，同样，连DF，作HK∥DF，交AD于K，则$AK=\frac{AD\times AH}{AF}=\frac{AD\times AB\times AC}{AE\times AF}$．

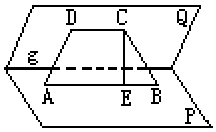
取 AK 中点 G，则 AG 长即为所求．



C4-044　已知两个平面 P、Q 相交于直线 g，在平面 P 上有一点 A，在平面 Q 上有一点 C，点 A、C 都不在 g 上．求作一个能有内切圆的等腰梯形 ABCD（其中 AB∥CD），使得 B 在平面 P 上而 D 在平面 Q 上．

【题说】　第一届（1959 年）国际数学奥林匹克题 6．本题由捷克斯洛伐克提供．

【解】　显然 AB、CD 均必须与 g 平行．因此过 A、C 分别作 g 的平行线 AB、CD．



在 AB 与 CD 所成平面内，过 C 作 CE⊥AB，垂足为 E，则

$$AE=\frac{1}{2}(AB+CD)=\frac{1}{2}(AD+BC)=AD$$

因此以 A 为圆心，AE 为半径作圆交 CD 于 D，再补全等腰梯形 ABCD 即可．

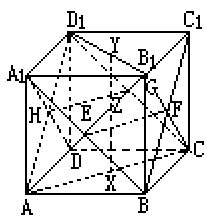
当 AE＞CE 时，本题有两解，当 AE=CE 时，本题一解（这时“梯形”ABCD 是正方形），当 AE＜CE 时，无解．

C4-045　已知立方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，

（a）求 XY 的中点的轨迹，这里 X 是线段 AC 上的任意点，Y 是线段 B_1D 上的任意点；

（b）求 XY 上 Z 点的轨迹，其中 Z 满足 ZY=2XZ．

【题说】　第二届（1960 年）国际数学奥林匹克题 5．本题由捷克斯洛伐克提供．



【解】　（a）作平面 M∥平面 ABC，且距离为 AA_1，则平面 M 在四面体 ACB_1D_1 内的那一部分，也就是正方形 EFGH（包括边界与内部）即为所求轨迹，其中 E、F、G、H 为四个侧面的中心．完备性是显然的．

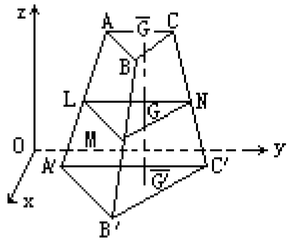
纯粹性：设 Z 为正方形 EFGH 的任一点，作平面 D_1B_1Z 交 AC 于 X，再过 X、Z 作直线交 D_1B_1 于 Y，则 Z 为 XY 中点．

（b）同上作平面 N∥平面 ABC，且距离为 AA_1，则平面 N 在四面体 ACB_1D_1 内的那一部分，即矩形 E′F′G′H′即为所求，其中 E′、F′、G′、H′分别为 AB_1、CB_1、CD_1、AD_1 的三等分点．

C4-046　已知一平面 E 和不在一直线上的三个点 A、B、C，这三个点在平面 E 的同一侧而它们所构成的平面不平行于 E．

设 A′、B′、C′是 E 上三个任意点，线段 AA′、BB′、CC′的中点是 L、M、N，而 G 是△LMN 的重心（这里不包括使得 LMN 不构成三角形的那些 A′、B′、C′）．试求当 A′、B′、C′各自独立地遍历平面 E 时点 G 的轨迹．

【题说】　第三届（1961 年）国际数学奥林匹克题 6．本题由罗马尼亚提供．



【解】　设$\overline{G}$为△ABC的重心，$\overline{G'}$为△A′B′C′的重心．因为G是△LMN 的重心，L、M、N 分别为 AA′、BB′、CC′的中点，所以 G 是 A、A′、B、B′、C、C′这六点的重心，从而 G 是

$\overline{GG'}$的中点．

$\overline{G}$为定点，$\overline{G'}$在平面E上运动，所以G的轨迹是与平面E平行的平面 P．

C4-047　已知直角的一边经过一已知点 A，另一边与线段 BC 至少有一公共点，求直角的顶点在空间的轨迹．

【题说】　第五届（1963 年）国际数学奥林匹克题 2．本题由原苏联提供．

【解】　对空间中异于 A 的任一点 P，过 P 作垂直于 AP 的平面 S．如果∠APB＜90°，则 A 与 B 在平面 S 的同侧；如果∠APB＞90°，则 A 与 B 在平面 S 的异侧；如果∠APB=90°，则 B 在平面 S 上．对于点 C 有类似的结论．（见图 a）

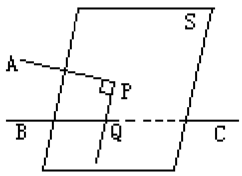


图　a

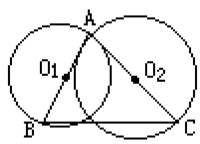


图　b

如果点 B 和 C 在平面 S 的两侧（或其中有一点在平面 S 上），则线段 BC 与平面 S 至少有一个公共点 Q．由于∠APQ 为直角，P 在我们所求的轨迹上．反之，若 B 和 C 在平面 S 的同侧，则线段 BC 与平面 S 没有公共点，于是 P 不在所求的轨迹上．

分别以 AB 和 AC 为直径作两个球 O_1 和 O_2．若 P 在球 O_1 内，球 O_2 外（或在一个球的球面上）．则∠APB≥90°，∠APC≤90°，由上所述可知 B、C 在平面 S 的两侧，线段 BC 与平面 S 相交，即 P 在所求的轨迹上．若 P 在球 O_2 内，O_1 外，则 P 也在轨迹上．若 P 落在两个球相交部分内部，或在两个球的外部，则由前所述 B 和 C 在平面 S 同侧，BC 与 S 不相交，P

不在轨迹上．最后，点 A 显然在轨迹上（如图 b）．

综上所述，所求的轨迹是两个（实心）球 O_1 和 O_2 除去它们的公共部分（包括两个整个球面）．

C4-048　有六个边长为 1 的立方体，堆迭成两层（如图 a），过点 P 求作一平面将此堆迭而成的立体图形分成形状不全等但体积相等的两部分．

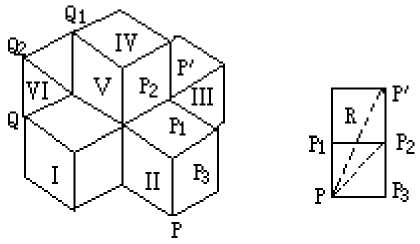


图 a　　　　　图 b

【题说】　1979 年广西区赛二试题 4．

【解】　依次记六个正方体为Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ，相应的中心为 O_1、O_2、O_3、O_4、O_5、O_6．由于平面 PQO_2P_2 通过底层的对称轴 O_2O_4，由

$$\frac{GD}{SB}=\frac{AD}{AB}，\ \frac{DE}{AC}=\frac{BD}{AB}$$

得

$$S_{DEFG}=\frac{SB\cdot AC\cdot \sin\theta}{AB^2}\cdot AD\cdot BD$$

由于 AD+BD=AB=定值．所以当点 D 为 AB 的中点，AD · BD 最大，此时 S_{DEFG} 最大．从而 G、F、E 也分别为 SA、SC、BC 的中点．

由此可知，平面过 AB、BC、SA、SC 的中点 D、E、F、G 时所截的四边形的面积为最大．

C4-049　对一切底面为凸四边形的棱锥，可否用平面横截它，使得所得的截口是平行四边形？

【题说】　第十六届（1990 年）全俄数学奥林匹克十年级题 6．

【解】　可以考虑底面为凸四边形的棱锥 S-ABCD．a、b 分别为平面 SAD 和 SBC、SAB 和 SDC 的交线．α表示过相交直线 a 和 b 的平面．

作平面β∥α，并且β与α的距离小于 A、B、C、D 中任一个到α的距离，则β与四条侧棱均相交，并且β与面 SAD、SBC 的交线都平行于α，β与面 SAB、SCD 的交线都平行于 b．因此截口为平行四边形．

C4-050　给定空间的 6 个点，已知过其中任意 5 点可作一个球，能否由此得出：过这 6 点可作一个球？

【题说】　第十六届（1990 年）全俄数学奥林匹克十一年级题 2．

【解】　结论是肯定的．

若给定的 6 点中有 4 点不在一个平面内,则过这 4 点存在唯一的球 S，给定点中任意 5 点均在一个球上，从而这些点全在球 S 上．

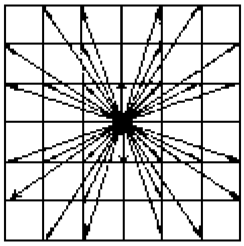
若给定的 6 点中，任意 4 点均在一个平面内，考虑其中任意 3 点，因为它们在一个球上，故不共线，这三点确定一个平面 P．因为每 4 点在同一平面内，所以其余 3 点也都在平面 P 内．根据已知，给定点中，每 5 点共圆．因为不共线的三点确定一个圆，所以给定的点都在一个圆上，

从而在一个球上．

C5 解析几何

C5-001 在一张小方格达长都是 1 的方格纸上放有一个凸 32 边形，若它的顶点都在方格的结点上．问它的最小周长是多少？

【题说】 第九届（1975 年）全苏数学奥林匹克八年级题 3．



【解】 设凸 32 边形的顶点分别为 A_1，A_2，…，A_{32}，则有

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\overrightarrow{A_{32}A_1}=\vec{0}$$

于是问题可以归结为；求出满足以下条件的 32 个向量：

（a）每个向量的起点和终点位于方格纸的结点上；

（b）任意两个向量有不同的方向；

（c）所有向量的和等于 $\vec{0}$；

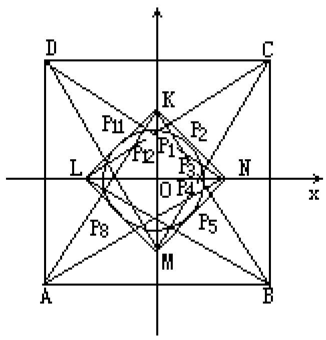
（d）当满足（a）—（c）时，所有向量的长度之和最小．

为此，从一点出发引出所有的向量，如图所示．在这 32 个向量中 4 个向量长度为1，4个为$\sqrt{2}$，8个为$\sqrt{5}$，8个为$\sqrt{10}$，8个为$\sqrt{13}$，它们满足条件（a）—（d），故所求的最小周长为

$$4+4\sqrt{2}+8\sqrt{5}+8\sqrt{10}+8\sqrt{13}$$

（此周界的四分之一由1，$\sqrt{10}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{13}$，$\sqrt{2}$，$\sqrt{13}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{10}$组成．）

C5-002 在正方形 ABCD 的内部作等边三角形 ABK、BCL、CDM 和 DAN，证明四线段 KL、LM、MN、NK 的中点和八线段 AK、BK、BL、CL、CM、DM、DN、AN 的中点，是一个正十二边形的十二个顶点．



【题说】 第十九届（1977 年）国际数学奥林匹克题 1．本题由荷兰提供．

【证】 如图，以已知正方形的中心 O 为原点，以正方形边长之半为长度单位建立直角坐标系．则正方形四个顶点的坐标分别为：

A（-1，-1），B（1，-1），C（1，1），D（-1，1）

因为所作的四个等边三角形分别对称于 x 轴或 y 轴，所以 K、L、M、N 四点在 X 轴和 y 轴上，它们的坐标分别为

$$K(0，\sqrt{3}-1)，L[-(\sqrt{3}-1)，0]$$
$$M[0，-(\sqrt{3}-1)]，N(\sqrt{3}-1，0)$$

CL、NK、CM 的中点分别为

$$P_1\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}，\frac{1}{2}\right)，P_2\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}，\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)，P_3\left(\frac{1}{2}，1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)，$$

利用距离公式可得

$$|P_1P_2|=\sqrt{\left(\sqrt{3}-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)^2}$$
$$=\sqrt{7-4\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$$
$$|P_2P_3|=\sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}-\sqrt{3}\right)^2}$$
$$=\sqrt{7-4\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$$
$$|OP_1|=\sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{2-\sqrt{3}}$$
$$|OP_2|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2}=\sqrt{2-\sqrt{3}}$$
$$|OP_3|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

所以 $$|OP_1|=|OP_2|=|OP_3|$$

且 $$|P_1P_2|=|P_2P_3|$$

又由对称性可知，这十二条线段的中点，即图中的点 P_1、P_2、P_3、…、P_{11}、P_{12}，与 O 点的距离都相等，即它们都在以 O 为圆心，$\sqrt{2-\sqrt{3}}$为半径的圆上；并且每相邻两点之间的距离都相等（都等于$2-\sqrt{3}$）．因此，这12个点是一个正十二边形的顶点．

【别证】 充分利用对称性，我们只需证明

$$P_2P_3=P_3P_4，\angle P_2P_3P_4=150°$$

因△P_2QN、△QP_4N 都是直角三角形．且∠QNP_4=∠P_3P_4N=60°，故 P_3 为 QN 的中点，$P_3P_4=P_3Q=P_2P_3$，再由∠P_2NP_3=15°得

$$\angle P_2P_3P_4=\angle P_2P_3Q+\angle QP_3P_4$$
$$=30°+120°=150°$$

C5-003 A、B 为定二次曲线 $ax^2+bxy+cy^2+ex+fy+g=0$（$a\neq0$）上的两个定点，过 A、B 任作一圆，设该圆与定二次曲线交于另外两点 C、D，求证直线 CD 有定向．

【题说】 1978 年上海市赛二试题 8．

【证】 取 A 点为坐标原点，AB 为 x 轴，设 B 点坐标为（l，0）．不妨假定 a=1，于是原二次曲线的方程化为

$$x^2+bxy+cy^2-lx+fy=0 \qquad (1)$$

过 A、B 的圆的方程为

$$x^2+y^2-lx+ky=0 \qquad (2)$$

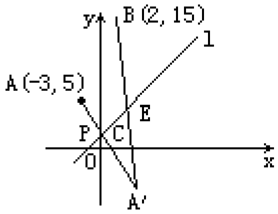
（1）-（2）得 $y[bx+(c-1)y+(f-k)]=0$，这是 C、D 坐标必须满足的方程．

因为 C、D 不在 AB 线（即 x 轴）上，所以它们的纵坐标 $y\neq 0$，从而直线 CD 的方程是

$$bx+(c-1)y+(f-k)=0$$

其中 x、y 的系数 b、c-1，都是定值，所以，直线 CD 有定向．

C5-004　有一条光线从点 A（-3，5）射到直线 l：3x-4y+4=0 以后，再反射到一点 B（2，15），求这条光线从 A 到 B 的长度．



【题说】　1978 年北京市赛二试题 1．

【解】　直线

$$l: 3x-4y+4=0 \quad (1)$$

的斜率是 3/4．

过 A 作直线 p⊥l，p 的方程是

$$4x+3y-3=0 \qquad (2)$$

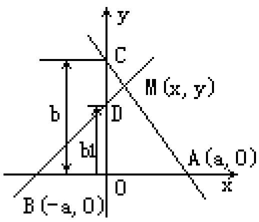
联立（1）、（2），解得 l 与 p 的交点 C（0，1）．

设点 A′关于 l 与 A 对称，则 C 为 AA′的中点，由中点公式求得点 A′的坐标（3，-3）．

如果光线在 l 上的反射点是 E，那么光线之长=AE+EB=A′E+EB=

$A'B=\sqrt{(3-2)^2+(-3-15)^2}=5\sqrt{13}$．

C5-005　如图，二杆各绕点 A（a，0）和 B（-a，0）旋转，且它们在 y 轴上的截距的乘积 $bb_1=a^2$（常数），试求旋转杆交点的轨迹方程．



【题说】　1978 年广西省赛二试题 4．

【解】　设 M（x，y）是两杆交点，则

$$y=-b(x-a)/a$$
$$y=b_1(x+a)/a$$

相乘，得

$$y^2=-bb_1(x^2-a^2)/a^2$$

将 $bb_1=a^2$ 代入上式并整理，得

$$x^2+y^2=a^2$$

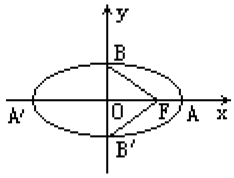
由 $bb_1=a^2$（常数），得 b、b_1 不为 0，因而 y≠0，x≠±a.

故所求轨迹方程为

$$x^2+y^2=a^2\ (-a<x<a)$$

C5-006　设椭圆的中心为原点，它在 x 轴上的一个焦点与短轴两端连线互相垂直，且此焦点和长轴上较近的端点距离是 $\sqrt{10}-\sqrt{5}$，求椭圆方程.

【题说】　1978 年全国联赛一试题 3.



【解】　如图，设所求椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

由已知$\angle OFB=45°$，所以$c=OF=OB=b$，从而$a=\sqrt{2}b$，又$\sqrt{10}-\sqrt{5}=a-c=a-b$，所以$a=\sqrt{10}$，$b=\sqrt{5}$.

所求方程为　　　　$x^2/10+y^2/5=1$

C5-007　已知直线 l_1：y=4x 和 P（6，4）在直线 l_1 上求一点 Q，使过 PQ 的直线与 l_1，以及 x 轴，在第Ⅰ象限内围成的三角形的面积最小.

【题说】　1978 年全国联赛一试题 9.

【解】　设 Q 点坐标为（x_1，y_1），$y_1=4x_1$，则直线的方程为

$$\frac{y-4}{4x_1-4}=\frac{x-6}{x_1-6}$$

PQ与x轴交点M的坐标为$\left(\frac{5x_1}{x_1-1},\ 0\right)$.

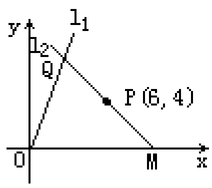
$\triangle OMQ$的面积$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{5x_1}{x_1-1}\cdot 4x_1$

即　　$$10x_1^2-Sx_1+S=0$$

要使方程（1）有实根，则 $S^2-40S\geq 0$．即

$$S\geq 40$$

把 S=40 代入（1），解得 $x_1=2$．这就是说，当 $x_1=2$ 时，S 达到最小．故所求点 Q 的坐标为（2，8）．



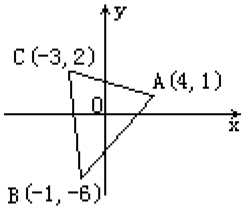
C5-008　设 R 为平面上以 A（4，1）、B（-1，-6）、C（-3，2）三点为顶点的三角形区域（包括三角形内部及周界）．试求当（x，y）在 R 上变动时，函数 4x-3y 的极大值和极小值（须证明你的论断）．

【题说】　1978 年全国联赛二试题 3.

【解】　令λ=4x-3y，当λ固定，（x，y）变动时，我们得平面上

一条直线，令λ变动，则得一系列相互平行的直线，在其中每一条直线上，4x-3y 的值都相同．极值必在三角区域的顶点上达到．

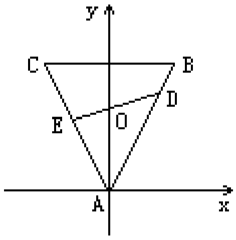
因为λ（A）=13，λ（B）=14，λ（C）=-18．所以，函数 4x-3y 在△ABC 上最大值是 14，最小值是-18．



C5-009　已知△ABC 是边长为 1 的正三角形，O 为其中心．试问：过 O 点且两端落在△ABC 边上的线段中,哪几条最长？哪几条最短？它们各为多长？证
明你的论断．

【题说】 1979 年天津市赛二试题 3．

【解】 如图，以 A 为原点建立直角坐标系 xAy，则直线 AB 的方程为$y=\sqrt{3}x$，直线AC的方程为$y=-\sqrt{3}x$，过O点的直线方程为$y=kx+1\sqrt{3}$．不失一般性，我们可以只考虑 $0 \le k \le k_0$，其中 k_0 表示 OB 的斜率，于是得 D、E 的坐标分别为



$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-k)}，\frac{1}{\sqrt{3}-k}\right)，\left(\frac{-1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+k)}，\frac{1}{\sqrt{3}+k}\right)$$

$$|DE|^2=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}-k}+\frac{1}{\sqrt{3}+k}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}-k}-\frac{1}{\sqrt{3}+k}\right)^2$$

$$=\frac{4(1+k)^2}{(3-k^2)^2}$$

可见当k最小（即$k=0$）时，DE最短，此时DE∥BC，且$DE=\frac{2}{3}$；当k最大（即$k=k_0$）时DE最长，此时DE过顶点B，且$DE=\sqrt{3}/2$．

由图形的对称性，最长与最短的线段都各有三条．

C5－010 给定一点 P（3，1）及两条直线

$$l_1：x+2y+3=0$$

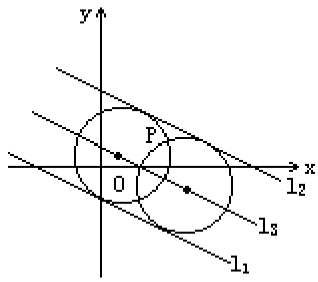
$$l_2：x+2y-7=0$$

试求过 P 点且与 1_1，l_2 都相切的圆的方程．

【题说】 1979 年全国联赛一试题 9．

【解】 如图，由于 $l_1 \parallel l_2$，圆心在直线 $l_3：x+2y-2=0$ 上，

圆半径$R=\frac{3-(-2)}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$.



设圆心坐标为（a，b），则 a＋2b－2＝0．将 P 点坐标代入圆方程

$$(x-a)^2+(y-b)^2=5$$

得

$$(a-3)^2+(b-1)^2=5$$

从而

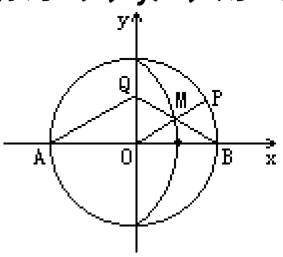
$$\begin{cases}a=4\\b=-1\end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases}a=\frac{4}{5}\\b=\frac{3}{5}\end{cases}$$

故所求的圆的方程为$(x-4)^2+(y+1)^2=5$或$\left(x-\frac{4}{5}\right)^2+\left(y-\frac{3}{5}\right)^2=5$.

C5－011 已知线段 AB＝2a，动点 P 对 AB 的视角为直角，动点 Q 到 A、B 等距离，而且△QAB 与△PAB 等积（但不为零），O 点为 AB 的中点，OP 与 BQ 的延长线相交于 M．以 O 为坐标原点，AB 的垂直平分线为 y 轴，建立坐标系，令∠BOP＝θ，用θ的参数分别求出动点 P、Q、M 的轨迹的参数方程，并把这些参数方程化为普通方程，指出这三个轨迹各是什么曲线？

【题说】 1979 年江西省赛二试题 6．

【解】 1．设 P 的坐标为（x，y），则 P 点轨迹的参数方程为



$$\begin{cases}x=a\cos\theta\\y=a\sin\theta\end{cases}$$

其中 $0<\theta<\pi$ 或 $\pi<\theta<2\pi$.

消去θ得 $x^2+y^2=a^2$（$y\neq0$）．所以动点 P 的轨迹是一个以原点为圆心，以 a 为半径的圆，A、B 两点除外．

2．设 Q 点坐标为（x，y）．因为 QA＝QB，△QAB 与△PAB 等积，所以 Q 在 y 轴上，纵坐标与 P 同．故参数方程为

$$\begin{cases}x=0\\ y=a\sin\theta\end{cases}\quad (0<\theta<\pi \text{或} \pi<\theta<2\pi)$$

普通方程是 x＝0（|y|≤1 并且 y≠0）．即 Q 的轨迹是圆在 y 轴上的直径，O 点除外．

3．设 M 点坐标为（x，y），OP 的方程为 y＝xtanθ，OQ 的方程为 y＝（a－x）·sinθ．由这两个方程解得

$$\begin{cases}x=a\cos\theta/(1+\cos\theta)\\ y=a\sin\theta/(1+\cos\theta)\end{cases}$$

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}+2\sin\frac{x+y}{2}\cos\left(\frac{x+y}{2}+z\right)=0$$

即 $$4\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+z}{2}\cos\frac{y+z}{2}=0$$

所以(i) $x+y=2n\pi$;

C5－012 已知圆的方程为

$$x^2+y^2-2\sqrt{m+1}x-\sqrt{m}y+m+1=0\ (m>0)$$

1．求证：对于任何正数 m，圆心都在某条双曲线 c 上；

2．在双曲线 c 上求一点，使这点与直线 y＝2x＋1 的距离最短．

【题说】 1979 年黑龙江省赛二试题 1．

【解】 1．圆心坐标为

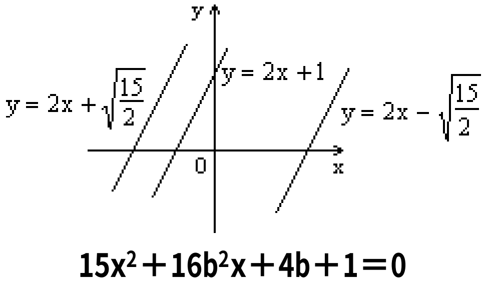
$$\begin{cases}x=\sqrt{m}+1\\ y=\sqrt{m}/2\end{cases}$$

消去参数 m．得圆心满足的方程为

$$x^2-4y^2=1\ (x>0,\ y>0)$$

它是双曲线方程 $x^2-4y^2=1$ 在第一象限中的半支．

2．设双曲线 c 的平行于 y＝2x＋1 的切线方程为 y＝2x＋b，代入双曲线方程得



$$15x^2+16b^2x+4b+1=0$$

由 △＝$64b^2-15(4b^2+1)=0$

得 $b=\pm\sqrt{15}/2$

$y=2x+\sqrt{15}/2$ 与双曲线c相切的点

$$\left(\pm\frac{4}{15}\sqrt{15},\ \pm\frac{1}{30}\sqrt{15}\right)$$

就是双曲线 c 上与直线 y＝2x＋1 距离最短的点．

C5－013 在平面上有若干个点．对其中的任两个点 A 和 B 都可作一

向量$\overrightarrow{AB}$，而且在每一点，以它为起点和以它为终点的向量个数相等．证明：所有这样组成的向量之和等于0．

【题说】 第十三届（1979年）全苏数学奥林匹克八年级题4．

【证】 选取任意一点O（未必是已知点）．用向量$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$来表示向量$\overrightarrow{AB}$．在所有向量的和式中，每一个向量$\overrightarrow{OM}$（M是已知点）取正号和负号的个数一样多，所以，所有向量的和为0．

C5－014 在空间经过点O作1979条直线l_1，l_2，…，l_{1979}，它们中的任何两条不垂直．在l_1上取不同于O的任意一点A_1．证明：能在l_i（i＝2，3，…，1979）上分别选择点A_i，满足$A_1A_3\perp l_2$，$A_2A_4\perp l_3$，…，$A_{i-1}A_{i+1}\perp l_i$，…，$A_{1977}A_{1979}\perp l_{1978}$，$A_{1978}A_1\perp l_{1979}$，$A_{1979}A_2\perp l_1$．

【题说】 第十三届（1979年）全苏数学奥林匹克九年级题7．

【证】过A_1作l_2的垂线交l_3于点A_3,过A_3作l_4的垂线l_5于A_5,…，过A_{1977}作l_{1978}的垂线交l_{1979}于A_{1979}，过A1_{979}作l_1的垂线交l_2于A_2，过A_2作l_3的垂线交l_4于A_4,…,过A_{1976}作l_{1977}的垂线交l_{1978}于A_{1978}.由于l_1，l_2，…，l_{1979}两两不垂直，故上述交点总是存在的．题得证．

C5－015 试证：若一个圆的圆心不是有理点，则其圆周上至多只有两个有理点．

【题说】 1980年芜湖市赛题2．

【证】 用反证法．假设圆周上有三个有理点：A（x_1，y_1）、B（x_2，y_2）、C（x_3，y_3）．设圆的方程是

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \qquad (1)$$

将A、B、C三点坐标代入（1）得，

$$\begin{cases}(x_1-a)^2+(y_1-b)^2=r^2 & (2)\\(x_2-a)^2+(y_2-b)^2=r^2 & (3)\\(x_3-a)^2+(y_3-b)^2=r^2 & (4)\end{cases}$$

（2）－（3）得：

$$x_1^2-x_2^2-2(x_1-x_2)a+y_1^2-y_2^2-2(y_1-y_2)b=0$$

即 $2(x_1-x_2)a+2(y_1-y_2)b-(x_2^2-x_1^2+y_2^2-y_1^2)=0 \quad (5)$

（2）－（4）经整理得：

$$2(x_1-x_3)a+2(y_1-y_3)b-(x_3^2-x_1^2+y_3^2-y_1^2)=0 \quad (6)$$

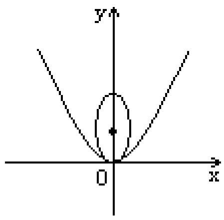
作为a、b的一次方程组（5）与（6）中系数和常数项都是有理数，故a、b都是有理数，与已知条件不符．

因此，圆周上至多只有两个有理点．

C5－016 已知椭圆$x^2+\frac{(y-3)^2}{9}=1$保持在抛物线$y=ax^2$上侧（包括有公共点的情形），求a的最大值（须加证明）．

【题说】 1981年芜湖市赛题5．

【解】 抛物线与椭圆恰有一个公共点（0，0）．由它们的方程消去y得



$$x^2[a^2x^2+(9-6a)]=0$$

从而$9-6a\geq 0$，a的最大值为$\frac{3}{2}$．

C5－017 已知：（1）半圆的直径 AB 长为 2r；

（2）半圆外的直线 l 与 BA 的延长线垂直，垂足为 T，$|AT|=2a$（$2a<r/2$）；

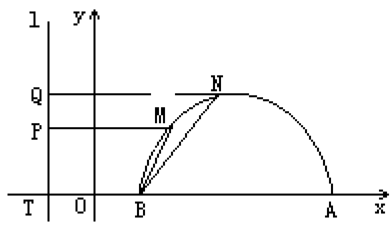
（3）半圆上有相异两点 M、N，它们与直线 l 的距离|MP|、|NQ|满足条件

$$\frac{|MP|}{|AM|}=\frac{|NQ|}{|AN|}=1$$

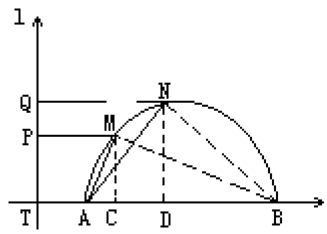
求证：$|AM|+|AN|=|AB|$．

【题说】 1982 年全国联赛题 3．

【证】 如图 a，取线段 TA 的中点 O 为坐标原点，以有向直线 TA 为 x 轴，建立平面直角坐标系．则圆的方程为



图a



图b

$$[x-(r+a)]^2+y^2=r^2$$

以 l 为准线的抛物线方程为 $y^2=4ax$

因 M、N 均为抛物线与圆的交点，由

$$\begin{cases} y^2=4ax \\ (x-r-a)^2+y^2=r^2 \end{cases}$$

得 $$x^2-2(r-a)x+2ra+a=0$$

所以，M、N 的坐标之和 $x_1+x_2=2r-2a$．

又$|AM|=|PM|=x_1+a$，$|AN|=|QN|=x_2+a$，$|AB|=2r$，故

$$|AM|+|AN|=|AB|$$

【别证】 如图 b，作 MC⊥AB，ND⊥AB，C、D 均为垂足．

在 Rt△AMB 中，$AM^2=AC\cdot AB$，在 Rt△ANB 中，$AN^2=AD\cdot AB$，所以

$$\begin{aligned} AM+AN &= (AN^2-AM^2)/(AN-AM) \\ &= (AD-AC)\cdot AB/(NQ-MP) \\ &= AB \end{aligned}$$

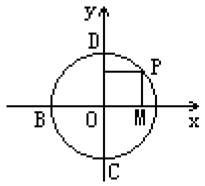
C5－018 已知圆 $x^2+y^2=r^2$（r 为奇数），交 x 轴于 A（r，0）、B（－r，0），交 y 轴于 C（0，－r）、D（0，r）．P（u，v）是圆周上的点，$u=P^m$，$v=q^n$（p、q 都是质数，m、n 都是自然数），且 u＞v，点 P

在 x 轴和 y 轴上的射影分别是 M、N．求证：|AM|、|BM|、|CN|、|DN|分别为 1、9、8、2．

【题说】 1982 年全国联赛题 5．

【证】 因为 r 为奇数，$u^2+v^2=r^2$，所以 u、v 一奇一偶．

（1）设 u 为偶数，由已知 $u=2^m$．又



$$(r+u)(r-u)=v^2=q^{2n}\text{（q 为奇质数）}$$

所以 $r+u=q^{\alpha}$，$r-u=q^{\beta}$

（其中 $\alpha+\beta=2n$，$\alpha>\beta$）

$$2u=q^{\beta}(q^{\alpha-\beta}-1)$$

即 q^{β} 是 2u 的因数．

所以 $\beta=0$，$r=u+q^{\beta}=2^m+1$，$q^{2n}=q^{\alpha}=r+u=2^{m+1}+1$，$(q^n+1)(q^n-1)=2^{m+1}$．

设 $q^n+1=2^{\delta}$，$q^n-1=2^{\varphi}$，其中 $\delta>\varphi$，则 $q^n=\frac{1}{2}(2^{\delta}+2^{\varphi})=2^{\delta-1}+2^{\varphi-1}$．

由于 q 是奇数，所以 $\varphi=1$，$q^n-1=2$．

从而 $q=3$，$n=1$，$v=q^n=3$．

因为 $2^{m+1}=(q^n+1)(q^n-1)=(3+1)\cdot 2$，故 $m=2$，$u=2^m=4$，$r=2^m+1=5$．

由此得，|AM|＝1，|BM|＝9，|CN|＝8，|DN|＝2．

（2）设 v 为偶数，同理可得 v＝4，u＝3，与题设 u＞v 不合，舍去．

C5－019 已知直线 $y=kx+b$（$b\neq 0$）与二次曲线

$$Ax^2+2Bxy+cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

相交于 M、N 两点，试求直线 OM、ON 垂直的充要条件．

【题说】 1982 年上海市赛一试题 6．

【解】 x、y 的齐次方程

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+(2Dx+2Ey)\frac{y-kx}{b}+F\left(\frac{y-kx}{b}\right)=0 \quad (1)$$

表示通过原点的两条直线．M、N 的坐标显然满足（1），所以（1）就是 OM、ON 的方程．

（1）可改写成

$$(F+2Eb+cb^2)y^2+Gxy+(Ab^2-2Dkb+Fk^2)x^2=0$$

（其中 G 不必算出）OM⊥ON 的充要条件是斜率之积

$$k_1k_2=\frac{Ab^2-2Dkb+Fk^2}{F+2Eb+cb^2}=-1$$

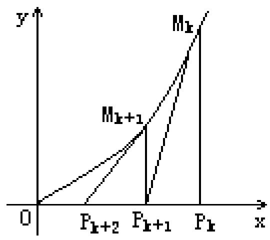
即 $Ab^2-2Dkb+Fk^2+Cb^2+2Eb+F=0$

C5－020 已知曲线 C：$y=x^2$．过定点 P_1（a，0）（a＞0），作与 y 轴平行的直线且和 C 相交于点 M_1，然后过点 M_1 作 C 的切线和 x 轴相交于

点 P_2，再过 P_2 作与 y 轴平行的直线且和 C 相交于 M_2，又过 M_2 作 C 的切线和轴相交于 P_3，以下，用同样的方法直至无穷，求 $S_1+S_2+\cdots+S_n+\cdots$ 的值．（其中 S_k 表示△$P_kM_kR_{k+1}$ 的面积）

【题说】 1982 年上海市赛一试题 4．

【解】 如图，设点P_k的坐标为（x_k，0），则点M_k为（xk，x_k^2），曲线 C 在 M_k 处的切线方程为



$$y=x_k^2+2x_k\ (x-x_k)$$

切线与 x 轴的交点横坐标为

$$x=\frac{1}{2}x_k$$

即 $$x_{k+1}=\frac{1}{2}x_k$$

所以 $$S_k=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x_k\cdot x_k^2=\frac{1}{4}x_k^3$$

$$S_{k+1}=\frac{1}{4}x_{k+1}^3=\frac{1}{8}S_k$$

$$S_1+S_2+\cdots+S_n+\cdots=\frac{a^3}{4}\cdot\frac{1}{1-1/8}=\frac{2}{7}a^3$$

C5－021 一个椭圆内切于一个长为 m，宽为 n 的矩形．求这个椭圆的内接矩形的周长的最大值．

【题说】 1983 年上海市赛一试题 1（4）．

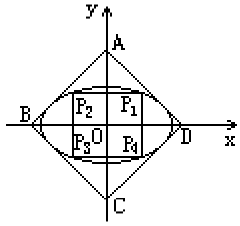
【解】 设椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

而 ABCD 为它的外切矩形．

因椭圆的互相垂直的切线交点轨迹是以O为圆心，$\sqrt{a^2+b^2}$为半径的圆，故点O到点A、B、C、D等距，且都等于$\sqrt{a^2+b^2}$，从而O是矩形ABCD的对角线交点，$2\sqrt{a^2+b^2}=AC=\sqrt{m^2+n^2}$．

又设 $P_1P_2P_3P_4$ 为椭圆的内接矩形，则 P_1P_2、P_1P_4 分别平行 x 轴、y 轴，设 P_1 的坐标为（acosθ，bsinθ），θ为锐角，则：

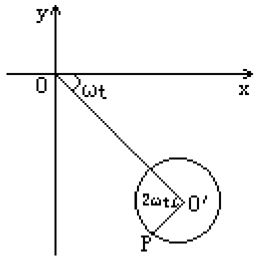


$P_1P_2P_3P_4$ 的周长＝4（acosθ＋bsinθ）

$$\leq 4\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{m^2+n^2}$$

所以$P_1P_2P_3P_4$周长的最大值为$2\sqrt{m^2+n^2}$（此时$\theta=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{a}{b}$）．

C5－022 设平面上有一圆，它的每一点都以角速度ω绕原点 O 顺时针旋转，同时该圆上一点 P 以角速度 2ω绕圆心 O′逆时针旋转，若时间 t＝0 时，圆心 O′的坐标为（l＋r，0），动点 P 的坐标为（l，0）．如图，求点 P 的轨迹方程．（其中 l＞0，r＞0）



【题说】 1984 年上海市赛二试题 3．

【解】 如图，设在时刻 t，P 点的坐标为 P（x，y），则

$$\begin{cases}x=(l+r)\cos(-\omega t)+r\cos(\pi+\omega t)\\ y=(l+r)\sin(-\omega t)+r\sin(\pi+\omega t)\end{cases}$$

即

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{(l+2r)^2}=1$$

它表示一个椭圆．

C5－023 设复数z所对应的点在线段l：$y=x(0<x<\frac{\sqrt{2}}{2})$上运动，试求复数$w=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$对应点的运动轨迹．

【题说】 1985 年芜湖市赛二试题 2．

【解】 因为$z=x+x_i$（$0<x<\sqrt{2}/2$），所以

$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}\left(x+x_i+\frac{1}{x+x_i}\right)=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2x}+\left(x-\frac{1}{2x}\right)i\right]$$

设 w＝u＋iv（u、v∈R），则

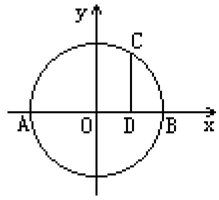
$$\begin{cases}u=\frac{1}{2}\left(x+1\frac{1}{2x}\right) & (1)\\ v=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2x}\right) & (2)\end{cases}$$

所以$u^2-v^2=\frac{1}{2}$．

当$0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$时，由（1）知$u>0$，由（2）知$v<0$．

C5－024 如图，AB 是单位圆的直径，在 AB 上任取一点 D，DC⊥AB，交圆周于 C，若点 D 坐标为（x，0），则当 x 为何值时，线段 AD、BD、

CD可构成锐角三角形？

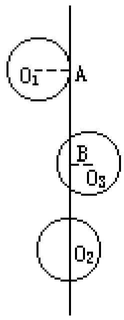


【题说】 1984年全国联赛一试题2（1）．原题为填空题．

【解】 先设D点在OB上，OD＝x，AD＝1＋x，BD＝1－x，$CD=\sqrt{1-x^2}$．其中AD最长．这时构成锐角三角形的充要条件是$BD^2+CD^2>AD^2$．即$(1-x)^2+(1-x^2)>(1+x)^2$，解得$0\le x<\sqrt{5}-2$．由对称性，当$2-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}-2$时，线段AD、BD、CD可构成锐角三角形．

C5－025 三个圆有相同的半径，都是3，圆心分别为（14，92）、（17，76）和（19，84）．一条直线通过点（17，76），且位于它同一侧的三个圆各部分的面积之和，等于另一侧三个圆各部分的面积之和，那么这条直线的斜率的绝对值是多少？

【题说】 第二届（1984年）美国数学邀请赛题6．这条直线已经平分一个圆，必须与另两个圆的圆心等距．



【解】 设直线方程为

$$ax+by+c=0$$

则

$$17a+76b+c=0 \quad (1)$$

$$14a+92y+c=-(19a+84y+c) \quad (2)$$

（2）即

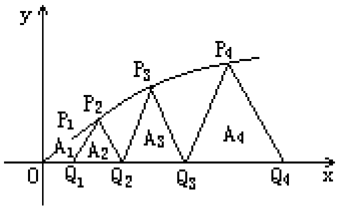
$$33a+176b+2c=0 \quad (3)$$

（1）、（3）消去c得

$$a+24b=0$$

所以斜率的绝对值$\left|\frac{a}{b}\right|=24$．

C5－026 设在抛物线$y=\sqrt{x}$与x轴所围部分内从原点O开始作一系列内接正三角形A_1、A_2、A_3、…（如图）．L_n是A_n的一边长，证明$L_n=\frac{2n}{3}$．



【题说】 1986 年芜湖市赛题 4．

【证】 用数学归纳法．由$y=\sqrt{x}$及$y=\sqrt{3}x$可解得P1点的坐标为$\left(\frac{1}{3}，\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，所以$L_1=OQ_1=2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$．

假设当 n≤k 时，命题成立，当 n＝k＋1 时，设 Q_k 坐标为（x_k，0），则

$$x_k=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}+\cdots+\frac{2k}{3}=\frac{1}{3}k(k+1)$$

由方程组
$$\begin{cases}y=\sqrt{x}\\ y=\sqrt{3}\left[x-\frac{1}{3}k(k+1)\right]\end{cases}$$

得
$$x=\frac{1}{3}(k+1)^2$$

从而
$$L_{k+1}=2\left[\frac{1}{3}(k+1)^2-\frac{1}{3}k(k+1)\right]=\frac{2}{3}(k+1)$$

即当$n=k+1$时命题亦真．因此对所有$n\in N$，$L_n=\frac{2n}{3}$．

C5－027 已知集合

$$A=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|=a,\ a>0\}$$
$$B=\{(x,y)\,|\,|xy|+1=|x|+|y|\}$$

若 A∩B 是平面上正八边形的顶点所构成的集合，求 a 的值．

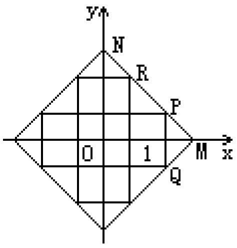
【题说】 1987 年全国联赛一试题 2（2）．原题为填空题．

【解】 A 所表示的图形是中心在原点、对角线长为 2a 且落在坐标轴上的正方形的周界，B 所表示的图形是分别与坐标轴平行且与坐标轴距离为 1 的四条直线．

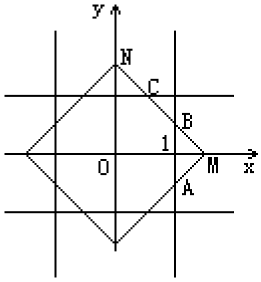
1．如图a，$\sqrt{2}a=|MN|=|PR|+2|MP|$
$$=|QP|+2\sqrt{2}|QP|/2=2+\sqrt{2}$$

所以
$$a=2+\sqrt{2}$$

2．如图 b，|QP|＝|PR|＝|MN|－2|MP|



图a



图b

即 $2(a-1)=\sqrt{2}a-2\sqrt{2}(a-1)$

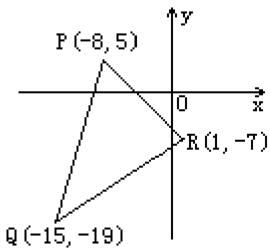
所以 $a=\sqrt{2}$

故所求a的值为$2+\sqrt{2}$或$\sqrt{2}$.

C5－028 三角形的三个顶点的坐标为 P（－8，5），Q（－15，－19），R（1，－7）．∠P 的平分线方程可以写成为 ax＋by＋c＝0．试求 a＋c．

【题说】 第八届（1990 年）美国数学邀请赛题 7．

【解】 设∠P 的平分线交 QR 于 D，则



$$\frac{RD}{DQ}=\frac{PR}{PQ}=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$$

于是，D的坐标为$\left(-5,-\frac{23}{2}\right)$，PD方程为

$$y-5=-\frac{11}{2}(x+8)$$

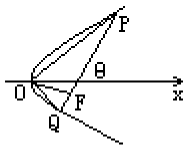
即 $$11x+2y+78=0$$

$$a+c=11+78=89$$

C5－029 设 O 为抛物线的顶点，F 为焦点，且 PQ 为过 F 的弦．已知|OF|＝a，|PQ|＝b．求△OPQ 的面积．

【题说】 1991 年全国联赛一试题 4．

【解】 如图，以 F 为极点建立极坐标系，抛物线的方程为



$$\rho=\frac{2a}{1-\cos\theta}$$

设点 P 的极角为θ（θ∈（0，π）），则点 Q 的极角为π＋θ，

b＝|PQ|

＝2a/（1－cosθ）＋2a/[1－cos（π＋θ）]

＝4a/sin²θ

所以 $\sin\theta=2\sqrt{a/b}$

$$S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}(a\sin\theta)\cdot b=a\sqrt{ab}$$

C5－030 设P（e，π，$\sqrt{5}$）是以8个点（x，y，z）（x、y、z为0或6）为顶点的立方体内的点，求 P 关于立方体的各面的对称点（6 个）为顶点的多面体与原来立方体的公共部分的体积．

【题说】 1991 年日本数学奥林匹克预选赛题 5．

【解】 设点 P（a，b，c）为立方体内部的点．P 关于各面的对称点组成 8 面体，它的一个面，例如 A（－a，b，c）、B（a，－b，c）、C（a，b，－c）组成的三角形与原来的立方体交于（0，0，c）、（a，0，0）、（0，b，0）．因此切得的三棱锥的体积为$\frac{1}{6}abc$，对其它面同样可得到切得的体积，切得体积之和为$V=\frac{1}{6}\sum x_i y_j z_k$，其中 i、j、k 为 1 或 2．因为 $x_1+x_2=y_1+y_2=z_1+z_2=6$，所以

$$V=\frac{1}{6}(x_1+x2)(y_1+y_2)(z_1+z_2)=6^2$$

因此公共部分体积为 $6^3-6^2=180$．

C5－031 求与抛物线 $y=x^2$ 相切的抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 的顶点的轨迹．

【题说】 第十七届（1991 年）全俄数学奥林匹克九年级题 1．【解】抛物线 $y=x^2$ 与 $y=-x^2+bx+c$ 相切的充要条件是

$$2x^2-bx-c=0$$

有唯一解，即

$$\triangle=b^2+8c=0$$

所以 $c=-b^2/8$．抛物线

$$y=-x^2+bx-b^2/8$$

的顶点为 $x=-b/-2=b/2$，$y=b^2/8$．消去 b 得所求的轨迹：

$$y=\frac{1}{2}x^2$$

仍是一条抛物线．

C5－032 在坐标平面上，设方程

$$y^2=x^3+2691x-8019$$

所确定的曲线为 E，连接该曲线上的两点（3，9）和（4，53）的直线交曲线 E 于另一点，求该点的横坐标．

【题说】 1992 年日本数学奥林匹克预选赛题 3．

【解】 容易求得所给直线的方程为 $y=44x-123$，将它代入曲线方程并整理得

$$x^3-1936x^2+(2\times44\times123+2691)x-(123^2+8019)=0$$

由方程根与系数的关系可知,所求的横坐标为 1936－(3＋4)＝1929．

C5－033 已知圆的方程为 $x^2+y^2=4$，试在坐标平面上求两点 A（s，t）、B（m，n），使下列两条件满足：

(1) 圆上任一点到 A 点的距离与到 B 点的距离之比为定值 k；

(2) s＞m，t＞n，且 m、n 均为正整数．

【题说】 1993年江苏省高中数学竞赛一试题4．

【解】 设圆上任意一点为P（x，y）则

$$\frac{\sqrt{(s-x)^2+(t-y)^2}}{\sqrt{(m-x)^2+(n-y)^2}}=k \qquad (1)$$

取P_1（2，0），P_2（－2，0），得

$$\left.\begin{aligned}\frac{(s-2)^2+t^2}{(m-2)^2+n^2}=k^2\\ \frac{(s+2)^2+t^2}{(m+2)^2+n^2}=k^2\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

从而 $s=k^2m$

再取P_3（0，2），P_4（0，－2）又得

$$t=k^2n \qquad (3)$$

将（2）、（3）代入（1），取$x=y=\sqrt{2}$，则有

$$\frac{(k^2m-\sqrt{2})^2+(k^2n-\sqrt{2})^2}{(m-\sqrt{2})^2+n(n-\sqrt{2})^2}=k^2$$

化简为 $k^2(m^2+n^2)-4=0$

所以 $m=n=1$，$k^2=2$，所求点为（2，2），（1，1）．

C5－034 设P（x，y）为$|5x+y|+|5x-y|=20$上一点．求x^2-xy+y^2之最大、最小值．

【题说】 第三届（1993年）澳门数学奥林匹克第一轮题4．

【解】 方程图像，即x＝2，x＝－2，y＝10，y＝－10四直线围成的矩形，其顶点为A（2，－10），B（2，10），C（－2，10），D（－2，－10）．由对称性仅需在AB、BC边考虑．在AB上，

$$Q=x^2-xy+y^2=4-2y+y^2=3+(1-y)^2$$

所以 $3\le Q\le 124$（$=3+(1+10)^2$）

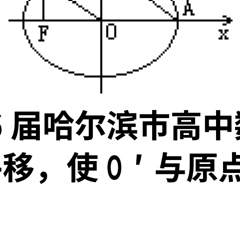
同理，在BC上，$84\le Q\le 124$．所以

$$Q_{最大}=124，Q_{最小}=3$$

C5－035 在椭圆C：$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）中，$F_1$为左焦点，O′为中心，A、B分别为它的右顶点和上顶点，P为C上一点，PF_1恰好垂直于长轴，且O′P∥AB．

（1）求椭圆C的离心率．

（2）若椭圆C恒过点Q（1，0），且一条准线方程为x＋2＝0，求长半轴a的取值范围．



【题说】 1993年第16届哈尔滨市高中数学竞赛一试题25．

【解】 （1）先将C平移，使O′与原点O重合，C的方程变形为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

此时P的横坐标为$-c$，因为PO∥BA，所以P的纵坐标为$-\frac{b}{a}\cdot(-c)=\frac{bc}{a}$.

因为 P∈C，所以

$$\frac{c^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{bc}{a}\right)^2}{b^2}=1$$

从而 $$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

（2）由（1）知 $a^2=2c^2$，从而 $b=c$，所以 C 的方程为

$$\frac{(x-x_0)^2}{2c^2}+\frac{(y-y_0)^2}{c^2}=1$$

由 Q（1，0）∈C，得

$$(1-x_0)^2-2y_0^2=2c^2 \qquad (1)$$

又因左准线为$x=-2$，所以$x_0-\frac{a^2}{c}=-2$，$x_0=\frac{a^2}{c}-2=2c-2$.

代入（1）得

$$(3-2c)^2+2y_0^2=2c^2$$

所以 $$2y_0^2=2c^2-(3-2c)^2=-2c^2+12c-9\geq 0$$

解得 $$3-\frac{3\sqrt{2}}{2}\leq c\leq 3+\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

所以 $$3\sqrt{2}-3\leq a\leq 3\sqrt{2}+3$$

C5－036 已知椭圆C：$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$上存在关于直线 l：$y=2x+m$ 对称的两点．试求 m 的取值范围．

【题说】 1993 年四川省高中数学联赛题 5（1）．

【解】 平移坐标，使（1，2）成为新的原点，则椭圆方程变为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y2}{4}=1$，直线l方程为$y=2x+m$.

设 A(x_1,y_1)、B(x_2,y_2)为椭圆上关于 l 对称的点，AB 中点为 M(x,y)，则

$$4x_1^2+9y_1^2=36 \qquad (1)$$

$$4x_2^2+9y_2^2=36 \qquad (2)$$

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{1}{2} \qquad (3)$$

$$y=\frac{y_1+y_2}{2},\ x=\frac{x_1+x_2}{2} \qquad (4)$$

$$y=2x+m \qquad (5)$$

（2）－（1）并整理得 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{4(x_1+x_2)}{9(y_1+y_2)}$ （6）

将（3）、（4）代入（6）得 $9y=8x$

由（5）、（6）得点M坐标为$\left(-\frac{9m}{10},-\frac{4m}{5}\right)$，因为M在椭圆内，所以

$$\frac{1}{9}\left(-\frac{9m}{10}\right)^2+\frac{1}{4}\left(-\frac{4m}{5}\right)^2<1$$

即$-2<m<2$．

C5－037 已知实数 a 满足：有且仅有一个正方形，其四个顶点均在曲线 $y=x^3+ax$ 上，试求该正方形的边长．

【题说】 1993 年德国数学奥林匹克（第二轮）题 2．

【解】 设正方形的四个顶点为 A、B、C、D，那么 ABCD 的中心为原点 O．否则，由于 $y=x^3+ax$ 为奇函数，因此 A、B、C、D 关于 O 点的对称点 A′、B′、C′、D′也在曲线上，且 A′B′C′D′也是正方形，与题设矛盾．

设四点为 A（x_0，y_0），B（$-y_0$，x_0），C（$-x_0$，$-y_0$），D（y_0，$-x_0$），其中 $x_0>0$，$y_0>0$，则

$$y_0=x_0^3+ax_0 \qquad (1)$$

$$-x_0=y_0^3+ay_0 \qquad (2)$$

（1）$\times x_0+$（2）$\times y_0$，得

$$x_0^4+y_0^4+a(x_0^2+y_0^2)=0 \qquad (3)$$

（1）$\times y_0-$（2）$\times x_0$，得

$$x_0^2+y_0^2=x_0y_0(x_0^2-y_0^2) \qquad (4)$$

令$x_0=r\cos\theta$，$y_0=r\sin\theta$，$r>0$，$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$．

由（3）、（4）得

$$a=-r^2(1-2\sin^2\theta\cos^2\theta)$$

消去 r^2，得关于 $\sin2\theta$ 的方程

$$(1+a^2)(\sin^22\theta)^2-(4+a^2)\sin^22\theta+4=0$$

因 $\sin^22\theta$ 在（0，1）内只有一个根，所以

$$\triangle=(a^2+4)^2-16(1+a^2)=a^4-8a^2=0$$

所以 $a=-2\sqrt{2}$（由（3）知$a<0$），$\sin2\theta=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$\sin4\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$r=\sqrt{18}$．故正方形的边长为$\sqrt{2}r=\sqrt[4]{72}$．

C5－038 在圆 C：$(x-1)^2+y^2=2$ 上有两个动点 A 和 B，且满足条件∠AOB＝90°（O 为坐标原点），求以 OA、OB 为邻边的矩形 OAPB 的顶点 P 的轨迹方程．

【题说】 1994 年全国高中数学联赛河北省预赛一试题 3．

【解】 设各点坐标为 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），P（x，y）．依题意，

有 $$(x_1-1)^2+y_1^2=2 \qquad (1)$$
$$(x_2-1)^2+y_2^2=2 \qquad (2)$$
由（1）＋（2）得
$$x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2-2(x_1+x_2)=2 \qquad (3)$$
因为 OAPB 是矩形，有
$$x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2=x^2+y^2 \qquad (4)$$
$$x_1+x_2=x \qquad (5)$$
将（4）和（5）代入（3）得
$$(x-1)^2+y^2=(\sqrt{3})^2$$
故P点的轨迹是以（1，0）为圆心，$\sqrt{3}$为半径的圆．

［别解］设圆心为 D，矩形 OAPB 的中心为 Q，则由平行四边形性质

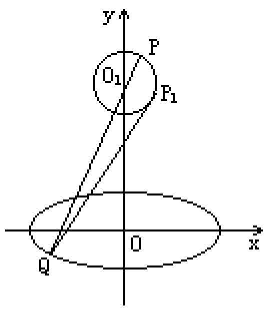
$2(DP^2+DO^2)=OP^2+4DQ^2=AB^2+4DQ^2=2(DA^2+DB^2)$

从而
$$DP^2=2DA^2-DO^2=2\times2-1^2=3$$
因此P的轨迹方程是以D为圆心，$\sqrt{3}$为半径的圆
$$(x-1)^2+y^2=3$$

C5－039 已知 P 点在圆 $x^2+(y-4)^2=1$ 上移动，Q 点在椭圆 $\frac{x^2}{9}+y^2=1$上移动，求$|PQ|$的最大值．

【题说】 1994 年四川省高中数学联赛题二（5）．

【解】 如图，先让 Q 点在椭圆上固定，显然当 PQ 通过圆心 O_1 时，$|PQ|$最大，因而欲求$|PQ|$的最大值，即求$|O1Q|$的最大值．



设 Q 的坐标为（x，y），则
$$|O_1Q|^2=x^2+(y-4)^2 \qquad (1)$$
因Q在椭圆上，故$\frac{x^2}{9}+y^2=1$，即
$$x^2=9(1-y^2) \qquad (2)$$
（2）代入（1）得
$$|O_1Q|^2=-8y^2-8y+25$$
$$=-8\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+27$$
所以 $|O_1Q|_{max}=3\sqrt{3}$，$|PQ|_{max}=3\sqrt{3}+1$

C5－040 在平面上有 5 个点，其中任意 3 点不共线．将 5 点中的每两点连接起来，共得 10 条线段，已知其中 9 条线段长的平方是有理数，

求证：余下的 1 条线段长的平方也是有理数．

【题说】 1994 年日本数学奥林匹克题 2．

【解】 设五个点为 O、A、B、C、D，除 CD 外，其余 9 条线段长的平方均为有理数．

以 O 为原点，OA 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系，设备点坐标为 O（0，0），A（x_2，0），B（x_3，y_3），C（x_4，y_4），D（x_5，y_5），其 $x_2\neq 0$，$y_3y_4y_5\neq 0$，则

$OA^2=x_2^2$，$OB^2=x_3^2+y_3^2$

$OC^2=x_4^2+y_4^2$，$OD^2=x_5^2+y_5^2$

$AB^2=(x_3-x_2)^2+y_3^2$

$AC^2=(x_4-x_2)^2+y_4^2$

$AD^2=(x_5-x_2)^2+y_5^2$

$BC^2=(x_4-x_3)^2+(y_4-y_3)^2$

$BD^2=(x_5-x_3)^2+(y_5-y_3)^2$

均为有理数．

由 $AB^2-OA^2-OB^2=-2x_2x_3$ 知 x_2x_3 是有理数．同理可知 x_2x_4，x_2x_5 也是有理数．从而 $x_4x_5=(x_2x_4)(x_2x_5)/x_2^2$，$x_3x_4$，$x_3x_5$ 均为有理数．

又由 $BC^2-OB^2-OC^2=-2(x_3x_4+y_3y_4)$ 及 $BD^2-OB^2-OD^2=-2(x_3x_5+y_3y_5)$ 是有理数知 y_3y_4、y_3y_5 是有理数．

若 $x_4x_5\neq 0$，则 $x_3^2=(x_3x_4)(x_3x_5)/(x_4x_5)$ 为有理数，从而 $y_3^2=OB^2-x_3^2$ 是有理数；若 $x_4x_5=0$，例如 $x_4=0$（此时 $x_5\neq 0$，否则 O、C、D 三点共线），则 $y_4^2=OC^2$ 是有理数，从而 $y_3^2=(y_3y_4)^2/y_4^2$ 是有理数；如果 $x_5=0$，同理可证 y_3^2 是有理数．

所以 $y_4y_5=(y_3y_4)(y_3y_5)/y_3^2$ 是有理数．故 $CD^2=(x_5-x_4)^2+(y_5-y_4)^2=OC^2+OD^2-2(x_4x_5+y_4y_5)$ 是有理数．

C5－041 若 x、y 为整数，则称坐标平面上的点（x，y）为格点．求直线 $y=\frac{3}{7}x+\frac{3}{10}$ 与格点距离的最小值．

【题说】 1994 年日本数学奥林匹克预选赛题 1．

【解】 直线方程可变形为

$$3x-7y+\frac{21}{10}=0$$

它与格点（x，y）的距离为

$$\left|3x-7y+\frac{21}{10}\right|\Big/\sqrt{3^2+7^2}\geq\frac{\frac{1}{10}}{\sqrt{3^2+7^2}}$$

当 $3x-7y=-2$，例如 $x=4$，$y=2$ 时，距离最小，最小值为 $\frac{\sqrt{58}}{580}$．

C5－042 求使方程组

$$\begin{cases} ax+by=1 \\ x^2+y^2=50 \end{cases}$$

有解且所有的解都是整数解的实数对（a，b）的个数．

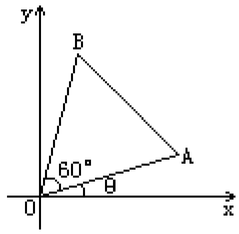
【题说】 第十二届（1994 年）美国数学邀请赛题 7．

【解】 在圆 $x^2+y^2=50$ 上有 12 个整点：（1，7），（1，−7），（−1，7），（−1，−7），（5，5），（5，−5），（−5，5），（−5，−5），（7，1），（7，−1），（−7，1），（−7，−1）．每一对这样的点决定一条直线，共有 $C_{12}^2=66$ 条．另外，过这 12 个点中的每一个点都可以作一条切线，所以共有 66＋12＝78 条直线与圆仅相交于整点．这样的直线可以写成 ax＋by＝1 的形式，当且仅当直线不过原点．这 78 条直线中有 6 条通过原点（相应坐标互为相反数的两点决定的直线）．这就是说有 78－6＝72 个有序实数对（a，b），使得给定的方程组有解且只有整数解．

C5－043 点（0，0），（a，11）和（b，37）是一个等边三角形的顶点．求 a·b 的值．

【题说】 第十二届（1994 年）美国数学邀请赛题 8．

【解】 如图，设这等边三角形的顶点为 O、A、B，OA＝r，OA 与 x 轴的夹角为θ．不妨设 a≥0（否则将△OAB 关于 y 轴作轴对称，ab 的值不变），即θ不超过 90°．由已知



$$r\sin\theta=11 \quad (1)$$

$$r\sin(\theta+60°)=37 \quad (2)$$

（2）即 $r\left(\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)=37$，结合（1）得

$$\frac{\sqrt{3}}{2}r\cos\theta=37-\frac{11}{2}=\frac{63}{2} \quad (3)$$

所以由（1），（3）

$$\begin{aligned} ab&=r\cos\theta\cdot r\cos(\theta+60°)\\ &=r\cos\theta\cdot r\left(\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)\\ &=\frac{63}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{63}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 11\right]\\ &=315 \end{aligned}$$

C5－044 给定曲线族

$$2(2\sin\theta-\cos\theta+3)x^2-(8\sin\theta+\cos\theta+1)y=0 \quad (1)$$

求该曲线族在直线

$$y=2x \qquad (2)$$

上所截得弦长的最大值．

【题说】 1995 年全国联赛二试题 1．

【解】 显然曲线族（1）与直线（2）的一个交点是原点．另一交点横坐标是

$$x=\frac{8\sin\theta+\cos\theta+1}{2\sin\theta-\cos\theta+3}$$

从而

$$(2x-8)\sin\theta-(x+1)\cos\theta=1-3x$$

由此得

$$|1-3x|\leq\sqrt{(2x-8)^2+(x+1)^2}$$

即
$$x^2+16x-16\leq 0$$

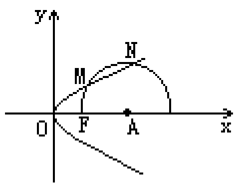
解得
$$-8\leq x\leq 2$$

当$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-[(-8)+1]}{2(-8)-8}=-\frac{7}{24}$，即$\theta=\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{7}{24}$时，$|x|$取最大值 8．此时$|y|=16$．故所求弦的长度最大值是

$$8^2+16^2=8\sqrt{5}$$

[评注] 也可利用“万能替换公式”：$\sin\theta=\frac{2u}{1+u^2}$，$\cos\theta=\frac{1-u^2}{1+u^2}$，$u=\tan\frac{\theta}{2}$，来求$\max|x|$．

C5－045 已知抛物线 $y^2=4ax$（$0<a<1$）的焦点为 F，以 A（a+4，0）为圆心，|AF|为半径在 x 轴上方作圆交抛物线于不同的两点 M 和 N，设 P 为 MN 的中点．



（1）求|MF|＋|NF|的值；

（2）是否存在这样的 a 值，使|MF|、|PF|、|NF|成等差数列？如果存在，求出 a 的值；若不存在，说明理由．

【题说】 1996 年全国高中数学联赛昆明选拔赛题 24．

【解】（1）由已知得焦点为 F（a，0），半圆方程为$[x-(a+4)]^2+y^2=16$（$y\geq 0$）．将 $y^2=4ax$ 代入半圆方程得

$$x^2-2(4-a)x+a^2+8a=0$$

设 M（x_1，y_1）、N（x_2，y_2）．则由抛物线定义及韦达定理知

$$|MF|+|NF|=x_1+x_2+2a$$
$$=2(4-a)+2a=8$$

（2）若|MF|，|PF|，|NF|成等差数列，则有

$$2|PF|=|MF|+|NF|$$

另一方面，设 M、P、N 在抛物线的准线上的射影为 M′、P′、N′．则在直角梯形 M′MNN′中，P′P 是中位线，又有

$$2|P'P| = |M'M| + |N'N| = |FM| + |FN|$$

因而$|PF| = |P'P|$．这说明P点应在抛物线上．

但由已知P是线段MN的中点，即P并不在抛物线上，故不存在使$|MF|$、$|PF|$、$|NF|$成等差数列的a值．

C5－046 在xyz －空间中，有一个平面多边形，它在xy －平面的正射影的面积为13，在yz －平面的正射影的面积为6，在zx －平面的正射影的面积为18时，求这个平面多边形的面积．

【题说】 1997年日本数学奥林匹克预选赛题3．

【解】 设这多边形的面积为S，它与坐标平面的夹角分别为α、β、γ，则

$$S\cos\alpha = 13,\quad S\cos\beta = 6,\quad S\cos\gamma = 18$$

平方再相加得

$$S^2 = S^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = 13^2 + 6^2 + 18^2$$

所以

$$S = \sqrt{13^2 + 6^2 + 18^2} = 23$$

D 三角

D1 求值与作图

D1－001 已知 $\tan\alpha$ 及 $\tan\beta$ 为 $x^2+px+q=0$ 的二根．求 $\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)$ 之值．

【题说】 1957 年北京市赛高二题 2．

【解】 $\tan\alpha+\tan\beta=-p$，$\tan\alpha\cdot\tan\beta=q$

当 $q\neq1$ 时，
$$\tan(\alpha+\beta)=-\frac{p}{1-q}$$

故所求之值为

$$\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta)$$
$$=\frac{1}{1+\tan^2(\alpha+\beta)}[\tan^2(\alpha+\beta)+p\tan(\alpha+\beta)+q]$$
$$=q$$

当 $q=1$ 时，$\tan\alpha\cdot\tan\beta=1$ 即 $\sin\alpha\sin\beta=\cos\alpha\cos\beta$，所以 $\cos(\alpha+\beta)=0$，从而 $\sin^2(\alpha+\beta)=1$，原式＝1．

D1－002 已知 $\sin\alpha+\sin\beta=p$，$\cos\alpha+\cos\beta=q$，求 $\sin(\alpha+\beta)$ 和 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值．

【题说】 1963 年北京市赛高二一试题 2．

【解】 由已知得

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=p$$
$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=q$$

当 $q\neq0$ 时，两式相除得

$$\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{p}{q}$$

从而由万能公式得

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{2pq}{p^2+q^2}，\cos(\alpha+\beta)=\frac{q^2-p^2}{q^2+p^2}$$

在 $q=0$，$p\neq0$ 时，上式仍然成立．

在 $p=q=0$ 时，$\alpha-\beta=(2n+1)\pi$，$n\in Z$，则

$$\sin(\alpha+\beta)=-\sin2\alpha，\cos(\alpha+\beta)=-\cos2\alpha$$

D1－003 不用查表，求 $\cos^2 73°+\cos^2 47°+\cos73°\cos47°$ 的值．

【题说】 1963 年成都市赛高三二试题 2．

【解】 原式＝$(\cos73°+\cos47°)^2-\cos73°\cos47°$

$$=(2\cos60°\cos10°)^2-\frac{1}{2}[\cos120°+\cos26°]$$
$$=\cos^2 13°-\frac{1}{2}[-\frac{1}{2}+(2\cos^2 13°-1)]=\frac{3}{4}$$

D1－004 用 $\cos5°$ 表示 $\cos10°+\cos20°+\cos30°+\cdots+\cos80°$．

【题说】 1964 年江苏省赛高题二、三题 3．

【解】

原式＝（cos10°＋cos20°）＋（cos70°＋cos80°）＋（cos30°＋cos40°）＋（cos50°＋cos60°）

$$=2\cos5°(\cos15°+\cos75°)+2\cos5°(\cos35°+\cos55°)$$

$$=2\cos5°(2\cos45°\cos30°+2\cos45°\cos10°)$$

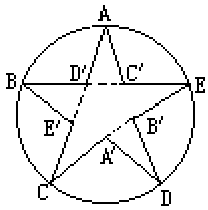
$$=2\sqrt{2}\cos5°\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+(2\cos^2 5°-1)\right]$$

$$=4\sqrt{2}\cos^3 5°+\sqrt{2}(\sqrt{3}-2)\cos5°$$

D1－005 已知一面国旗上的大五角星的一边长为 1 尺，求这五角星的面积（已知$\sin18°=(\sqrt{5}-1)/4$）．

【题说】 1978 年陕西省赛二试题 6．

【解】 如图，AC′＝1．五角星的面积＝$3S_{\triangle AD'C'}+S_{\triangle D'CE}$．



$$S_{\triangle AD'C'}=\frac{1}{2}\sin36°$$

$$S_{\triangle D'CE}=\frac{1}{2}D'C\cdot D'E\sin108°$$

$$=\frac{1}{2}(1+2\sin18°)^2\cos18°$$

所以 五角星的面积$=\frac{3}{2}\sin36°+(1+2\sin18°)^2\cos18°$

$$=\cos18°(1+4\sin18°)=\frac{1}{4}\sqrt{50-10\sqrt{5}}$$

D1－006 已知$\tan x=2\sqrt{2}$（180°<x<270°），求cos2x，$\cos\frac{\pi}{2}$的值.

【题说】 1978 年全国联赛一试题 2．

【解】 因为 180°<x<270°，所以

$$\sec x=-\sqrt{1+\tan^2 x}=-3$$

$$\cos x=-\frac{1}{3}$$

故 $$\cos^2 x=2\cos^2 x-1=-\frac{7}{9}$$

又180°<x<270°，所以$90°<\frac{\pi}{2}<135°$，故

$$\cos\frac{x}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

D1－007 求函数 $y=a\sin^2x+b\sin x\cos x+c\cos^2x$ 的极值．

【题说】 1979 年山东省赛二试题 1．

【解】 $y=\frac{a}{2}(1-\cos 2x)+\frac{b}{2}\sin 2x+\frac{c}{2}(1+\cos 2x)$

$$=\frac{b}{2}\sin 2x+\frac{c-2}{a}\cos 2x+\frac{a+c}{2}$$

当 $b^2+(c-a)^2\neq 0$ 时，

$$\frac{b}{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}=\cos\theta$$

则

$$y=\frac{a+c}{2}+\frac{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}{2}\sin(2x+\theta)$$

所以

$$y_{极大}=\frac{1}{2}[(a+c)+\sqrt{b^2+(c-a)^2}]$$

$$y_{极小}=\frac{1}{2}[(a+c)-\sqrt{b^2+(c-a)^2}]$$

当 $b=0$，$c=a$ 时，y 为常数 a，上面的结论仍然成立．

D1－008 求函数

$$y=\frac{2\sin\alpha-\cos 2\alpha+3}{4\sin^2\alpha+4}$$

的最大值和最小值．

【题说】 1979 年贵州省赛二试题 3．

【解】 函数即

$$y=\frac{\sin^2\alpha+\sin\alpha+1}{2(\sin^2\alpha+1)}$$

化为关于 $\sin\alpha$ 的二次方程

$$(2y-1)\sin^2\alpha-\sin\alpha+(2y-1)=0$$

由判别式 $(-1)^2-4(2y-1)^2\geq 0$，解得

$$\frac{1}{4}\leq y\leq\frac{3}{4}$$

当 $\sin\alpha=-1$ 时，$y=\frac{1}{4}$；当 $\sin\alpha=1$ 时，$y=\frac{3}{4}$．

故所求函数的最大值是 $\frac{3}{4}$，最小值是 $\frac{1}{4}$．

D1－009 设 $f(x)=\sin\left(\frac{11}{6}\pi x+\frac{\pi}{3}\right)$．

1．求 $f(x)$ 的最小正周期；

2．对于任意正数 a，是否总能找到不小于 a，且不大于 $(a+1)$ 的两个数 a 和 b，使 $f(a)=1$ 而 $f(b)=-1$？请回答并论证．3．若限定 a 为任意自然数，请重新回答和论证上述问题．【题说】 1980 年芜湖市赛题 6．

【解】 1．最小的正周期 $T=12/11$．

2．未必．如令 $\alpha=15/22$，当 $x\in\left[\frac{15}{22},\frac{37}{22}\right]$ 时，

$$\frac{11\pi x}{6}+\frac{\pi}{3}\in\left[\left(1+\frac{7}{12}\right)\pi,\left(3+\frac{5}{12}\right)\pi\right]$$

但 sinx 在此区间上大于－1．

3．对任意自然数 n，在[n，n＋1]上至少有一个数 a 使 f（a）＝1；也至少有一个数 b，使 f（b）＝－1．事实上，在[n，n＋1]上插入 10 个等分点，连同两个端点共 12 个数：

$$n=\frac{11n}{11},\ \frac{11n+1}{11},\ \cdots\frac{11n+10}{11},\ \frac{11n+11}{11}=n+1$$

它们的分子是 12 个连续自然数，被 12 除后的余数中必有一个是 1，一个是 7．把这两个数记为

$$a=\frac{12k+1}{11},\ b=\frac{12k+7}{11}$$

其中 k 是正整数，从而

$$f(a)=\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=1$$

$$f(b)=\sin\left(2k\pi+\frac{3}{2}\pi\right)=-1$$

D1－010 三个数a、b、c属于开区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且满足下列等式

cosa＝a

sin cosb＝b

cos sinc＝c

按从小到大的顺序排列这三个数．

【题说】 第十六届（1982 年）全苏数学奥林匹克十年级题 1．

【解】 首先

$$\sin\cos a=\sin a<a,\quad a\in 0,\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \qquad (1)$$

（i）若 a＜b．则 cosa＞cosb，从而 sin cosa＞sin cosb＝b，所以

a＞sin cosa＞sin cosb

即 a＞b．矛盾．

（ii）若 a＞b．则 cosa＜cosb． 且 sin cosa＜sin cosb．所以

a＞sin cosb＞sin cosa

（iii）若 a＝b，则 cosa＝cosb．从而 sin cosa＝sin cosb＝b．

但由（1）a＞sin cosa＝b．得 a＞b 矛盾，所以只可能 a＞b．

同理利用正弦、余弦在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内的单调性，可得，c＞a，即

b＜a＜c

D1－011 求 10cot（arc cot3＋arc cot7＋arc cot13＋ arc cot21）的值．

【题说】 第二届（1984 年）美国数学邀请赛题 13．

【解】 设 A＝arccot3， B＝arccot7

C＝arccot13， D＝arccot21

$$E=A+B,\qquad F=C+D$$

则

$$\cot E=\cot(A+B)=\frac{3\times 7-1}{3+7}=2$$

$$\cot F=\cot(c+D)=\frac{13\times 21-1}{13+21}=8$$

$$\cot(E+F)=\frac{2\times 8-1}{2+8}=\frac{3}{2}$$

因此 $$10\cot(E+F)=15$$

D1－012 设 a、b、c 是一个三角形的三条边，α、β、γ分别是这三条边的对角．如果$a^2+b^2=1989c^2$，求$\frac{\cot\gamma}{\cot\alpha+\cot\beta}$．

【题说】 第七届（1989 年）美国数学邀请赛题 10．

【解】 $$\frac{\cos\gamma}{\cot\alpha+\cot\beta}=\frac{\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\cos\gamma\sin\alpha\sin\beta}{\sin^2\gamma}$$

$$=\frac{\cos\gamma\cdot ab}{c^2}=\frac{ab}{c^2}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$=\frac{a^2+b^2-c^2}{2c^2}=\frac{1988c^2}{2c^2}=994$$

D1－013 求常数 c，使得

$$f(x)=\arctan\frac{2-2x}{1+4x}+c$$

在区间$\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$内是奇函数．

【题说】 第十六届（1990 年）全俄数学奥林匹克十一年级题 1．

【解】 设 f（x）是奇函数，则

$$f(0)=\arctan\alpha+c=0,\ c=-\arctan\alpha$$

反之，因为

$$\tan\left[\arctan\frac{2-2x}{1+4x}-\arctan\alpha\right]=\left(\frac{2-2x}{1+4x}-2\right)\bigg/\left(1+\frac{4-4x}{1+4x}\right)-2x$$

所以 $$\arctan\frac{2-2x}{1+4x}-\arctan 2=-\arctan 2x$$

是奇函数．

D1－014 设 secx＋tanx＝22/7 和 cscx＋cotx＝m/n，这里 m/n 是既约分数，求 m＋n．

【题说】 第九届（1991 年）美国数学邀请赛题 9．【解】 由

$$\sec^2x-\tan^2x=1\qquad(1)$$

及已知 $$\sec x+\tan x=22/7\qquad(2)$$

得 $$\sec x-\tan x=7/22\qquad(3)$$

（2）＋（3）得 $$2\sec x=535/154$$

（2）－（3）得 $$2\tan x=435/154$$

于是得 $$\csc x=533/435,\ \cot x=308/435$$

因此　　　　　　　　$\csc x+\cot x=29/15$

从而　　　　　　　　$m+n=29+15=44$

D1－015　(1) 设 n 是一个大于 3 的素数．求

$$\left(1+2\cos\frac{2\pi}{n}\right)\left(1+2\cos\frac{4\pi}{n}\right)\left(1+2\cos\frac{6\pi}{n}\right)\cdots\cdots\left(1+2\cos\frac{2m\pi}{n}\right)$$

的值；

(2) 设 n 是大于 3 的自然数．求

$$\left(1+2\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(1+2\cos\frac{2\pi}{n}\right)\left(1+2\cos\frac{3\pi}{n}\right)\cdots\cdots\left(1+2\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$

的值．

【题说】 1994 年上海市高三数学竞赛二试题 3．

【解】 (1) 记 $\omega=e^{\frac{2\pi i}{n}}$，则 $\omega^{n}=1$，$\omega^{-\frac{n}{2}}=e^{-\pi i}=-1$，$2\cos\frac{2k\pi}{n}=\omega^{k}+\omega^{-k}$．

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+2\cos\frac{2k\pi}{n}\right)=\prod_{k=1}^{n}(1+\omega^{k}+\omega^{-k})$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\omega^{-k}(\omega^{k}+\omega^{2k}+1)$$

$$=\omega^{-\frac{n(n+1)}{2}}\cdot 3\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1-\omega^{3k}}{1-\omega^{k}}$$

$$=(-1)^{n+1}\cdot 3\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1-\omega^{3k}}{1-\omega^{k}}$$

因为 n 为大于 3 的素数，所以，$(-1)^{n+1}=1$，且 3，3×2，…，3(n－1)，modn，取遍所有 n 的剩余类，从而

$$\prod_{k=1}^{n-1}(1-\omega^{3k})=\prod_{k=1}^{n-1}(1-\omega^{k})$$

于是　　　　　　$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+2\cos\frac{2k\pi}{n}\right)=3$$

(2) $Z^{2n}-1=0$ 的 2n 个根是 ±1 和 $Z_k=e^{\pm\frac{k\pi i}{n}}$ (k＝1，2，…，n－1)，所以

$$Z^{2n}-1=(Z^{2}-1)\prod_{k=1}^{n-1}(Z-e^{\frac{k\pi i}{n}})(Z-e^{-\frac{k\pi i}{n}})$$

$$=(Z^{2}-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(Z^{2}+1-2Z\cos\frac{k\pi}{n}\right)$$

取 $Z=e^{\frac{2\pi}{3}i}$，则 $Z^{2}+1=-Z$，于是

$$Z^{2n-1}=(Z^{2}-1)(-Z)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+2\cos\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+2\cos\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{Z^{2n}-1}{(Z^{2}-1)(-Z)^{n-1}}$$

$$=\begin{cases}0，若n=3k\\ \dfrac{Z^2-1}{(Z^2-1)\ (-Z)^{3k}}=(-1)^{3k}=(-1)^{n-1}，若n=3k+1\\ \dfrac{Z-1}{(Z^2-1)\ (-Z)^{3k+1}}=\dfrac{(-1)^{3k+1}}{(Z+1)\ Z}=\dfrac{(-1)^{3k+1}}{-1}=(-)^{n}，\\ 若n=3k+2\ (k\in N)\end{cases}$$

D1－016 一个损坏的计算器只有 sin，cos，tan，arcsin，arccos，arctan 这几个键可以工作．初始显示为 0．证明对任一正有理数 q，都可以揿有限多次键得出 q（假定计算器做实数计算无限精确，所有的函数都采用弧度制）．

【题说】 第二十四届（1995 年）美国数学奥林匹克题 2．

【解】 对任意实数 x≠0，

$$\tan\arcsin\ (\cos\arctan x)\ =\tan\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)=\frac{1}{x}$$

因此可以用这计算器由x得出 $f(x)=\frac{1}{x}$．

又 $\cos\arctan x=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$，所以有 $F(x)=f(\cos\arctan x)=\sqrt{x^2+1}$．

对于正整数x，重复进行上述运算即可得到 $g(x)=\overbrace{F(F(\cdots F(x)\cdots))}^{2x+1个F}$

$=\sqrt{x^2+2x+1}=x+1$．

由于 cos0＝1，所以反复用 g 便可得出任一正整数．假设用 g、f 可以得出一切分母小于n的正有理数，考虑分母为n的正有理数 $\frac{m}{n}$．

先设m＜n．由归纳假设可得 $\frac{n}{m}$，再用f即得 $\frac{m}{n}$．

假设m＝kn＋r，k为正整数，0≤r＜n，则先得出 $\frac{r}{n}$，再用gk次便得 $\frac{r}{n}+k=\frac{m}{n}$．

于是一切正有理数 q 均可揿有限多次键得出．

D1－017 已知 sin（x＋20°）＝cos（x＋10°）＋cos（x－10°），求 tanx．

【题说】 1996 年全国高中数学联赛昆明选拔赛题 23．

【解】 题给条件可化为

sinxcos20°＋ cosxsin20°＝2cosxcos10°

sinxcos20°＝cosx·（2cos10°－sin20°）

故

$$\tan x=\frac{2\cos 10°-\sin 20°}{\cos 20°}$$

$$=\frac{\cos 10°+\sin 80°-\sin 20°}{\cos 20°}$$

$$=\frac{\cos 10° + 2\cos 50° \sin 30°}{\cos 20°}$$

$$=\frac{2\cos 30° \cos 20°}{\cos 20°}$$

$$=2\cos 30° = \sqrt{3}$$

D2 三角恒等式

D2－001 如果凸四边形ABCD中的角A、B、C、D没有一个是直角，试证明：

$$\frac{\tan A+\tan B+\tan C+\tan D}{\tan A\tan B\tan C\tan D}=\cot A+\cot B+\cot C+\cot D$$

【题说】 1951年～1952年波兰数学奥林匹克一试题1．

【证】 因为A＋B＋C＋D＝360°，当A＋B≠90°，A＋B≠270°时，得

$$\tan(A+B)+\tan(C+D)=0$$

即
$$\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}+\frac{\tan C+\tan D}{1-\tan C\tan D}=0$$

$$(\tan A+\tan B)(1-\tan C\tan D)+(\tan C+\tan D)(1-\tan A\tan B)=0$$

$$\tan A+\tan B+\tan C+\tan D=\tan B\tan C\tan D+\tan A\tan C\tan D+\tan A\tan B\tan D+\tan A\tan B\tan C$$

两边除以tanAtanBtanCtanD就得到所要的结果．

当A＋B＝90°时，C＋D＝270°，显然有

$$0°<A<90°\text{ 及 }90°<C<180°$$

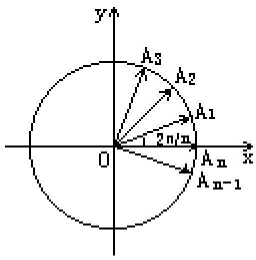
于是
$$90°<A+C<270°$$

$$\tan(A+C)\tan(B+D)=0$$

同样可得结论．

【注】 若四边形ABCD是凹的，结论成立．推导与上面相同，除非任意两个角的和均为90°或270°．由于凹四边形必有一个角大于180°，不妨设A＞180°，则在例外情况，B＋C＝C＋D＝D＋B＝90°，从而B＝C＝D＝45°，A＝225°．结论显然．

D2－002 证明：如果n是大于1的自然数，那么



【题说】 1957年～1958年波兰数学奥林匹克三试题2．这里给出向量证法．

【证】 在直角坐标系XOY中，考察n个单位矢量$\overrightarrow{OA_1}$，$\overrightarrow{OA_2}$，…，$\overrightarrow{OA_{n-1}}$，$\overrightarrow{OA_n}$，它们与OX轴的夹角分别为$\frac{2\pi}{n}$，$\frac{4\pi}{n}$，…，$\frac{(2n-2)\pi}{n}$，

设

$$\vec{V}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_{n-1}}+\overrightarrow{OA_n}$$

将n个矢量$\overrightarrow{OA_i}$绕点O旋转2π/n（因n＞1，所以2π/2＜2π），则和$\vec{V}$也旋转了2π/n．旋转后的矢量与原来的矢量组没有任何差别（因

为$\overrightarrow{OA_1}$变成$\overrightarrow{OA_2}$，$\overrightarrow{OA_2}$变成$\overrightarrow{OA_3}$，…，$\overrightarrow{OA_n}$变成$\overrightarrow{OA_1}$），因此矢量$\vec{V}$绕O点旋转：$\frac{2\pi}{n}$（<2π）不变的，从而$\vec{V}$是零矢量等于零，即

$$\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{2n\pi}{n}=0$$

D2－003 设A＋B＋C＝180°，求证：

$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C-2\cos A\cos B\cos C=2$

【题说】 1962年北京市赛高二一试题3.

【证】

$$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C$$

$$=\frac{1+\cos 2A}{2}+\frac{1+\cos 2B}{2}+\frac{1+\cos C}{2}$$

$$=1-2\cos A\cos B\cos C$$

所以

$$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C-2\cos A\cos B\cos C=2$$

D2－004 设A＋B＋C＝π，n为奇数．求证：

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\sin\frac{n\pi}{2}\cdot\cos\frac{nA}{2}\cdot\cos\frac{nB}{2}\cdot\cos\frac{nC}{2}$$

【题说】 1962年成都市赛高三一试题2.

【证】

$$\sin nA+\sin nB=2\sin\frac{n(A+B)}{2}\cos\frac{n(A-B)}{2}$$

$$=2\sin\frac{n(\pi-C)}{2}\cos\frac{n(A-B)}{2}$$

$$=2\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{nC}{2}\cos\frac{n(A-B)}{2}$$

$$\sin C=2\sin\frac{nC}{2}\cos\frac{nC}{2}$$

$$=2\sin\frac{n[\pi-(A+B)]}{2}\cos\frac{nC}{2}$$

$$=2\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n(A+B)}{2}\cos\frac{nC}{2}$$

所以

$$\sin nA+\sin nB+\sin nC$$

$$=2\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{nC}{2}\left[\cos\frac{n(A-B)}{2}+\cos\frac{n(A+B)}{2}\right]$$

$$=4\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{nA}{2}\cos\frac{nB}{2}\cos\frac{nC}{2}$$

D2－005 设sinx＋cosx＝1，求证：

$$\sin^n x+\cos^n x=1$$

【题说】 1963年成都市赛高二一试题3.

【证】将 sinx＋cosx＝1两边平方整理，得

$$2\sin x\cos x=0$$

若 sinx＝0则cosx＝1，$\sin^n x+\cos^n x=1$.

若 cosx＝0，则sinx＝1，$\sin^n x+\cos^n x=1$.

【别证】由 $\sin x+\cos x=1$得$\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}$．从而$x=2k\pi$或

$x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$（$k\in Z$）代入要证的式子，即得．

D2－006 设△ABC 的三内角 A、B、C 成等比数列，公比 q＝3．求证：

$$\cos B\cos C+\cos C\cos A+\cos A\cos B=-\frac{1}{4}$$

【题说】 1963 年武汉市赛高三二试题 2．

【证】 设三内角为 A，B＝3A，C＝9A，则 A＋B＋C＝13A＝π，
原式左端＝cos3Acos9A＋cos9AcosA＋cosAcos3A

$$=\frac{1}{2}(\cos 12A+\cos 6A+\cos 10A+\cos 8A+\cos 4A+\cos 2A)$$

$$=\frac{1}{4\sin A}[(\sin 3A-\sin A)+(\sin 5A-\sin 3A)+\cdots+(\sin 13A-\sin 11A)]$$

$$=\frac{1}{4\sin A}(\sin 13A-\sin A)$$

$$=-\frac{1}{4}$$

D2－007 证明：$\cos\dfrac{\pi}{7}-\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{3\pi}{7}=\dfrac{1}{2}$．

【题说】 第五届（1963 年）国际数学奥林匹克题 5．本题由原东德提供．

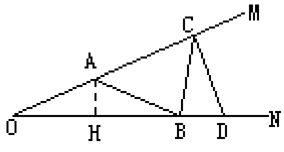
【证】 因为$2\sin\dfrac{\pi}{7}\left(\cos\dfrac{\pi}{7}-\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{3\pi}{7}\right)$

$$=2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}-2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}$$

$$=\sin\frac{2\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}=\sin\frac{\pi}{7}$$

所以 $$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$$

【别证】 作$\angle MON=\dfrac{\pi}{7}$，顺次地，在OM上取OA＝1，在ON上取 B，使 AB＝1（B≠0），在 OM 上取 C，使 BC＝1（C≠A），在 ON 上取 D，使 CD＝1（D≠B），则



$$\angle CAB=\angle ACB=\frac{2}{7}\pi$$

$$\angle CBD=\angle CDB=\angle ACD=\frac{3}{7}\pi$$

所以 OC＝OD

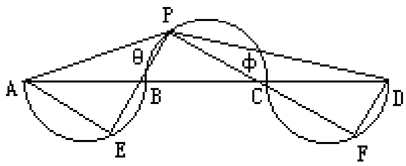
作AH⊥OB，则$OB=2OH=2\cos\frac{\pi}{7}$．

同理，$AC=2\cos\frac{2\pi}{7}$，$BD=2\cos\frac{3\pi}{7}$．

由于 $OC=1+2\cos\frac{2\pi}{7}$，$OD=2\cos\frac{\pi}{7}+2\cos\frac{3\pi}{7}$

所以 $1+2\cos\frac{2\pi}{7}=2\cos\frac{\pi}{7}+2\cos\frac{3\pi}{7}$

D2-008　在线段 AD 上取二点 B 和 C，使 AB=BC=CD．以 Bc 为直径作圆，在圆周上任取一点 P，使 P 不是 B 和 C，再假设∠APB=θ，$\angle DPC=\varphi$．



求证：$\operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{4}$．

【题说】1964 年江苏省赛高二题 4．

【证】如图，延长 PB、PC 分别与以 AB、CD 为直径的两圆交于 E、F，并连 AE，DF．由于 AB=BC=CD，∠ABE=∠CBP，∠BCP=DCF，故 Rt△AEB≌Rt△BPC≌Rt△CFD．所以 PB=BE=DF，AE=PC=CF，从而有

$$\tan\theta\tan\varphi=\frac{AE}{PE}\cdot\frac{DF}{PF}=\frac{AE}{2BE}\cdot\frac{DF}{2CF}=\frac{1}{4}$$

D2-009 求证：对每一自然数n（n≠0）和每一实数$x\neq\frac{N\pi}{2^k}$（$k=0$，1，2，…，n；N 是任意整数），有

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\cdots+\frac{1}{\sin 2^n x}=\cot x-\cot 2^n x$$

【题说】第八届（1966 年）国际数学奥林匹克题 4．本题由南斯拉夫提供．

【证】

$$\cot 2^k x-\frac{1}{\sin 2^{k+1}x}=\frac{1}{\sin 2^{k+1}x}(2\cos^2 2^k x-1)$$

$$=\frac{\cos 2^{k+1}x}{\sin 2^{k+1}x}=\cot 2^{k+1}x$$

取 k=0，1，2，…，n-1，相加即得．

D2-010　设 a_1，a_2，…a_n 为实常数，x 为实为数，且

$$f(x)=\cos(a_1+x)+\frac{1}{2}\cos(a_2+x)+\cos\frac{1}{2^2}(a_3+x)+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n+x)$$

证明：从 f（x_1）=f（x_2）=0 总可推得 $x_2-x_1=m\pi$，其中 m 是一个整数．

【题说】第十一届（1969 年）国际数学奥林匹克题 2．本题由匈牙利提供．

【证】因为$f(-a_1)=1+\frac{1}{2}\cos(a_2-a_1)+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\cos(a_n-a_1)$
$\geq 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}}>0$，所以$f(x)$不恒等于零．

因为
$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}(\cos a_k\cos x-\sin a_k\sin x)$$
$$=A\cos x-B\sin x=\gamma\cos(x+\varphi),\ \gamma\neq 0$$
所以，由$f(x_1)=f(x_2)=0$得$x_2+\varphi=x_1+\varphi+m\pi=k\pi$，从而
$$x_2-x_1=m\pi\ (m、k\in Z)$$

D2-011　设 A、B、C 为同时满足 sinA+sinB+sinC=0，cosA+cosB+cosC=0 的任意三个角，求证：$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C$ 为定值．

【题说】1978 年上海市赛一试题 5．

【证】

$e^{iA}+e^{iB}+e^{iC}$

=（cosA+cosB+cosC）+i（sinA+sinB+sinC）

=0

所以向量 e^{iA}、e^{iB}、e^{iC} 构成正三角形，不妨设
$$B=A+\frac{2\pi}{3}，C=B+\frac{2\pi}{3}$$
易知
$$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C$$
$$=\frac{3}{2}+(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)$$
$$=\frac{3}{2}+\left[2\cos(A+C)\cos(C-A)+\cos 2B\right]$$
$$=\frac{3}{2}$$

D2-012　证明：

1．$\cos^2\alpha+\cos^2(\alpha+120°)+\cos^2(\alpha-120°)=\frac{3}{2}$;

2．$\triangle ABC$中，如果$\sin C=\frac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}$，则此三角形必为直角三角形．

【题说】1978 年重庆市赛一试题 2．

【证】1．原式左边$=\cos^2\alpha+\frac{1}{2}[1+\cos(2\alpha+240°)]+\frac{1}{2}[1+\cos(2\alpha-240°)]$
$$=\cos^2\alpha+1+\cos^2\alpha\cos 240°$$
$$=\cos^2\alpha+1-\frac{1}{2}(2\cos^2\alpha-1)$$
$$=\frac{3}{2}$$

2．因为 A+B+C=180°，所以

$$\text{原式右端}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{180°-C}{2}}{\cos\frac{180°-C}{2}}=\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$$

又原式左端 $=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$，所以

$$2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$$

因为 $\sin\frac{C}{2}$、$\cos\frac{C}{2}$ 均不为0，所以 $2\sin^2\frac{C}{2}=1$。

$$\frac{C}{2}=45°\ \text{即}\ C=90°$$

故△ABC 为直角三角形．

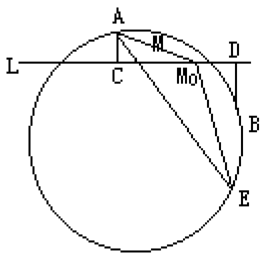
D2-013　定点 A 和 B 分别在直线 L 两侧，AC⊥L，BD⊥L，C、D 是垂足，M 是 CD 内的点，p 和 q 是已知的正数，试证：当 p·AM+q·BM 最小时，有 p·sin∠CAM=q·sin∠DBM．

【题说】1979 年福建省赛二试题 6．

【证】当 M 从 C 沿直线移向 D 点时，$\frac{\sin\angle CAM}{\sin\angle DBM}$ 由 O 连续地变至 $+\infty$．

因此，在线段 CD 内必有一点 M_0，满足 $\frac{\sin\angle CAM_0}{\sin\angle DBM_0}=\frac{q}{p}$，即

$$p\sin\angle CAM_0=q\sin\angle DBM_0 \qquad (1)$$



过 M_0 作 CD 的垂线交△AM_0B 的外接圆于点 E，则

$$AE=2r\sin\angle CAM_0 \qquad (2)$$

$$BE=2r\sin\angle DBM_0 \qquad (3)$$

其中 2r 为外接圆的直径．

对于 CD 上任一点，$M\neq M_0$，由一般的托勒密定理，

$$AM\times BE+BM\times AE\geq AB\times EM>AB\times EM_0$$
$$=AM_0\times BE+BM_0\times AE$$

由（l）、（2）、（3），上式即

$$p\cdot AM+q\cdot BM>p\cdot AM_0+q\cdot BM_0$$

因此，M_0是使 p·AM+q·BM 值最小的点．使 p·AM+q·BM 值最小的点，也必定是满足（1）的 M_0．

【注 1】可以证明 M_0 是到 A、B 距离之比为 q/p 的阿氏圆与一条二次曲线的交点．

【注 2】用微积分也可以证明．

D2-014　求证：

$$\sin 3\theta=4\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)$$

【题说】1979 年全国联赛一试题 1．

【证】
$$\begin{aligned}&4\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)\\&=2\sin\theta\left[\cos\frac{\pi}{3}-\cos(\pi+2\theta)\right]\\&=2\sin\theta\left[\frac{1}{2}+\cos 2\theta\right]\\&=\sin 3\theta\end{aligned}$$

D2-015　在△ABC 中，边 AB、AC 的垂直平分线分别交（直线）BC 于（如果存在交点的话）X、Y．证明：tanBtanC=3 是使 BC=XY 的充分条件．指出这一条件不是必要的，并找出一个充分必要条件．

【题说】1980 年四国国际数学竞赛题 1．本题由英国提供．

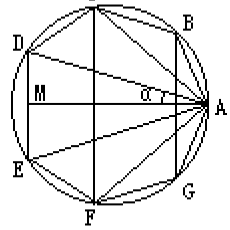
【证】$XY=\dfrac{\frac{c}{2}}{\cos B}+\dfrac{\frac{b}{2}}{\cos C}\mp a$,所以

$$\begin{aligned}XY=a&\Leftrightarrow\frac{\sin C}{\cos B}+\frac{\sin B}{\cos C}=4\sin A\text{或}0\\&\Leftrightarrow\sin 2B+\sin 2C\\&\Leftrightarrow 8\sin A\cos B\cos C\text{或}0\\&\Leftrightarrow\cos(B-C)=4\cos B\cos C\text{或}|B-C|=\frac{\pi}{2}\\&\Leftrightarrow\tan B\tan C=3\text{或}-1\end{aligned}$$

D2-016　试证以下等式成立

$$\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{3\pi}{14}\cdot\sin\frac{5\pi}{14}=\frac{1}{8}$$

【题说】第十四届（1988 年）全俄数学奥林匹克十年级题 4．



【证】
$$\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14}$$
$$=\frac{1}{2\cos\frac{\pi}{14}}\cdot\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14}$$
$$=\frac{1}{4\cos\frac{\pi}{14}}\cdot\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{14}$$
$$=\frac{1}{4\cos\frac{\pi}{14}}\cdot\sin\frac{4\pi}{7}$$
$$=\frac{1}{8}$$

【别证】如图，作以 MA 为直径的圆的内接正七边形 ABCDEFG．设 $\angle MAD=\alpha=\frac{\pi}{14}$．

BG＝CA＝a，CF=DA=b，c 是正七边形边长，则

在△ABG中，$a=2c\cdot\sin5\alpha=2c\cdot\sin\frac{5\pi}{14}$　　(1)

在△ACF中，$b=2a\cdot\sin3\alpha=2\cdot a\sin\frac{3\pi}{14}$　　(2)

在△ADE中，$c=2b\cdot\sin\alpha=2b\cdot\sin\frac{\pi}{14}$　　(3)

（l）×（2）×（3）再约去 abc，即得所要证的等式．

【评注】类似地
$$\sin\frac{\pi}{4n+2}\cdot\sin\frac{3\pi}{4n+2}\cdot\cdots\cdot\sin\frac{(2n-1)\pi}{4n+2}=\frac{1}{2^n}$$

D2-017　证明：
$$\frac{1}{\cos0^\circ\cos1^\circ}+\frac{1}{\cos1^\circ\cos2^\circ}+\cdots+\frac{1}{\cos88^\circ\cos89^\circ}=\frac{\cos1^\circ}{\sin^2 1^\circ}$$

【题说】第二十一届（1992 年）美国数学奥林匹克题 2．

【证】
$$\sin1^\circ\cdot\sum_{n=0}^{88}\frac{1}{\cos n^\circ\cos(n+1)^\circ}$$
$$=\sum_{n=0}^{88}(\tan(n+1)^\circ-\tan n^\circ)$$
$$=\tan89^\circ-\tan0^\circ=\tan89^\circ$$

所以
$$\sum_{n=0}^{88}\frac{1}{\cos n^\circ\cos(n+1)^\circ}=\frac{\tan89^\circ}{\sin1^\circ}$$

D2-018 已知：$\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\alpha}=1-\frac{\text{tg}(\alpha-\beta)}{\text{tg}\alpha}$．求证：
$$\tan^2\gamma=\tan\alpha\cdot\tan\beta$$

【题说】1993 年四川省高中数学联赛题 3．

【证】因 $\sin^2\gamma=\sin^2\alpha\left[1-\frac{\tan(\alpha-\beta)}{\tan\alpha}\right]$

$$=\sin^2\alpha\cdot\frac{\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)}$$

$$=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)}$$

所以 $\tan^2\gamma=\frac{\sin^2\gamma}{\cos^2\gamma}=\frac{\sin^2\gamma}{1-\sin^2\gamma}$

$$=\frac{\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)}}{1-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)}}$$

$$=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}$$

$$=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$=\tan\alpha\tan\beta$$

D2-019 证明数nsinn°（n=2，4，6，…，180）的平均值是cotl°．

【题说】第二十五届（1996年）美国数学奥林匹克题1．

【解】 $\sin1°\times2\sum_{k=1}^{90}k\sin2k°=\sum_{k=1}^{90}k(\cos(2k-1)°-\cos(2k+1)°)$

$$=\sum_{k=1}^{90}\cos(2k-1)°-90\cos181°$$

$$=\frac{-1}{2\sin1°}\sum_{k=1}^{90}\left[\sin(2k-2)°-\sin(2k)°\right]+90\cos1°$$

$$=\frac{-1}{2\sin1°}(\sin0°-\sin180°)+90\cos1°$$

$$=90\cos1°$$

所以 $\frac{1}{90}\sum_{k=1}^{90}2k\sin2k°=\cot1°$

D3　三角不等式

D3-001 证明：$|\sin nx| \leq n|\sin x|$，n为自然数．

【题说】1963 年武汉市赛高三一试题 2．

【证】用数学归纳法．

当 n=1 时，原式成立．

设 $$|\sin kx| \leq k|\sin x|$$

则
$$\begin{aligned}
&|\sin(k+1)x| \\
&= |\sin kx\cos x + \cos kx\sin x| \\
&\leq |\sin kx\cos x| + |\cos kx\sin x| \\
&\leq |\sin kx| + |\sin x| \leq k|\sin x| + |\sin x| \\
&= (k+1)|\sin x|
\end{aligned}$$

故当 n 为一切自然数时，都有

$$|\sin nx| \leq n|\sin x|$$

D3-002　证明：如果 a 是锐角，那么

$$\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right) > 5$$

【题说】1963 年匈牙利数学奥林匹克题 2．本题结论可加强为：如果α是锐角，那么$\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right) \geq 3+2\sqrt{2}$．而且等式仅当 $\alpha=45°$ 时成立．

【证】
$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha} &= \left(\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) \\
&\geq (1+1)^2 = 4
\end{aligned}$$

所以
$$\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{4}{\sin 2\alpha} \geq 8$$

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right) &= 1+\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{2}{\sin 2\alpha} \\
&\geq 1+\sqrt{8}+2 = 3+2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

易知等式仅在 a=45°时成立．

D3-003　求出区间 0≤x≤2π中所有能使不等式

$$2\cos x \leq \left|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}\right| \leq \sqrt{2}$$

成立的实值 x．

【题说】第七届（1965 年）国际数学奥林匹克题 1．本题由南斯拉夫提供．

【解】由于

$$\left|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}\right|=\left|\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}-\sqrt{(\sin x-\cos x)^2}\right|$$

$$=|\sin x+\cos x|-|\sin x-\cos x|$$

$$=\begin{cases}|2\cos x| & \text{当}\frac{\pi}{4}\leq x\leq\frac{3}{4}\pi\text{或}\frac{5}{4}\pi\leq x\leq\frac{7}{4}\pi\text{；}\\ |2\sin x| & \text{其他情形.}\end{cases}$$

而2cosx当$\frac{3}{4}\pi<x<\frac{5}{4}\pi$时为负，当$x<\frac{\pi}{4}$或$x>\frac{7}{4}\pi$时为正，又不等式的右边是明显的.

故解为：$\frac{\pi}{4}\leq x\leq\frac{7}{4}\pi$.

D3-004　已知4个实常数a、b、A、B和

$$f(\theta)=1-a\cos\theta-b\sin\theta-A\cos 2\theta-B\sin 2\theta$$

证明：如果对所有实数θ，有f（θ）≥0，则

$$a^2+b^2\leq 2\quad\text{并且}\ A^2+B^2\leq 1$$

【题说】第十九届（1977年）国际数学奥林匹克题4．本题由英国提供．

【证】由三角知识，可以选取参数角α和β，使得

$$a\cos\theta+b\sin\theta=r\cos(\theta-\alpha)\text{，}r=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$A\cos 2\theta+B\sin 2\theta=R\cos^2(\theta-\beta)\text{，}R=\sqrt{A^2+B^2}$$

于是

$$f(\theta)=1-r\cos(\theta-\alpha)-R\cos 2(\theta-\beta)\qquad(1)$$

令　$\theta=\alpha+45°$和$\theta=\alpha-45°$，得

$$f(\alpha+45°)=1-r/\sqrt{2}-R\cos 2(\alpha-\beta+45°)\geq 0\qquad(2)$$

和　$$f(\alpha-45°)=1-r/\sqrt{2}-R\cos 2(\alpha-\beta-45°)$$

$$=1-r/\sqrt{2}+R\cos 2(\alpha-\beta+45°)\geq 0\qquad(3)$$

$(2)+(3)$得　$2\left(1-\frac{r}{\sqrt{2}}\right)\geq 0$,所以

$$r^2=a^2+b^2\leq 2$$

同理　$$f(\beta)=1-r\cos(\beta-\alpha)-R\cos 0$$

$$=1-r\cos(\beta-\alpha)-R\geq 0\qquad(4)$$

$$f(\beta+\pi)=1-r\cos(\beta-\alpha+\pi)-R\cos 2\pi$$

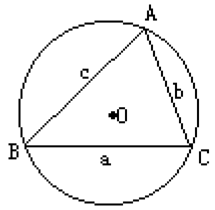
$$=1+r\cos(\beta-\alpha)-R\geq 0\qquad(5)$$

（4）+（5）导出$R^2=A^2+B^2\leq 1$.

D3-005　证明：顶点在单位圆上的锐角三角形的三个角的余弦的和小于该三角形的周长之半．

【题说】1978年全国联赛一试题8．

【证】如图，设锐角三角形 ABC在单位圆 O内，A、B、C所对的边长分别为a、b、c．



易知 A+B＞90°，即 A＞90°-B，所以 cosA＜cos（90°-B）=sinB.

同理 cosB＜sinC，cosC＜sinA

故得 cosA+cosB+cosC＜sinA+sinB+sinC

$$=\frac{1}{2R}(a+b+c)=\frac{a+b+c}{2}$$

D3-006　证明：对于任意角度θ，都有

$$5+8\cos\theta+4\cos2\theta+\cos3\theta\geq0$$

【题说】1979 年全国联赛二试题 2（2）.

【证】

$5+8\cos\theta+4\cos2\theta+\cos3\theta$

$=5+8\cos\theta+4(2\cos^2\theta-1)+4\cos^3\theta-3\cos\theta$

$=1+5\cos\theta+8\cos^2\theta+4\cos^3\theta$

$=(1+\cos\theta)(4\cos^2\theta+4\cos\theta)$

$=(1+\cos\theta)(2\cos\theta+1)^2\geq0$

D3-007　设△ABC 为一锐角三角形，且 A、B、C 满足

$$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=p$$

$$\sin2A+\sin2B+\sin2B=q$$

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=r$$

试证：$p+q\leq16r^2$.

【题说】1979 年陕西省赛二试题 3.

【证】由积化和差公式得

$$4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\sin A+\sin B+\sin C$$

所以　$16r^2-p-q$

$=(\sin A+\sin B+\sin C)^2-\sin^2A-\sin^2B-\sin^2C-\sin2A-\sin2B-\sin2C$

$=2\sin A(\sin B-\cos A)+2\sin B(\sin C-\cos B)+2\sin(\sin A-\cos C)$

又因△ABC 是锐角三角形，所以

$$B>90°-A,\ \sin B>\cos A$$

同理　$\sin C>\cos B$，$\sin A>\cos C$

故 $16r^2-p-q>0$ 即 $p+q<16r^2$

D3-008　设 $0<\alpha<\pi/2$，$0<\beta<\pi/2$，证明：

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta}\geq9$$

又问 a、β 取什么值时等式成立？

【题说】1979 年全国联赛二试题 3.

【证】原式左端 $=1/\cos^2\alpha+4/4\sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\beta$

$$\geq 1/\cos^2\alpha+4/\sin^2\alpha$$
$$=1+\tan^2\alpha+4(1+\cot^2\alpha)$$
$$=5+\tan^2\alpha+4\cot^2\alpha\geq 9$$

D3-009　关于数 a 和 b，已知不等式

$$a\cos x+b\cos 3x>1$$

没有解．证明：$|b|\leq 1$．

【题说】第十五届（1981 年）全苏数学奥林匹克十年级题 l．

【证】由已知，对任意实数 x，

$$a\cos x+b\cos 3x\leq 1 \qquad (1)$$

成立．

依次令 $x=0$，π，$\frac{1}{3}$π，$\frac{2}{3}$π得

$$a+b\leq 1 \qquad (2)$$
$$-a-b\leq 1 \qquad (3)$$
$$\frac{1}{2}a-b\leq 1 \qquad (4)$$
$$-\frac{1}{2}a+b\leq 1 \qquad (5)$$

（2）+2·（5）得 3b≤3，（3）+2·（4）得-3b≤3．因此 $|b|\leq 1$．

D3-010　若 A、B、C 是三角形的三个角，证明：

$$-2\leq\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C\leq\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

并确定等号何时成立？

【题说】第十届（1981 年）美国数学奥林匹克题 3．

【证】由不等式的对称性，可以假设 A≥B≥C，故 C≤60°，sin3C ≥0．

于是

$$\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C\geq\sin 3A+\sin 3B\geq -2$$

等号不可能成立．

下面证左边的不等式．令 $\alpha=\frac{3}{2}(B+C)$，则

$$\sin 3B+\sin 3C=2\sin\frac{3}{2}(B+C)\cos\frac{3}{2}(B-C)$$
$$\leq 2\sin\alpha$$
$$\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C\leq\sin(3\times 180°-2\alpha)+2\sin\alpha$$
$$=\sin 2\alpha+2\sin\alpha-2\sin\alpha(1+\cos\alpha)$$
$$=2\sqrt{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)^3}$$

但（1-cosα）+（1+cosα）=2 是定值，因此，当

$$3(1-\cos\alpha)=1+\cos\alpha$$

即 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$ 时，$2\sqrt{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)^3}$ 取极大值 $\frac{3}{2}\sqrt{2}$，此时

$B=C=20°$，$A=140°$

D3-011　求证：1．sin20°＜7/20；2．sin20°＞l/3．

【题说】第十二届（1986年第三阶段）全俄数学奥林匹克题选．

【证】设 sin20°=α，则

$$\sin 60° = 3\sin 20° - 4\sin^3 20°$$

所以

$$4a^3 - 3a + \sqrt{3}/2 = 0$$

即a是$p(x) = 4x^3 - 3x + \sqrt{2}/3$的根．

因为

$$p(-1) = (\sqrt{3}-2)/2 < 0$$

$$p(0) = \sqrt{3}/2 > 0$$

$$p(l/3) = (27\sqrt{3}-4)/54 > 0$$

$$p(7/20) = (100\sqrt{3}-1757)/2000 < 0$$

$$p(l/2) = (\sqrt{3}-2)/2 < 0$$

$$p(1) = (2+\sqrt{3})/2 > 0$$

所以 p（x）在（-1，0）、（1/3，7/20）和（1/2，1）中恰各有一实根．由于$0 < \sin 20° < \frac{1}{2}$，所以$1/3 < \sin 20° < 7/20$．

【别证】1．考虑以 1 为半径含 20°角的扇形和以两半径为边夹 20°角的等腰三角形．则

$$\frac{1}{2}\sin 20° = S_{\triangle} < S_{\text{扇形}} = \pi/18 < 7/40$$

即

$$\sin 20° < 7/20$$

2．注意 y=sinx 在[0，π/6]的图像是上凸的，所以当 y∈（0，π/6）时，上述图像在直线 y=3x/π的上方，即 sinx＞3x/π．

取$x = \frac{1}{9}\pi$，得

$$\sin 20° = \sin\frac{1}{9}\pi > (3/\pi)\cdot(\pi/9) = \frac{1}{3}$$

D3-012　证明：若α、β、γ是三角形的内角，则

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos\gamma < \frac{3}{4}$$

【题说】第十三届（1987年）全俄数学奥林匹克九年级题 3．

【证】

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos\gamma - \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1+\cos 2\alpha}{2} + \frac{1+\cos 2\beta}{2} - \cos(\alpha+\beta) - \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{4} + \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$

$$=\frac{1}{4}-\cos(\alpha+\beta)[1-\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\geq\frac{1}{4}-\cos(\alpha-\beta)[1-\cos(\alpha-\beta)]$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\cos(\alpha-\beta)\right)^2\geq 0$$

易知两个不等号中必有一个是严格的不等号，所以原式成立．

D3-013　x、y、z 为实数，

$$0<x<y<z<\pi/2$$

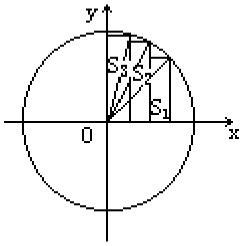
证明：$\pi/2+2\sin x\cos y+2\sin y\cos z$

$>\sin 2x+l+\sin 2y+\sin 2z$

【题说】 1990 年中国集训队测试题 19．

【证】原不等式即

$$\pi/4>\sin x(\cos x-\cos y)+\sin y(\cos y-\cos z)+\sin z\cos z$$



上式右边是单位圆内三个矩形面积的和（如图），显然小于圆面积的$\frac{1}{4}$.

D3-014　证明：对于任意△ABC，不等式

$$a\cos A+b\cos B+c\cos C\leq p$$

成立，其中 a、b、c 为三角形的三边，A、B、C 分别为它们的对角，p 为半周长．

【题说】第十六届（1990 年）全俄数学奥林匹克十一年级题 2．

【证】因为 cosx（x∈（0，π））递减，所以 a-b 与 cosA-cosB 异号，从而（a-b）（cosA-cosB）≤0．即

$$a\cos A+b\cos B\leq a\cos B+b\cos A=C \qquad (l)$$

当且仅当 a=b 时等号成立．同理

$$a\cos A+c\cos C\leq b \qquad (2)$$

$$b\cos B+c\cos C\leq a \qquad (3)$$

$\frac{1}{2}\times[(1)+(2)+(3)]$即得所要证的不等式．

D3-015　设 A、B、C 为锐角三角形之内角，n 为自然数，求证：

$$\tan^n A+\tan^n B+\tan^n C\geq 3^{\frac{n}{2}+1}.$$

【题说】第三届（1993 年）澳门数学奥林匹克第二轮题 3．

【证】设 x=tanA，y=tanB，z=tanC，则 x，y，z＞0，x+y+z=xyz，

而 $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$，代人易得$xyz \geq 3^{\frac{3}{2}}$．故

$$x^n+y^n+z^n \geq 3\sqrt[3]{x^n y^n z^n} \geq 3^{\frac{n}{2}+1}$$

D3-016　在△ABC 中，AB、AC 两边上中线互相垂直，求证 $\cot B+\cot C \geq \frac{2}{3}$．

【题说】第二十五届（1993）加拿大数学奥林匹克题 3．

【证】设△ABC 重心为 G，且

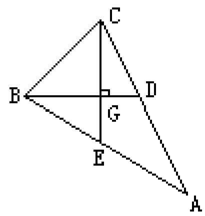
$$BG=2m，GD=m，CG=2n，GE=n$$

则 cotB=cot（∠CBG+∠GBA）

$$=\frac{1-\frac{2n}{2m}\cdot\frac{n}{2m}}{\frac{2n}{2m}+\frac{n}{2m}}=\frac{2m^2-n^2}{3mn}$$

同理 $$\cot C=\frac{2n^2-m^2}{3mn}$$

$$\cot B+\cot C=\frac{m^2+n^2}{3mn} \geq \frac{2mn}{3mn}=\frac{2}{3}$$



D3-017　证明：当$0<x<\frac{\pi}{3}$时，不等式

$$\sin 2x+\cos x>1 \qquad (1)$$

成立．

【题说】第二十届（1994 年）全俄数学奥林匹克十一年级题 1．

【证】在$0<2x<\frac{\pi}{2}$时，$0<\sin x<\sin 2x$．

在$\frac{\pi}{2}<2x<\frac{2\pi}{3}$时，$\sin x<\sin\frac{\pi}{3}<\sin 2x$．

所以在$0<x<\frac{\pi}{3}$时，恒有

$$\sin x<\sin 2x$$

从而 $\sin 2x+\cos x>\sin x+\cos x>1$

D3-018　求实数a的取值范围，使对任意实数x和任意$\theta \in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$都有

$$(x+3+2\sin\theta\cos\theta)^2+(x+a\sin\theta+a\cos\theta)^2 \geq \frac{1}{8} \qquad (1)$$

【题说】1996 年全国数学联赛二试题 2．

【解】令$t=\sin\theta+\cos\theta$，则$t \in [1,\sqrt{2}]$．

（1）式化为 $(x+t^2+2)^2+(x+at)^2\geq\frac{1}{8}$

$$\Leftrightarrow (t^2-at+2)^2\geq\frac{1}{4}$$

解得 $a\geq t+\frac{5}{2t}$ 或 $a\leq t+\frac{3}{2t}$

1°若 $a\geq t+\frac{5}{2t}$ 由于 $f(t)=t+\frac{5}{2t}$ 在 $t\in[1,\sqrt{2}]$ 上为减函数，帮 $f(t)\leq f(1)=\frac{7}{2}$，即 $a\geq\frac{7}{2}$.

2°若 $a\leq t+\frac{3}{2t}$，由平均不等式，有

$$t+\frac{3}{2t}\geq 2\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{6}$$

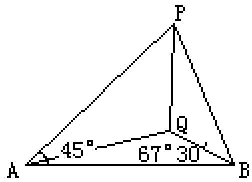
当且仅当 $t=\frac{3}{2t}$ 即 $t=\sqrt{\frac{3}{2}}\in[1,\sqrt{2}]$ 时，取等号. 故 $a\leq\sqrt{6}$.

综上所述，使(1)成立的 a 的取值范围是 $a\geq\frac{7}{2}$ 或 $a\leq\sqrt{6}$.

D4 解三角形

D4-001 空中有一气球，在它的正西方 A 点，测得它的仰角为 45°，同时在它的正南偏东 45°的 B 点，测得它的仰角为 67°30′，A，B 两点的距离为 266 公尺，这两测点均离地 1 公尺，问当测量时这气球离地面多少公尺.

【题说】1956 年上海市赛复赛题 6.



【解】如图，设气球在 P 点，Q 在 P 的正下方，并且与 A、B 同一高度，则 AQ=x，有

$$BQ = x\operatorname{ctg}67°30'$$

$$= x\operatorname{tg}22\frac{1}{2}，\angle AQB = 135°$$

在△ABQ 中，由余弦定理，

$$266^2 = x^2 + x^2\operatorname{tg}^2 22\frac{1}{2}° + 2x^2\operatorname{tg}22\frac{1}{2}°\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

解得

$$x = 266\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{6}} \approx 201(\text{公尺})$$

答：气球离地约 202 公尺.

D4-002 一气球，以每分钟 1 千米的速度由地面上升，10 分钟后，由观测点 D 测得气球在 D 的正东，仰角为 45°，又 10 分钟后，测得气球在 D 之东偏北 30°，其仰角为 60°，求风向与速度.

【题说】1957 年天津市赛复赛题 4.

【解】如图，气球在 A′时，∠A′DA=45°，AA′=1×10（千米），DA=AA′=10.

气球在 B′时，$\angle B'DB = 60°$，$BB' = 1\times 20 = 20$，$DB = \frac{20}{\sqrt{3}}$.

在△BDA 中，∠BDA=30°，所以

$$AB^2 = 10^2 + \left(\frac{20}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2\times 10\times\frac{20}{\sqrt{3}}\times\cos 30°$$

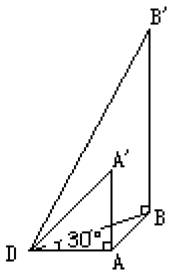
$$= \frac{100}{3}$$

$$AB = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}DB$$

从而

$$\angle DAB = 90°, \frac{AB}{10} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

即风向为正北，风速为$\frac{\sqrt{3}}{3}$千米/分．



D4-003　设α、β是一个三角形的两个内角，而 tanα、tanβ是方程 $x^2+P(x+l)+1=0$ 的二实根．求证：这个三角形必有钝角．

【题说】1963 年西安市赛高三题 2．

【证】由韦达定理，

$$\begin{cases}\tan\alpha+\tan\beta=-p\\ \tan\alpha\cdot\tan\beta=p+1\end{cases}$$

黑方格的面积不大于k_i的$\frac{1}{5}$，若某个k_1中所有黑方格的面积小于k_1的$\frac{4}{5}$，三角形的另一角为钝角(135°).

D4-004　证明下述定理：若三角形的三边长 a、b、c 及其所对的角α、β、γ满足条件

$$a+b=\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\ (a\tan\alpha+b\tan\beta)\qquad(1)$$

那么该三角形是等腰的．

【题说】第八届（1966 年）国际数学奥林匹克题 2．本题由匈牙利提供．

【证】因为

$$\tan\frac{\gamma}{2}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\cot\frac{\alpha+\beta}{2}$$

（1）可写成

$$(a+b)\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=a\tan\alpha+b\tan\beta\qquad(2)$$

即
$$a\left(\tan\frac{\alpha+\beta}{2}-\tan\alpha\right)=b\left(\tan\beta-\tan\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

或
$$\frac{a\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\alpha}=\frac{b\sin\left(\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\beta}$$

所以
$$\frac{a}{\cos\alpha}=\frac{b}{\cos\beta}\text{或}\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)=0$$

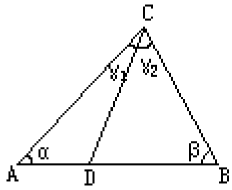
由前者有 tanα=tanβ，故α=β．由后者同样有α=β．

D4-005　设△ABC 的三个内角分别是∠A=α，∠B=β，∠C=γ．试证：当且仅当

$$\sin\alpha\sin\beta\le\sin^2\frac{\gamma}{2}$$

时，在线段 AB 内存在一点 D 使 CD 是 AD 和 DB 的等比中项．

【题说】第十六届（1974 年）国际数学奥林匹克题 2．本题由芬兰提供．



【证】设 D 是线段 AB 内的一点，并设

$$\angle ACD=\gamma_1,\ \angle BCD=\gamma_2$$

由正弦定理可得

$$CD:DA=\sin\alpha:\sin\gamma_1$$
$$CD:DB=\sin\beta:\sin\gamma_2$$

将此两式相乘得

$$\frac{CD^2}{DA\cdot DB}=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma_1\sin\gamma_2}$$

当 $CD^2=DA\cdot DB$ 时，

$$\sin\alpha\sin\beta=\sin\gamma_1\sin\gamma_2=\frac{1}{2}[\cos(\gamma_1-\gamma_2)-\cos(\gamma_1+\gamma_2)]$$
$$\le\frac{1}{2}(1-\cos\gamma)=\sin^2\frac{\gamma}{2}$$

反之，若$\sin\alpha\sin\beta\le\sin\frac{2\gamma}{2}$，则

$$2\sin\alpha\sin\beta+\cos\gamma\le1$$

因而存在 $0<\delta<\gamma$，使 $\cos\delta=2\sin\alpha\sin\beta+\cos\gamma$．令

$$\gamma_1=\frac{\gamma+\delta}{2},\ \gamma_2=\gamma_1-\gamma_2=\frac{\gamma-\delta}{2}$$

然后在 AB 上取 D，使$\angle ACD=\gamma_1$，则

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos\delta-\cos\gamma)=\sin\gamma_1\sin\gamma_2$$

所以 $CD^2=DA\cdot DB$．

D4-006　设 A，B，C 是△ABC 的三个内角，且

$$\begin{vmatrix}1 & \sin A & \cos A\\ 1 & \sin B & \cos B\\ 1 & \sin C & \cos C\end{vmatrix}=0$$

求证：△ABC 是等腰三角形．

【题说】1979 年上海市赛一试题 3．

【证】将行列式的第一行乘以-1 分别加到第二行和第三行，再按第一列展开，得：

(sinB-sinA)（cosC-cosA）-（cosB-cosA）（sinC-sinA）=0

运用和差化积，上式化简为

$$\sin\frac{B-A}{2}\sin\frac{C-A}{2}\sin\frac{B-C}{2}=0$$

从而 A、B、C 至少有两个相等，即△ABC 是等腰三角形．

D4-007 已知凸四边形的四个内角 A、B、C、D 满足 tgA+tgB+tgC+tgD=0．问：这是一个怎样的四边形？

【题说】1979 年上海市赛一试题 6．

【解】由 tgA+tgB+tgC+tgD=0，得

$$\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B}+\frac{\sin C}{\cos C}+\frac{\sin D}{\cos D}=0$$

即 $$\frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}+\frac{\sin(C+D)}{\cos C\cos D}=0 \qquad (1)$$

因为 A+B+C+D=2．

所以 sin（C+D）=-sin（A+B） (2)

将（2）代入（1），得 sin（A+B）=0，或 (3)

cosAcosB-cosCcosD=0 (4)

当（3）成立时，A+B=π

当（4）成立时，

cos(A+B)+cos(A-B)-[cos(D+C)+cos(D-C)]=0 (5)

因为 cos（A+B）=cos[2π-（D+C）]=cos（D+C）

所以由（5）得 cos（A-B）=cos（D-C）

从而 A-B=±（D-C）

A+C=π或 A+D=π

因此，四边形 ABCD 为梯形或圆内接四边形（每一个内角都不能取直角）．

D4-008 设△ABC 的三内角 A、B、C 成等差数列，三条边长 a、b、c 之倒数也成等差数列．试求 A、B、C．

【题说】1979 年全国联赛一试题 8．

【解】不妨设 A=B-α，C=B+α（α≥0）．易知

$$B=\frac{\pi}{3}$$

又$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$，即$bc+ba=2ac$．由正弦定理得

sinBsinC+sinBsinA=2sinAsinC

即 $$3\cos\alpha=2\cos^2\alpha-\frac{1}{2}$$

解得 $$\cos\alpha=1\text{或}\cos\alpha=-\frac{1}{4}.$$

因α＜$\frac{\pi}{2}$，故$\cos\alpha=1$，从而$\alpha=0$，$A=B=C=\frac{\pi}{3}$．

D4-009 已知△ABC 的三内角的正切 tgA、tgB、tgC 满足（l）$tgA+tgB+tg=-\frac{1}{6};(2)tg^3A+tg^3B+tg^3C=-\frac{181}{216}$．求A、B、C．

【题说】1983 年上海市赛二试题 1．

【解】设 tgA=a，tgB=b，tgC=c．由题设知

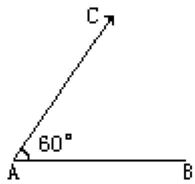
$$abc=a+b+c=-\frac{1}{6}, a^3+b^3+c^3=-\frac{181}{216}$$

又
$$\begin{aligned}&a^3+b^3+c^3\\&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\&=(a+b+c)[(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)]\end{aligned}$$

所以 $ab+bc+ca=-\frac{2}{3}$

因此 a、b、c 是方程 $6x^3+x^2-4x+1=0$，即（x+1）（2x-1）（3x-1）$=0$的三个根 -1、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$**，从而，**$\triangle ABC$**的三内角分别为**$\frac{3\pi}{4}$、$\mathrm{arctg}\frac{1}{2}$、$\mathrm{arctg}\frac{1}{3}$**.**

D4-010　两个滑冰者甲和乙位于冰面上 A、B 两点，如图，A 与 B 相距 100 米．如果甲从 A 出发，以 8 米/秒的速度沿着一条与 AB 成 60°角的直线滑行,同时乙以 7 米/秒的速度沿着与甲相遇的最短直线滑行.那么在相遇时，甲滑行了多远？



【题说】第七届（1989 年）美国数学邀请赛题 6．

【解】设甲、乙二人 t 秒钟后相遇于 C 点，则 AC=8t，BC=7t，依余弦定理，有

$$(7t)^2=100^2+(8t)^2-2\times100\times8t\cos60°$$

整理得
$$3t^2-160t+2000=0$$
$$(3t-100)(t-20)=0$$

所以 $t=100/3, 20$

取较短时间值 t=20，此时甲滑行了 8×20=160 米．

D4-011　J 和 K 沿着相距 200 米的两条笔直大道同向行走，K 的速度为每秒 3 米，J 的速度为每秒 1 米．在距两条路等距离的某处有一座高大的直径为 100 米的圆形建筑，首次 J 和大的视线被这建筑挡住时，他们之间相距 200 米，t 秒后 J 和 K 又能看见．如果把 t 写成既约分数，那末分子与分母的和为多少？

【题说】第十一届（1993 年）美国数学邀请赛题 13．

【解】163．

令 A、C 分别为视线首次被挡住时 K 和 J 的位置，B、D 为他们又能看见时各自的位置（如图），令 P 为 AC 的延长线与 BD 延长线的交点，这两条线与建筑物相切，且 AC⊥AB．令 O 为建筑物的中心，F 为建筑物与 AC 的切点，t 为 K 从 A 到 B 所用的时间（秒），则 AB=3t，CD=t，CF=FA=100，OF=50，易知

$$3=\frac{AB}{CD}=\frac{PA}{PC}=\frac{200+PC}{PC}$$

所以　　PC=100

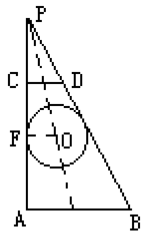
则 $\mathrm{tg}\,\theta = \frac{OF}{PF} = \frac{50}{200} = \frac{1}{4}$

令∠FPO=θ，因为 PO 是∠BPA 的角分线，所以∠BPA=2θ

$$t = CD = PC \cdot \mathrm{tg}2\theta = 100 \cdot \frac{2\mathrm{tg}\theta}{1-\mathrm{tg}^2\theta}$$

$$= 100 \cdot \frac{2 \cdot \frac{1}{4}}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{160}{3}$$

$$160 + 3 = 163$$



D5 三角方程

D5-001 求$x^2-2x\sin\frac{\pi x}{2}+1=0$的所有实根.

【题说】1956 年北京、天津市赛二试题 7.

【解】原方程可变形为同解方程

$$\left(x-\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2+\cos^2\frac{\pi x}{2}=0$$

因此
$$\begin{cases} x-\sin\frac{\pi x}{2}=0 & (1) \\ \cos\frac{\pi x}{2}=0 & (2) \end{cases}$$

由（2），得 $\frac{\pi x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{2}$

代入（1）得 x=±1，它是原方程仅有的实根.

D5-002 解方程 $\cos^n x-\sin^n x=l$，其中 n 为任意给定的自然数.

【题说】第三届（1961 年）国际数学奥林匹克题 3．本题由保加利亚提供.

【解】若 n≥2，则

$$\cos^n x-\sin^n x\le\cos^2 n+\sin^2 x=l$$

等号仅在 cosx=±1 及 0 时可能成立．因此，在 n 为奇数时，x=2kπ或 2kπ-π/2．在 n 为偶数时，x=kπ．其中 k 为任意整数.

n=1 时，cosx-sinx=1．平方并整理得 sin2x=0，因此这时的解也包括在上面 n 为奇数的情况中．D5-003 求方程

$$\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1$$

的所有解.

【题说】第四届（1962 年）国际数学奥林匹克题 4．本题由罗马尼亚提供.

【解】
$$\begin{aligned} 2&=2\cos^2 x+2\cos^2 2x+2\cos^2 3x \\ &=3+\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x \\ &=3+\frac{\sin 7x-\sin x}{2\sin x} \end{aligned}$$

所以 $\sin 7x=-\sin x$

解为 $x=\frac{2k+1}{6}\pi$ 与 $x=k\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}(k\in Z)$

D5-004 设 a、b 都是实数，求满足方程

$$\frac{a\sin x+b}{b\cos x+a}=\frac{a\cos x+b}{b\sin x+a}$$

的实数 x.

【题说】1978 年广东省赛二试题 1.

【解】去分母并整理得

$$(\sin x-\cos x)(a^2+b^2+ab(\sin x+\cos x))=0$$

由于 $a^2+b^2+ab(\sin x+\cos x)>a^2+b^2-2ab\ge 0$，所以

$$\sin x-\cos x=0$$

$$x=k\pi+\frac{\pi}{4}\ （k为整数） \qquad (1)$$

在$b\neq\pm\sqrt{2}a$时，(l)是原方程的解．在$b=\sqrt{2}a$时，(l)中k应取偶数，在$b=-\sqrt{2}a$时，(l)中k应取奇数．

因为$x>0$，所以$x=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$．

D5-005　解方程组

$$\begin{cases}\sin x+2\sin(x+y+z)=0 & (1)\\ \sin y+3\sin(x+y+z)=0 & (2)\\ \sin z+3\sin(x+y+z)=0 & (3)\end{cases}$$

【题说】第十四届（1980 年）全苏数学奥林匹克十年级题 3．

【解】（1）+（2）-（3）得

$$\sin x+\sin y+x\text{in}(x+y+z)-\sin z=0$$

和差化积得

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}+2\sin\frac{x+y}{2}\cos\left(\frac{x+y}{2}+z\right)=0$$

即

$$4\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+z}{2}\cos\frac{y+z}{2}=0$$

所以(i)$x+y=2n\pi$；

（ii）$x+z=2n\pi+\pi$；

（iii）$y+z=2n\pi+\pi$．其中 n 为整数．

将（i）代入（1）、（3）式得

$$\begin{cases}\sin x+2\sin z=0\\ \sin z+4\sin z=0\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x=2\pi\\ y=l\pi\\ z=m\pi\end{cases}$$

其中 k、l、m 是任意整数．

对于（ii）、（iii）可类似求出相同结果．

D5-006 求方程$\cos\frac{\pi}{4}=\cos x$的通解，在（0，24π）内，该方程不相同的解有多少个？

【题说】1984 年全国联赛一试题 2（2），原题为填空题．

【解】原方程可变形为

$$2\sin\frac{5}{8}x\cdot\sin\frac{3}{8}x=0$$

通解为$x=\frac{8}{5}m\pi$或$\frac{8}{3}n\pi$，其中m，n∈Z．

函数f（x）$=\cos x-\cos\frac{x}{4}$以8π为周期．在[0，8π)内$f(x)=0$的根

是0、$\frac{8}{5}\pi$、$\frac{16}{5}\pi$、$\frac{32}{5}\pi$及$\frac{8}{3}\pi$、$\frac{16}{3}\pi$，共7个，因而在（0，24π）内不同解的个数是$3\times 7-1=20$个．

D5-007　解方程

$$\cos 12x=5\sin 3x+9\tan^2 x+\cot^2 x \qquad (1)$$

【题说】1992 年捷克和斯洛伐克数学奥林匹克（最后一轮）题 4．

【解】（1）的左边$\cos 12x\le 1$，而（1）的右边$\ge -5+2\sqrt{9\tan^2 x\cdot\cot^2 x}=1$．所以，方程（l）等价于方程组

$$\begin{cases}\cos 12x=1 & (2)\\ \sin 3x=-1 & (3)\\ 3\tan x=\cot x & (4)\end{cases}$$

解（4）得

$$x=2n\pi+\frac{\pi}{6},2n\pi+\frac{5\pi}{6},2n\pi+\frac{7\pi}{6},2n\pi+\frac{11\pi}{6}(n\in Z)$$

其中适合（3）的只有后两组，它们均适合（2）．所以，（l）的解为

$$x=2k\pi+\frac{7\pi}{6},2k\pi+\frac{11\pi}{6},k\in Z$$

D5-008　解方程

$$\cos\cos\cos\cos x=\sin\sin\sin\sin x$$

【题说】第二十一届（1995 年）全俄数学奥林匹克十年级题 1．

【解】方程无解．我们证明对所有 $x\in R$，不等式．

$$\cos\cos\cos\cos x>\sin\sin\sin\sin x \quad (1)$$

成立．由周期性，只须证明对 $x\in[0,2\pi]$，不等式（1）成立．

（1）若 $x\in[\pi,2\pi]$则（l）式显然成立，因为这时 $\cos\cos\cos\cos x>0$，而

$$\sin\sin\sin\sin x<0$$

（2）$x\in[0,\pi/2]$．因为

$$\sin x+\cos x\le\sqrt{2}<\pi/2$$

所以 $0\le\cos x<\pi/2-\sin x$．因此

$$\cos\cos x>\cos(\pi/2-\sin x)=\sin\sin x$$

将 x 换成 cos cosx 便得

$$\cos\cos\cos\cos x>\sin\sin\cos\cos x$$

由于 sinx 在$[0,\pi/2]$上递增，再利用（2）得

$$\sin\sin\cos\cos x>\sin\sin\sin\sin x$$

因此（l）成立．

（3）$x\in(\pi/2,\pi)$，令 $y=x-\pi/2$，由（2）得

$$\cos\cos(\cos\sin y)>\sin\sin(\cos\sin y)>\sin\sin(\sin\cos y)$$

即（1）成立．

D5-009　求方程

$$\tan 19x°=\frac{\cos 96°+\sin 96°}{\cos 96°-\sin 96°}$$

的最小正整数解．

【题说】第十四届（1996 年）美国数学邀请赛题 10．

【解】方程右边 $=\dfrac{-\sin 6°+\sin 84°}{-\sin 6°-\sin 84°}=-\dfrac{\sin 39°}{\cos 39°}=\tan 141°$**，所以**

$$19x\equiv 141 \pmod{180}$$

$$x=\frac{141+180n}{19}=7+10n-\frac{2(5n-4)}{19}$$

n=-3 时，x 为整数．为使 x 为正整数，最小的 n 为 19+（-3）=16．所以本题的最小正整数解 $x=7+160-\dfrac{152}{19}=159$**．**

E 组合数学

E1　存在性问题

E1-001　证明：对每一个自然数 m，平面内存在一有限点集 S．有如下性质：对 S 中每一个点 A，S 中恰有 m 个点与 A 相距为 1 单位，这种点集 S 有无限多个．

【题说】第十三届（1971 年）国际数学奥林匹克题 5．本题由保加利亚提供．

【证】m=1 时，取两个距离为 1 的点，它们所成的集显然具有所说的性质．

设对于自然数 k，存在点集 S_k 具有所说性质．将 S_k 平移 1 个单位得到点 S'_k．平移方向不与以下直线平行：

（1）过 S_k 中任两点的直线；

（2）以 S_k 中每一点为圆心，1 为半径作圆，过这些圆的交点与圆心的直线．

这时 S_k 中每一点 A 恰与 $S_k \cup S'_k$ 中 k+1 个点的距离为 1．同样，S'_k 中每一点恰与 $S_k \cup S'_k$ 中 k+1 个点的距离为 1．因此 $S_{k+1}=S_k \cup S'_k$ 具有所说的性质．

因此命题成立．

E1-002　给出一个集合，该集合由十个互不相同的两位十进制正整数组成．证明：这个集合必有两个无共同元素的子集，两子集中各数之和相等．

【题说】第十四届（1972 年）国际数学奥林匹克题 1．本题由原苏联提供．

【证】该集合共有 $2^{10}-1=1023$ 个非空子集．每个子集中的数的和≤ 10×100=1000，故其中必有两个和相等．相应的两个子集如有公共元，将公共元划去，产生的两个子集，所含数的和相等．

E1-003　集合 M 由 1985 个不等的正整数组成，其中每个正整数的素因子均不大于 26．证明：M 至少含有一个由 4 个不同的数组成的子集，这 4 个数之积为某整数的 4 次幂．

【题说】第二十六届（1985 年）国际数学奥林匹克题 4．本题由内蒙古提供．

【证】小于 26 的素数为 2，3，5，7，11，13，17，19，23 共 9 个．按题意，M 中每一数具有标准形式：

$$2^{a_1}3^{a_2}5^{a_3}\cdots 23^{a_9}\cdots \qquad (1)$$

其中 a_1，a_2，…，a_9 为非负整数．

注意 a_i 按奇偶来分只有两种可能，所以 9 个指数 a_1，a_2，…，a_9 的奇偶分配共 $2^9=512$ 种，从而 M 中 1985（＞513）个形如（1）的数中，可以找到一对数，它们的指数的奇偶性相同，不仅如此，将找到的数取出后，还可以继续在 M 中选出这样的数对，直至选出 737 对，每一对这样的数的乘积的形式为

$$(2^{\beta_1}3^{\beta_2}\cdots 23^{\beta_9})^2 \qquad (2)$$

其中 β_i（1≤i≤9）为非负整数．

如上所说，在形如（2）的 737 个数中，必有两数的指数中的β_1，β_2，…，β_9与β'_1，β'_2，…β'_9的奇偶性相同，这两个数的积

$$(ab)(cd)=(2^{r_1}2^{r_2}\cdots 23^{r_9})^4$$

其中 r_i 为非负整数，所以 a、b、c、d 的积为整数的 4 次方．

E1-004　在坐标平面上，纵横坐标都是整数的点称为整点．试证：存在一个同心圆的集合，使得

（1）每个整点都在此集合的某一圆周上；

（2）此集合的每个圆周上，有且只有一个整点．

【题说】1987 年全国联赛二试题 2．

【证】设 m 是无理数，n 是有理数，且 2n≠整数，则点 P（m，n）到任何二相异整点（a，b），（c，d）不等距

因为由　$(a-m)^2+(b-n)^2=(c-m)^2+(d-n)^2$

得出　$a^2+b^2-c^2-d^2+2(d-b)n=2(a-c)m$

上式左边是有理数，所以必须右边为 0，从而 a=c，则

$$(b-d)(b+d-2n)=0$$

由 n 的取法，必须 b=d，与二点不同矛盾）．

以 P 为心，过各个整点作圆，则每个圆上恰有一个整点，所以这一族同心圆即为所求．

E1-005　空间是否存在一个无限点集，它在每个平面上都至少有一个点，但都没有无限多个点？

【题说】1987 年匈牙利数学奥林匹克题 2．

【解】点集 $M=\{(t^5,t^3,t):t\in R\}$ 在每一个平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 上至少有一个点，至多有五个点，因为奇次方程 $At^5+Bt^3+Ct+D=0$ 至少有一个实数根，至多有五个实数根．

E1-006　是否存在两个整数，其立方和等于 1991？

【题说】第十七届（1991 年）全俄数学奥林匹克九年级题 5．

【解】易知对 $x\in Z$

$$x^3\equiv 0,\pm 1 \pmod 7$$

因此，对于任意的 X、$y\in Z$，x^3+y^3 除以 7 的余数∈｛0，1，2，5，6｝．但 1991 除以 7 的余数是 3，所以不存在 X，$y\in Z$，使得

$$x^3+y^3=1991$$

E1-007　设 X 是一个有限集合.法则 f 使得 X 的每一个偶子集 E(偶数个元素组成的子集）都对应一个实数 f（E），且满足条件：

（1）存在一个偶子集 D，使得 f（D）＞1990；

（2）对于 X 的任意两个不相交的偶子集 A，B，有

$$f(A\cup B)=f(A)+f(B)-1990$$

求证：存在 X 的子集 P 和 Q，满足

（1）$P\cap Q=\varnothing$，$P\cup Q=Z$；

（2）对 P 的任何非空偶子集 S，有 f（S）＞ 1990；

（3）对 Q 的任何偶子集 T，有 f（T）≤1990．

【题说】第五届（1990 年）全国冬令营赛题 5．

【证】由于 X 是有限集，X 的偶子集的个数是有限的．令 P 是使 f 值最大的偶子集,如果这样的偶子集不只一个,取其中元素最少的为 P．Q

是 P 相对于 X 的余集．显然

$$P\cap Q=\varnothing，P\cup Q=X$$

对于P的任何非空偶子集S，令$\overline{S}$是S相对于P的余集，则$\overline{S}$是偶子集，并且$\overline{S}$的元数少于P的元数．因此

$$f(\overline{S})<f(P)=f(\overline{S})+f(S)-1990$$

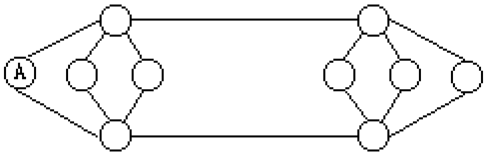
从而 $$f(S)>1990$$

对 Q 的偶子集 T，由于 $P\cap T=\varnothing$，$P\cap T$ 是偶子集，所以

$$f(P)\geq f(P\cup T)=f(P)+f(T)-1990$$

因此，$$f(T)\leq 1990$$

E1-008　从数集｛0，1，2，…，14｝中选出不同的数，填入下图中 10 个小圆中，使得由线段连结的两个数之差的绝对值均不相同．这可能吗？请证明你的结论．



【题说】第二十三届（1991 年）加拿大数学奥林匹克题 4．

【解】不可能．用反证法证明如下：如果能按题中要求从｛0，1，…，14｝选出 10 个数填入图中圆中，使由线段连结的两个数之差的绝对值都不同．那么这 14 个差的绝对值应恰好是 1，2，…，14，其中有 7 个奇数，7 个偶数．因而它们的和 S 是奇数．

另一方面，小圆中的每个数在 S 中出现偶数次（每个小圆引出偶数条线段），所以 S 应当是偶数．

以上矛盾即证明了我们的论断．

E1-009　设整数 $n\geq 4$，a_1，a_2，…，a_n 是区间（0，2n）中的不同整数．证明：集合｛a_1，a_2，…，a_n｝有这样的子集存在，它的所有元素之和能被 2n 整除．

【题说】1992 年四川省高中数学联赛决赛题 4．

【证】（1）若 $n\notin$｛a_1，a_2，…，a_n｝则 2n 个整数 a_1，a_2，…，a_n，2_{n-a1}，2_{n-a2}，…，2_{n-an} 都属于（0，2n）．由抽屉原理其中至少有二数相等，令 $a_i=2_n-a_j$．

因 $n\notin$｛a_1，a_2，…，a_n｝，必有 $i\neq j$，于是 a_i+a_j 能被 2n 整除．

（2）若 $n\in$｛a_1，a_2，…，a_n｝，不妨设 $a_n=n$，考虑 n-1 个整数 a_1，a_2，…，a_{n-1}（$n-1\geq 3$），在其中任取三个数 $a_i<a_j<a_k$．若 a_k-a_j，a_j-a_i 均能被 n 整除，则

$$a_k-a_i=a_k-a_j+a_j-a_i\geq 2n$$

与 $a_k\in$（0，2n）矛盾．

故 a_1，a_2，…，a_{n-1} 中至少有两个数，差不能被 n 整除．

不妨设 a_1 与 a_2 的差不能被 n 整除，考虑 n 个整数：

$$a_1，a_2，a_1+a_2，a_1+a_2+a_3，\cdots，a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}.$$

（i）若这 n 个数关于模 n 的余数都不同，则其中必有一个数能被 n 整除，令此数为 kn．若 k 为偶数，结论成立；若 k 为奇数，加上 a_n 即构

成所需要的子集．

（ii）若这些数中有两个数关于模 n 同余，则它们的差被 n 整除，因 a1 和 a2 不同余，故这二数之差必为原集合中若干数之和．以下讨论同（i）．

这里 n≥4 是必要的，如 n=3 时，集｛1，3，4｝结论不成立．

【又解】假设结论不成立，则｛1，2n-1｝，｛2，2n-2｝，…，（n-1，n+1｝，｛n｝这 n 个集每个至多含一个 a_i（1≤i≤n）．从而这 n 个集每个恰含一个 a_i（1≤i≤n）．特别地，可设 a_n=n．于是

对任一j（$1\le j<\frac{n}{2}$），j与n - j至多一个∈A = ｛a_1，a_2，…，a_{n-1}｝（否则 j+（n-j）+n=2n）．

因为（2n-1）+（n+1）+n=4n，所以 1 与 n-1 至少有一个∈A．不妨设 1∈A，这时 n-1∉A，n+1∈A．

因为（2n-2）+（n+1）+1+n=4n，所以 2n-2∉A，2∈A．

如果1，2，…，j（$2\le j<\frac{n}{2}$）均∈A，那么2n-（1+j）A，所以1+j ∈A．这样1，2，…，$\left[\frac{n-1}{2}\right],\left[\frac{n-1}{2}\right]+1\in A.\ n-1,n-2,\cdots,n-\left[\frac{n-1}{2}\right]$ $\notin A$,所以$n+1,n+2,\cdots,n+\left[\frac{n-1}{2}\right]\in A.$

在n为奇数时，$\left(n+\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)+\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]+1\right)=2n$．在n为偶数时，$\left(n+\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)$ $+\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]+1\right)+1=2n$．均产生矛盾．所以结论成立．

E1-010　A 是满足下列条件的 m×n 矩阵．

（1）m≤n；

（2）矩阵中的元素均为 0 或 1；

（3）若 f 是｛1，2，…，m｝到｛1，2，…，n｝的单射，则存在 i ∈｛1，2，…，m｝，使得第 i 行 f（i）列元素为 0．

证明：存在满足下列条件的集合 S⊆｛1，2，…，m｝和 T⊆｛1，2，…，n｝，使得

（1）若 i∈S，j∈T，则第 i 行 j 列元素为 0；

（2）|S|＋|T|＞n．

【题说】1992 年日本数学奥林匹克题 4．

【证】条件（3）即 A'中任 m 个元素，如果每两个不同行也不同列，那么这 m 个元素中必有 0．所要证的结论即 A 有一个 s×t 的子矩阵，元素全为 0，而且 s+t＞n．

如果 m＜n，可添 n-m 行，每行元素都是 1，因此可设 m=n，即只需考虑方阵．

m=1 时结论显然．假设 m 换为较小的数时结论成立．

如果元素全部为 0,结论显然.不妨设第 m 行第 m 列的那个元素为 1.这时前 m-1 行前 m-1 列的子矩阵，具有与（3）相应的性质，即每 m-1 个两两不同行不同列的元中必有 0，从而由归纳假设，存在 s×t 的零子矩阵，

s+t＞m-1．若 s+t＞m，结论已真．设 s+t=m，并且这个零子矩阵在左上角，即前 s 行前 t 列．

右上角的 s×s 方阵与左下角的 t×t 方阵中，若某一个不具有与(3)相应的性质(即有一条两两不同行不同列的 1 组成的对角线)，则由(3)，另一个必具有相应的性质．不妨设 s×s 方阵具有相应的性质，则由归纳假设，其中有 h×k 的零子矩阵，h+k＞s．将它与左上角的零子矩阵合在一起，得到一个 h×（t+k）的零子矩阵，而

$$h+(t+k)>s+t=n$$

于是结论对一切自然数 m 成立．

E1-011　设 k 和 l 为正整数．证明：存在整数 M，使得当 n＞M 时，$\left(k+\frac{1}{2}\right)^n+\left(l+\frac{1}{2}\right)^n$不是整数．

【题说】1992 年澳大利亚数学奥林匹克题 4．

【证】由于$\left(k+\frac{1}{2}\right)^n+\left(l+\frac{1}{2}\right)^n$是整数的充要条件是$2^n$整除$(2k+1)^n+(2l+1)^n$．而

$$(2k+1)^n+(2l+1)^n\equiv 1+2kn+1+2ln \pmod 4$$
$$=2n(k+l)+2$$

要使 2^n 整除 $(2k+1)^n+(2l+1)^n$，n 必为奇数．

此时

$$(2k+1)^n+(2l+l)^n=(2k+2l+2)\ [(2k+1)^{n-1}-(2k+1)^{n-2}\cdot(2l+1)+\cdots+(2l+1)^{n-1}]$$

上式右端第二个因式是 n 个奇数的代数和，因而是奇数．所以，2^n 整除 $(2k+1)^n+(2l+1)^n$ 的充要条件是 2^n 整除 $2(k+l+1)$．

取使2^n整除$2(k+l+1)$的最大的n为M，则当n＞M时，$\left(k+\frac{1}{2}\right)^n+\left(l+\frac{1}{2}\right)^n$不是整数．

E1-012　(1)考虑 20 的平方，它与 20 有着相同个数的非零数字．问除了 10、20、30 以外，是否存在一个两位数，它的平方与它有相同个数的非零数字？如果你认为存在，找出它，如果你认为不存在，证明你的结论．

(2)问除了 100、200、300 以外，是否存在一个三位数，使它的平方数与它有相同个数的非零数字？

【题说】　1992 年英国数学奥林匹克题 1．

【解】(1)设 n 是满足题意的两位数，个位数字不为 0，则 n^2 具有$\overline{a0b}$或$\overline{a00b}$的形式，其中$1\le a，b\le 9$．

当$n^2=\overline{a0b}=100a+b$时，由于

$$\sqrt{100a}<\sqrt{100a+b}<\sqrt{100a}+1$$

显然，$a=1，4，9$时，$(\sqrt{100a}，\sqrt{100a}+1)$中无整数。$a=2，3，5，6，7，8$时，$(\sqrt{100a}，\sqrt{100a}+1)$中只有一个整数$n=[10\sqrt{a}]+1$．即$n=15，18，24，25，27，29$，但此时$n^2$不具有$\overline{a0b}$的形式．

当$n^2=\overline{a00b}=1000a+b$时，由于

$$\sqrt{1000a}<\sqrt{1000a+b}<\sqrt{1000a}+1$$

此时$n=[\sqrt{1000a}]+1$，当$a=1,2,\cdots,9$时，得到的$n=32,45$，55，64，71，78，84，90，95均不满足题意．

所以，满足题意的两位数不存在．

（2）显然，245满足题意，因为$245^2=60025$．

E1-013　设n是奇数．试证：存在2n个整数．a_1，a_2，…，a_n；b_1，b_2，…，b_n，使对任一整数k，0＜k＜n，下列3n个数

$$a_i+a_{i+1},\ a_i+b_i,\ b_i+b_{i+k}$$

（i=1，2，…，n；其中$a_{n+1}=a_1$，$b_{n+j}=b_j$，0＜j＜n）被3n除所得余数互不相同．

【题说】1993年中国数学奥林匹克（第八届数学冬令营）题1．

【证】取$a_i=3_i$，$b_i=3i+1$（1≤i≤n），则

$$a_i+a_{i+1}=6i+3$$

$$a_i+b_i=6i+1$$

$$b_i+b_{i+k}=\begin{cases}6i+3k+2,\ i+k\le n\\6i+3k-3n+2,i+k>n\end{cases}$$

显然，6i+3，6j+1，6t+3k+2，或6t+3k-3n+2，除以3余数分别为0，1，2．因此它们被3n除后余数各不相同．

在1≤i≤j≤n时，（6j+3）-（6i+3）=6（j-i）．因为n是奇数，0＜j-i＜n，所以6（j-i）不被3n整除，即6j+3与6i+3被3n除，余数不同．

同样，在1≤i＜j≤n时，6j+1与6i+1被3n除，余数不同．6j+3k+2或6j+3k-3n+2与6i+3k+2或6i+3k-3n+2被3n除，余数不同．

因此，所取的a_i，b_i（1≤i≤n）符合要求．

E1-014　是否存在自然数n，使n！的前四位为1993？

【题说】1993年德国数学奥林匹克（第二轮）题4．

【解】答案是肯定的．

取N=1000100000，当n=N，N+1，…时，考虑数n！的前4位的变化情况．如果$N!=\overline{abcde\cdots}$，则$N!\cdot(N+1)=\overline{abcx\cdots}$，其中$x=d$或$x=d+1$．继续如上的乘法，每一次数$\overline{abcd}$增加的值都不大于1，但经过不多于10次的乘法运算后将增加1．所以，数n！前四位将跑遍所有的四位数，其中当然会有1993．

E1-015　证明：在任给的8个不同的实数x_1，x_2，…，x_8中，至少存在两个实数x_i和x_j使得不等式

$$0<\frac{x_i-x_j}{1+x_ix_j}<\tan\frac{\pi}{7}$$

成立．

【题说】1994年四川省高中数学联赛题2．

【证】令$x_i=\tan\theta_i$（$i=1,2,\cdots,8$），$-\frac{\pi}{2}<\theta_i<\frac{\pi}{2}$，则$\theta_i$互不相同，且

$$\frac{x_i-x_j}{1+x_ix_j}=\frac{\tan\theta_i-\tan\theta_j}{1+\tan\theta_i-\tan\theta_j}=\tan(\theta_i-\theta_j)$$

由抽屉原理，在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内的8个$\theta_i$（$i=1,2,\cdots,8$）中，至少存在两个$\theta_i$和$\theta_j$使得

$$0<\theta_i-\theta_j<\frac{\pi}{7}$$

而$\mathrm{tg}\,\theta$在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内是严格单调递增的，所以

$$0<\tan(\theta_i-\theta_j)<\tan\frac{\pi}{7}$$

即

$$0<\frac{x_i-x_j}{1+x_ix_j}<\tan\frac{\pi}{7}$$

E1-016　对于任何正整数 k，f（k）表示集合｛k+1，k+2，…，2k｝内在二进制表示下恰有 3 个 1 的所有元素的个数．

（a）求证：对于每个正整数 m，至少存在一个正整数 k，使得 f（k）=m．

（b）确定所有正整数 m，对每一个 m，恰存在一个 k 满足 f（k）=m．

【题说】第三十五届（1994 年）国际数学奥林匹克题 3．本题由罗马尼亚提供．

【解】k=1，2，3 时，f（k）=0．k=4=（100）$_2$时，f（k）=1．

若 k+1 的二进制表示中恰有三个 1，那么 2（k+1）的二进制表示中也恰有三个 1，所以 f（k+1）≥f（k）．当且仅当 2k+1 的二进制表示恰有三个 1 时，f（k+1）=f（k）+1，即 k=（100…0100…0）$_2$［包括 k=（10…01）$_2$在内］时，f（k+1）=f（k）+1．由于这样的 k 有无穷多个，所以 f（k）从 1 逐一增加至无穷（即（a）成立）．并且仅在 k=（10…010）$_2$时，f（k），f（k+1）连续（比前一项）增加 1，从而当且仅当 k=（10…010）$_2$=2^{n+1}+2 时，m=f（k）仅出现一次，

显然$k=(\overbrace{10\cdots00}^{n\text{个}0})_2$时，$k+1$，$k+2$，…，$2k$中有$C_n^2$个数，二进制表示中恰有三个1（在n个位置中选两个放1有C_n^2种方法），即此时$f(k)=C_n^2$．根据上面所说，对$k=(10\cdots010)_2=2^{n+1}+2$，$f(k)=C_n^2+1$，即（b）的解是$m=C_n^2+1$（$n\in N$）．

E1-017　求证：存在一个具有下述性质的正整数的集合 A：对于任何由无限多个素数组成的集合 S，存在 k≥2 及正整数 m∈A 和 n∉A，使得 m 和 n 均为 S 中 k 个不同元素的乘积．

【题说】第三十五届（1994 年）国际数学奥林匹克题 6．本题由芬

兰提供．

【证】将素数依大小排列为 $p_1<p_2<p_3<\cdots$．

令 $A_i=\{p_ip_{j_1}\cdots p_{j_i} \mid i<j_1<\cdots j_i\}$，$i=1,2,\cdots$，则

$$A=\cup A_i$$

对任一由素数 $p_{\beta_1}<p_{\beta_2}<\cdots$ 组成的集合S，取 $k=\beta_1+1$，则

$$m=p_{\beta_1}p_{\beta_2}\cdots p_{\beta_k}\in A_{\beta_1}\subseteq A$$

$$n=p_{\beta_1}p_{\beta_2}\cdots p_{\beta_{k+1}}\notin A$$

E1-018　是否存在

(1) 4 个；(2) 5 个不同的自然数，它们中任意三个数之和是素数？

【题说】1995 年城市数学联赛高年级普通水平题 2．

【解】(1) 1，3，7，9 满足条件．

(2) 由于任意 5 个不同的自然数中，必存在 3 个数，除以 3 后余数相同，从而这三个数的和是 3 的倍数，因而是合数．即不存在 5 个不同的自然数，它们中任意三个数之和是素数．

E1-019　是否存在 100 个正整数，使得它们的和与最小公倍数相等？

【题说】1995 年城市数学联赛低年级普通水平题 2．

【解】$1,2,2^2,2^3,\cdots,2^{2n+1}$ 与 $3,3\cdot2,3\cdot2^3,3\cdot2^5,\cdots,3\cdot2^{2n-1}$，这 $3n+3$ 个数的最小公倍数为 $3\cdot2^{2n+1}$，和为

$$(2^{2n+2}-1)+(3+2^{2n+1}-2)=3\cdot2^{2n+1}$$

取 n=33，得到 102 个数 1，2，4，8，…，2 ”与 3，6，24，…，$3\cdot2^{65}$，去掉 4，8，16，32，增加 12，48，如此 100 个正整数满足条件．

E1-020　由同一组数码写成的自然数称之为相似数（例如，对数码组 1，1，2，相似数有 112，121，211）．证明：存在三个不含数码 0 且有 1995 位的相似数，使得其中两数之和等于第三个数．

【题说】第二十一届（1995 年）全用数学奥林匹克九年级题 5．

【证】因为 159 十 495—954，而 1995 被 3g 除，所以三个数

459459…459（665 个 459）

495495…495（665 个 495）

954954…954（665 个 954）

合乎要求．

E1-021　是否存在正整数 n＞1，满足下列条件：正整数集可分拆为 n 个非空子集，使得从任 n-1 个子集中各任取一个数，这 n-1 个数的和在剩下的哪个集中？

【题说】第三十六届（1995 年）IMO 预选题．

【解】 n=2 显然不满足条件．

若 n=3 满足条件，正整数集分拆成的三个非空子集人 A_1，A_2，A_3 中必有一个至少含有一个奇数，另一个至少含有一个偶数．设奇数 $a=2h-1\in A_1$，偶数 $b=2k\in A_2$，则根据已知条件可得

$$a+b\in A_3,\ a+2b\in A_1,\ a+3b\in A_3,\ a+4b\in A_1,\ \cdots$$

以及

$$b+a\in A_3,\ b+2a\in A_2,\ b+3a\in A_3,\ b+4a\in A_2,\ \cdots$$

于是 $a+2hb\in A_1$，$b+(2k+1)a\in A_3$，但

$$a+2hb=b+(2k+1)a.$$

与分拆的定义不符，所以 $n=3$ 不满足条件（注意我们并没有用到 $A_1\cup A_2\cup A_3=N$）．

若 $n>3$ 满足条件，正整数集分拆成 n 个非空子集 A_1，A_2，A_3，…，A_n．这个集中有两个，不妨设为 A_1，A_2；A_1 中有一个元 a 与 A_2 中一个元 b 的奇偶性不同．从 A_4，…，A_n 中各取一个数作成和 s，令 $a'=a+s$，$b'=b+s$，则

$$A'_i=\{x+s\mid x\in A_i\},\ i=1,2,3$$

显然 a'、b'奇偶性不同、并且分别属于 A_1'、A_2'．对任意的 $x\in A_i'$，$y\in A_j'$（$1\le i<j\le 3$），

$$x+y=(x-s)+(y-s)+s+s\in A'_k$$

k 是 {1，2，3} - {i，j} 中的元素．

根据上面对 n=3 的证明，A'_1，A'_2，A'_3 中有两个集的交非空，从而 A_1，A_2，A_3 的交非空．因此，没有满足要求的 n．

E1-022　Z 表示整数集．证明对任意整数 A、B 可以找到整数 C，使得集 $M_1=\{x^2+Ax+B\mid x\in Z\}$ 与 $M_2=\{2x^2+2x+C\mid x\in Z\}$ 不交．

【题说】第三十六届（1995 年）IMO 预选题．

【证】$2x^2+2x+C\equiv C\pmod 4$

若 A 为奇数，则

$$y^2+Ay\equiv y^2+y\equiv 0\pmod 2$$

即 $y^2+Ay+B\pmod 4$ 仅有两类．

若 A 为偶数．则 y 为偶数时，$y^2+Ay\equiv 0\pmod 4$，y 为奇数时，$y^2+Ay\equiv 1+4\pmod 4$．即 $y^2+Ay+B\pmod 4$ 仍仅两类．

因此，可取 C 不属于以上两类（mod 4），这时 M_1，M_2 无公共元素．

E1-023　k 为正整数，证明存在无限多个形如 $n\cdot 2^k-7$ 的平方数，这里 n 是正整数．

【题说】第三十六届（1995 年）IMO 预选题．

【证】对 k=1，2，3，取 $m=1+4l$，l 为正奇数，则

$$m^2+7\equiv 0\pmod{2^4}$$

对 $k\ge 3$，设有正整数 m，满足

$$m^2+7\equiv 0\pmod{2^{k+1}} \qquad (1)$$

显然 m 为奇数．对任意正整数 a，

$$(m+a\cdot 2^k)^2+7\equiv m^2+7+2^{k+1}ma=2^{k+1}(b+ma)\pmod{2^{k+2}}$$

其中 $b=\frac{m^2+7}{2^{k+1}}$ 是整数。

取 a 与 b 的奇偶性相同，则

$$(m+a\cdot 2^k)2+7\equiv 0\pmod{2^{k+2}}$$

因此，对任意正整数 k，均有无穷多个 m 满足（1），即有无穷多个正整数 n，使 $n\cdot 2^k-7$ 为平方数 m^2．

E1-024　是否存在这样的有限非零实数集合 M，使得对任意的自然数 n，总可求得以 M 中的数为系数．且次数不低于 n 的多项式，它的所有

实根也属于集合 M？

【题说】第二十二届（1996 年）全俄数学奥林匹克十一年级题 7．

【解】设存在满足要求的集合 M= $\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$．记 $a=\min\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_m|\}$，$A=\max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_m|\}$，显然 A≥a＞0．

考察多项式

$$p(x)=b_kx^k+b_{k-1}\cdot x^{k-1}+\cdots+b_1x+b_0$$

它的系数 b_0，b_1，…，b_k 及根 x_1，x_2，…，x_k 均属于集合 M．

由韦达定理，有

$$x_1+x_2+\cdots+x_k=-\frac{b_{k-1}}{b_k}$$

$$x_1x_2+\cdots+x_1x_k+x_2x_3+\cdots+x_{k-1}x_k=\frac{b_{k-2}}{b_k}$$

因此，
$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_k^2=\left(\frac{-b_{k-1}}{b_k}\right)^2-\frac{2b_{k-2}}{b_k}$$

于是
$$ka^2\le x_1^2+x_2^2+\cdots+x_k^2=\frac{b_{k-1}^2}{b_k^2}-\frac{2b_{k-2}}{b_k}\le\frac{A^2}{a^2}+\frac{2A}{a}$$

$$k\le\frac{A^2}{a^4}+\frac{2A}{a^3}=C$$

这说明多项式的次数不可能大于 C，矛盾．因此，满足题设条件的集合 M 不存在．

E1-025　确定（并证明）是否有整数集的子集 X 具有下面的性质：对任意整数 n，恰有一组 a、b∈X，使 a+2b=n．

【题说】第二十五届（1996 年）美国数学奥林匹克题 6．

【解】这样的 X 存在．首先令 $X_2=\{0,1\}$．假设已有 $X_k=\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$，使得 a_1+2a_j（$1\le i, j\le k$）互不相同．令 $S_k=\{a_i+2a_j \mid 1\le i, j\le k\}$．对任一不属于 S_k 的整数 n，取正整数 a_{k+1}，又令 $a_{k+2}=-2a_{k+1}+n$．

只要 a_{k+1} 充分大，对 1≤i，j，s，t≤k，有 $3a_{k+1}>a_s+2a_{k+1}>a_{k+1}+2a_i>n>a_{k+2}+2a_j>a_{k+1}+2a_{k+2}>a_t+2a_{k+2}>3a_{k+2}$，而且 $a_{k+1}+2a_i$ 大于 S_k 中一切正数，$a_{k+2}+2a_j$ 小于 S_k 中一切负数．于是，对

$$X_{k+2}=\{a_{k+1}, a_{k+2}\}\cup X_k$$

中任二数 a、b，a+2b）互不相同．

令
$$X=X_2\cup X_4\cup\cdots\cup X_{2k}\cup_{2k+2}\cup\cdots$$

则 X 满足要求．

E1-026　求证存在无穷多个自然数 n，使得可将 3n 个数 1，2，…，3n 列成数表

$$\begin{matrix} a_1 & a_2\cdots a_n \\ b_1 & b_2\cdots\ b_n \\ c_1 & c_2\cdots\ c_n \end{matrix}$$

满足条件：

（1）$a_1+b_1+c_1=a_2+b_2+c_2=\cdots=a_n+b_n+c_n$，且为 6 的倍数；

（2）$a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$，且为 6 的倍数．

【题说】1997 年中国数学奥林匹克题 3．

【解】设 n=12h-3，h 为任一自然数，则在 1，2，…，3n 能排成 3×n 的矩阵使每行和都相等，每列和都相等时，每行的和为

$$\frac{1}{3}(1+2+\cdots+3n)=\frac{1}{3}\cdot\frac{(1+3n)3n}{2}=(9h-2)\cdot 2n$$

每列的和为

$$\frac{1}{n}(1+2+\cdots+3n)=6(9h-2)$$

均被 6 整除．因此只要证明能排成上述矩阵．

更一般地，我们证明对奇数 m=2k+1，9m 个数 1，2，…，9m 总可以排成 3×3m 的矩阵使行和都相等，列和也都相等．

首先将这些数排列如下：

8　1　6	第一方块	第一方块	第一方块
3　5　7	第个数+9	每个数+18	每个数
4　9　2			+2k×9

这时行和已经相等．考虑第 1，4，7，…，3m-2 列．为方便起见，将这些列写成

$$\begin{matrix}0 & 1 & 2 & \cdots & 2k \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2k \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2k\end{matrix}\quad \left(\text{每列应乘9再加上}\begin{pmatrix}8\\3\\4\end{pmatrix}\right)$$

将它调整为

$$\begin{matrix}0 & 1 & 2 & \cdots & 2k-2 & 2k-1 & 2k \\ k & 2k & k-1 & \cdots & 1 & k+1 & 0 \\ 2k & k-1 & 2k-1 & \cdots & k+1 & 0 & k\end{matrix}$$

（第二行自右向左先写 0，间隔一个写 1，…，写到 k 再回到右边写 k+1，k+2，…，2k．第三行则自右边第二个位置写起．）

不难验证此时各列和相等（均为 8+3+4+3k×9）．对第 2，5，8，…，3m-1 列以及第 3，6，9，…，3m 列用同样方法调整，便得到行和都相等，列和也都相等的矩阵．

E1-027　设非负整数 a_1，a_2，…，a_{1997} 满足

$$a_i+a_j\leq a_{i+j}\leq a_i+a_j+1$$

（1≤i，j，i≤1997）证明存在实数 x，对所有 1≤n≤1997，满足 $a_n=[nx]$．

【题说】　第二十六届（1997 年）美国数学奥林匹克题 6．

【解】　我们证明对任意不超过 1997 的自然数 m，n

$$ma_n+m>na_m \qquad (1)$$

在 m=n 时（1）显然成立．在 m=2，n=1 或 m=1，n=2 时，（1）也显

然成立．假设在 m、n 都小于 k（3≤k≤1997）时，（1）成立．考虑 m、n 中较大的为 k 的情况．

若 m=k，设 m=qn+r，q 为自然数，0≤r≤n．由已知

$$a_m \le a_{qn}+a_r+1 \le a_{(q-1)n}+a_n+a_{r+2} \le \cdots$$
$$\le a_n+(q-1)a_n+a_r+q=qa_n+a_r+q$$

于是利用归纳假设 $ra_n+r>na_r$ 便有

$$na_m \le nqa_n+na_r+nq$$
$$=ma_n+m-(ra_n-na_r+r)$$
$$<ma_n+m$$

若 n=k，设 n=qm+r，q 为自然数，0≤r<m．由已知

$$a_n \ge a_{qm}+a_r \ge a_{(q-1)m}+a_m+a_r \ge \cdots \ge qa_m+a_r$$

于是利用归纳假设 $ma_r+m>ra_m$ 便有

$$ma_n+m \ge mqa_m+ma_r+m$$
$$=na_m+ma_r+m-ra_m$$
$$>na_m$$

因此恒有（1）成立，即

$$\frac{a_n+1}{n}>\frac{a_m}{m}$$

取 $x=\max\limits_{1\le m\le 1997}\frac{a_m}{m}$，则对任一自然数 $1\le n\le 1997$，

$$\frac{a_n}{n}\le x\le\frac{a_n+1}{n}$$

即 $[nx]=a_n$．

E1-028　图 a 是由 16 条线段组成的图形，证明不能画出一条折线，它和图中每条线段都相交一次（这条折线可以是开的，可以是自身相交的，但折线的顶点不能在线段上，而折线的边也不能通过线段的公共端点）．

【题说】　1961 年全俄数学奥林匹克八年级题 1．

【证】　原图有 6 个区域 A、B、C、D、E、F 可以看作 6 个点（图 b）．如果所说的折线存在，每一段折线就是连结 A、B、C、C、D、E、F 中某两点的边（边 AB 表明这段折线的端点为 A、B），区域 A 的边界被分为五段，即点 A 引出 5 条边，A 是奇顶点．同样，B、D、F 是奇顶点（分别引出 5、5、9 条边）．有 4 个奇顶点的图不能一笔画成．因此所说的折线不存在．

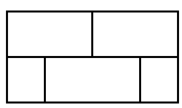


图 a

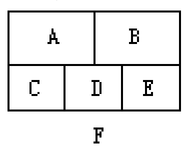


图 b

E1-029　已知平面上有 2n+3（n≥1）个点，其中没有三个点共线，也没有四个点共圆，能不能通过它们之中的某三个点作一个圆，使得其余的 2n 个点一半在圆内，一半在圆外？证明你的结论．

【题说】　1963 年北京市赛高三二试题 3．

【证】　结论是肯定的．

首先在 2n+3 个点之中一定可以找到 A、B 两点，使得其余 2n+1 个点在直线 AB 的一侧，事实上，按任意选定方向，通过每一个已知点作一条直线，这样的直线最多有 2n+3 条，其中有一条最靠外的令为 l_1．若 l_1 上有两个已知点，则 l_1 为所求的直线；若 l_1 上只有一个已知点 A，由 A 出发通过其余 2n+2 个点作射线．设其中射线 AB 与 l_1 的夹角最小，则直线 AB 即为所求．

线段 AB 对其余 2n+1 个点的张角各不相等（因为这 2n+3 个点中没有四点共圆），设为 $\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_n<\theta_{n+1}<\cdots<\theta_{2n}<\theta_{2n+1}$，对应于 θ_{n+1} 的点为 C，则圆 ABC 即为所求．对应于 θ_1，θ_2，…，θ_n 的 n 个点在圆 ABC 外，对应于 θ_{n+2}，θ_{n+3}，…，θ_{2n+1} 的 n 个点在圆 ABC 之内．

E1-030　设在一环形公路上有 n 个汽车站，每一站存有汽油若干桶（其中有的站也可以不存），n 个站的总存油量足够一辆汽车沿此公路行驶一周．现在使一辆原来没油的汽车从某站依反时针方向沿公路行驶；每到一站即把该站的存油全部带上（出发的站也如此），试证 n 站之中至少有一站，可以使汽车从这站出发环行一周，不致在中途因缺油而停车．

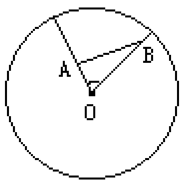
【题说】　1964 年北京市赛高三二试题 3．

【证】　设这 n 个站依次（逆时针顺序）为 A_1，A_2，…，A_n，并且每个站都存有油（否则可将该站取消）．

当 n=1 时，显然从唯一的汽车站出发可走完全程．

设对 n=k 时，结论成立．在 n=k+1 时，由已知条件总油量足够汽车行驶一周，A_1，A_2，…，A_n 中必有一个站 A_i，从它出发可以行驶到下一站 A_{i+1}（$1\leq i\leq nA_{n+1}=A_1$）．将 A_{i+1} 的油全部移到 A_i 并取消 A_{i+1} 站，则由归纳假设，存在站 A_j，由它出发可以行驶一周．由于在行驶中，先到 A_i 后到 A_{i+1}，所以恢复 A_{i+1} 站后，从站 A_j 出发仍可以行驶一周．因此结论对一切自然数 n 均成立．

E1-031　在圆内或圆上任取 8 个点．证明：在这 8 个点中，必有两个点的距离小于圆的半径．



【题说】　1965 年匈牙利数学奥林匹克题 2．

【证】　在所取的 8 个点中至少有 7 个点不和圆心重合．如果有某两个点在同一条半径上，那么这两点的距离显然不小于圆的半径．

设不和圆心重合的 7 个点在 7 条不同的半径上．每相邻两条半径构成一个圆心角，7 个圆心角合成周角．因此必有两点 A、B 使∠AOB＜60°．在△OAB 中，最大边大于边 AB（因为一角大于 60°）．但是边 OA 和 OB 都不超过圆的半径，所以 AB 小于圆的半径．

E1-032　一个旅游者乘火车到莫斯科，他在街上逛了一整天，在广

场上一个小吃店里吃了晚饭后，决定回火车站．证明：他一定可以沿着来时走过奇数次的街道回火车站．

【题说】 1965 年全俄数学奥林匹克十年级题 3．

【证】 将交叉口当作点，交叉口之间的街道当作边，除车站与广场外，每一个点都是偶顶点，即引出偶数条边（走过 k 次的边算作 k 条）．

旅游者沿原路退回．在每一点处面临奇数条边，其中必有一条边他来时只走过奇数次，沿这条边前进．这样继续下去，由于边数有限，必在某一点停止，这点就是火车站．

E1-033 在无限大的方格纸上，有 n 个方格涂成黑色．证明：一定可以剪掉有限个正方形，满足以下两个条件：

1．所有的黑色方格全部在被剪掉的正方形之中．

2．在任何一个被剪掉的正方形中，黑色方格的面积不小于这个正方形面积的$\frac{1}{5}$，同时不大于这个正方形面积的$\frac{4}{5}$．

【题说】 第五届（1971 年）全苏数学奥林匹克九年级题 8．

【证】 从平面上剪掉一个 $2^n\times 2^n$ 的正方形 k_0，它含有所有黑色方格和至少比它多 4 倍的白色方格．于是，所有黑方格的面积小于正方形k_0面积的$\frac{1}{5}$，将k_0剪成四个$2^{n-1}\times 2^{n-1}$的正方形k_i．每个k_i中，所有黑方格的面积不大于k_i的$\frac{1}{5}$，若某个k_1中所有黑方格的面积小于k_1的$\frac{4}{5}$，则将它再剪成四个正方形 k_2，等等，直到得到一些 2×2 的正方形，将所有不含黑色方格的正方形去掉，则剩下的正方形满足题给要求．

E1-034 1．假定一个 4×7 方格的棋盘，如图 a 所示，各个方格着色为黑或白．求证：对任何一种着色方式，在棋盘中必定包含一个由棋盘上横线和纵线所构成的矩形，它的四角上的方格同色．

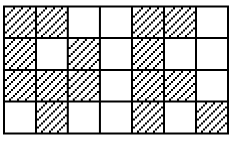
2．给出一个 4×6 方格的棋盘上的一种黑白着色，使得在棋盘内每一个如上所说的矩形中，四角上的方格都不是同色的．

【题说】 第五届（1976 年）美国数学奥林匹克题 1．题中所说“矩形”，应理解成由平行于棋盘中横线与纵线的线段为四边的矩形，其顶点不与格点重合．

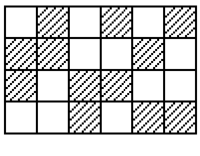
【证】 1．可以证明更强的结论：在 3×7 的棋盘内，存在四角同色的矩形．

第一行的 7 个方格中至少有四个同色．不妨设前 4 个方格均为白色．第二行（或第三行）的前 4 个方格中如果有两个白格，那么结论已经成立．如果第二行、第三行的前 4 个方格中均只有 1 个白格，那么去掉白格所在的列便得到四角同为黑色的矩形．

2．图 b 即为所求．



图a



图b

E1-035　线段 AB 的两个端点，一个标以红色，一个标以蓝色．在线段中间插入 n 个分点，在各个分点上随意地标上红色或蓝色，这样就把原线段分为 n+1 个不重叠的小线段．这些小线段的两端颜色不同者叫做标准线段．证明：标准线段的个数都是奇数．

【题说】　1979 年安徽省赛二试题 2．

【证】　从 A 到 B，经过 n 个分点，颜色改变奇数次，每改变 1 次颜色，即有 1 条标准线段，因此标准线段的条数为奇数．

E1-036　一棱柱以五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 与 $B_1B_2B_3B_4B_5$ 为上、下底，这两个多边形的每一条边及每一条线段 A_iB_j（i，j=1，2，3，4，5）分别涂上红色或绿色．若每一个以棱柱顶点为顶点的、以已涂色的线段为边的三角形均有两条边颜色不同．证明上、下底 10 条边颜色一定相同．

【题说】　第二十一届（1979 年）国际数学奥林匹克题 2．本题由保加利亚提供．

【证】　首先我们证明上底的五条边颜色完全相同．

如果上底的五条边颜色不完全相同，那么必有两条相邻的边颜色不同，不妨设 A_1A_2 是绿的，A_1A_5 是红的．

自 A_1 引出五条线段 A_1B_1、A_1B_2、A_1A_3、A_1A_4、A_1A_5 中，至少有三条有相同的颜色，这三条线段的端点 B_j 中必有两个相邻，不妨设 A_1B_1，A_1B_2 均为绿色，那么 B_1B_2 必为红色，但$\triangle B_1A_1A_2$ 推出 A_2B_1 为红色，由$\triangle B_2A_1A_2$ 推出 A_2B_2 也为红色，这时得$\triangle A_2B_1B_2$ 的三条边都是红色的，与已知条件矛盾．这就证明了上底的五条边的颜色必相同．

同理可证下底的五条边的颜色也相同．

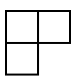
现在来证明，上、下底的颜色必须是同样的．

若不然，上、下底的颜色不同，不妨设上底的五条边全是绿色，下底的五条边全为红色．

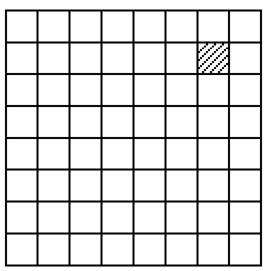
前述中设 A_1B_1、A_1B_2 颜色相同，由于 B_1B_2 是红色的，A_1B、A_1B_2 都必须是绿色的．与前面的证明完全一样，△B1A1A2、△B2A1A2、$\triangle A_2B_1B_2$ 中必有一个三条边是同一颜色的三角形．而与已知条件矛盾．

所以，上、下底 10 条边颜色一定相同．

E1-037　试证在 $2^n\times2^n$（$n\in N$）个相等小方格组成的棋盘上任意挖去一个小方格后，总可以由三个小方格构成的 L 形块恰好铺满（既不重叠，也不越界）．



图a



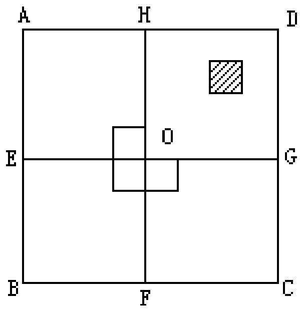
图b

【题说】　1981 年上海市赛二试题 2．

【证】　用数学归纳法，（1）当 n=1 时（图 a），命题显然真．（2）

设当 n=k 时（图 b），命题真，则当 n=k+1 时，把挖去一个小方格的 $2^{k+1}\times 2^{k+1}$ 棋盘 ABCD 四等分得四个 $2^k\times 2^k$ 棋盘 AEOH、EBFO、OFCG、GDHO，其中必有一个是挖去一个小方格的棋盘，设为 GDHO．现将一个 L 形块放在 O 处（图 c），使它在 AEOH、EBFO、OFCG 各占一格，则这四个 $2^k\times 2^k$ 的棋盘都成了挖去一个小方格的棋盘了，根据归纳假设它们都能被 L 形块恰好铺满．

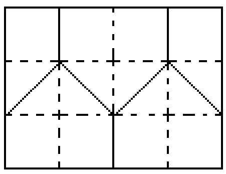
由（1）、（2）得，对一切自然数 n 命题真．



图c

E1-038　在 3×4cm 的长方形中，放置 6 个点．试证：可以找到两点，其相距不大于$\sqrt{5}$cm．

【题说】　第十五届（1981 年）全苏数学奥林匹克十年级题 6．



【证】　先把长方形分成 5 个区域（如图），根据抽屉原理，必有两个点在同一个区域（包括边界）．因而它们的距离不超过$\sqrt{5}$cm．

E1-039　已知平面上两个不同的点 O 和 A，对于平面上不同于 O 的每一点 X，由 OA 按逆时针方向到 OX 的角的弧度数用 a（X）表示（0≤a（X）＜2π），设 C（X）是以 O 为圆心，以 OX+a（X）／OX 的长为半径的圆．平面的每一个点用有限多的颜色之一来着色，证明存在一个点 Y，a（Y）＞0．它的颜色出现在圆 C（Y）的圆周上．

【题说】　第二十五届（1984 年）国际数学奥林匹克题 3．

【证】　以 O 为心，半径小于 1 的圆有无限多个，而圆上所染颜色的种数（n 种颜色的子集）至多为 2^n-1，所以必有两个圆的颜色的种数相同，设它们的半径为 r、s，r＜s＜1．

显然 r（s-r）∈（0，2π）．⊙（0，r）上以 r（s-r）为幅角的点 Y，它的颜色出现在⊙（0，s）上．而

$$r+\frac{r(s-r)}{r}=S$$

所以⊙（0，S）即圆 C（Y），命题成立．

E1-040　已知空间有 1987 个点．证明：可以经过其中某点作一个平面，使得其两侧各有 993 个点．

【题说】　第十三届（1987 年）全俄数学奥林匹克十年级题 4．

【证】　过每两个已知点作一条直线．我们证明存在一个平面，不

平行于这有限多条直线中的任何一条．事实上，任取一点 O，过 O 作直线分别与上述直线平行，再过 O 作一条直线 OA 与它们均不相同，则在过 OA 的平面中，只有有限多个含有其它所作的直线．因此有一个过 OA 的平面 α 不含其它所作的直线，即不平行于上述直线中的任何一条．

过已知的 1987 个点，分别作平面 α 的平行平面．由平面 α 的上述性质，所作的平面都仅含一个已知点．顺次数过去，这 1987 个平行平面中，第 994 个平面即为所求．

E1-041　设在空间给出 20 个点，其中某些点涂黄色，其余点涂红色．已知在任何一个平面上同色点不超过 3 个．求证：存在一个四面体，它的四个顶点同色，且至少有一个侧面内不含异色点．

【题说】　第一届（1990）希望杯高一赛二试题 4．

【证】　20 个点分为两色，其中必有四点同色．由已知，它们不在一个平面上，因而组成一个四面体．这种四个顶点同色的四面体仅有有限多个，设其中以 V 的体积为最小．

若 V 的每个侧面均含一个与顶点异色的点，则这四点组成一个体积小于 V 的四面体，这是不可能的．因此 V 至少有一个侧面不含与顶点异色的点．

E1-042 设圆周上给定 1991 个点，其中任二点不共有一条直径，证明其中存在一个点．过它所作的直径，将其余 1990 个点恰好平分在两个半圆上．

【题说】　1991 年芜湖市赛题 5．

【证】　设已知点为 A_1，A_2，…，A_{1991}（依逆时针次序）．若（含 A_{i+1} 的）$\overset{\frown}{A_iA_{i+996}}$是劣弧，则将 A_i 染成红色，否则染成黄色（i=1，2，…，1991；$A_{i+1991}=A_i$）．

不妨设 A_1 是红色（若$\overset{\frown}{A_1A_2A_{997}}$是优弧，则将逆时针次序改为顺时针次序，$A_{1991}$、$A_{1990}$、…改为 A_2、A_3、…．这时$\overset{\frown}{A_1A_2A_{997}}$即原来的$\overset{\frown}{A_1A_{1991}A_{997}}$，是劣弧）．因为$\overset{\frown}{A_{997}A_1A_2}$是优弧，所以 A_{997} 是黄色．不失一般性，假设 A_2 是 A_1、A_2、…、A_{997} 中第一个黄点．过 A_2 作直径，则 A_3、A_4、…、A_{997} 这 995 个点在一个半圆上，A_{998}，A_{999}，…，A_1 在另一个半圆上．

E1-043　给定 11×12 的矩形，证明该矩形

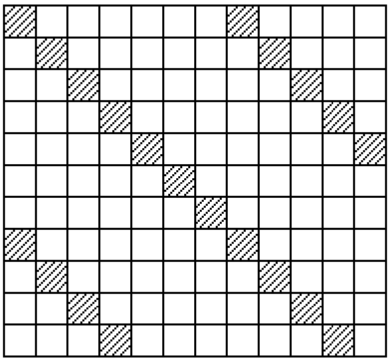
1．可由 1×6 和 1×7 的矩形共 20 块拼成；

2．不能由 19 块上述矩形拼成．

【题说】　第十七届（1991 年）全俄数学奥林匹克十年级题 6．

【证】　1．将 11×12 矩形分成两部分：7×12 可由 12 块 1×7 矩形拼成；4×12 可由 8 块 1×6 矩形拼铺而成．

2．每块 1×6 或 1×7 的矩形只能覆盖图中不多于 1 个有阴影的小方格．这就是说 19 块小矩形充其量只能覆盖 19 个有阴影的格，因而它们也就无法拼成大矩形．



E1-044　设 G 是一个有 k 条边的连通图．求证：可以将 G 的边标号为 1，2，…，k，使得在每一个属于两条或更多条边的顶点，过该顶点各条边的标号数的最大公因子是 1．

【题说】　第三十二届（1991 年）国际数学奥林匹克题 4．本题由美国提供．

【证】　由 G 的连通性可知 G 中的每一个顶点至少属于一条边．任取一顶点 V_0 从 V_0 出发沿 G 中的边行走，每条边至多能通过一次，但每个顶点可通过多次．设通过 t_1 条边后不可能再继续前进．通过的顶点依次记为 V_0，V_1，V_2，…，V_i，…，V_j，…，V_{t1}（注意不同的 $0\le i$，$j\le t_1$，V_i、V_j 可能为同一顶点），通过的边依次标号为 1，2，…，t_1．显然 $1\le t_1\le k$ 且除顶点 V_0，其余任一顶点，如果从它出发有两条或更多条边被标了号，则这些标号数必有两个相邻的自然数．

如果 $t_1=k$，则所有的边均已被标号．如果 $1\le t_1<k$，那么 V_0，V_1，…，V_{t1} 中必有一点从该顶点有尚未标过号的边（否则 G 不连通）．从这一顶点出发按上述规则沿未标过号的边行走，并从 t_1+1 开始依次标号，直到不可能继续前进．设又标了 t_2 条边，则 $1\le t_2\le k-t_1$．由于总共有 k 条边，于是易知用这种方法可将 G 的所有边标号为 1，2，…，k．

任取 G 的一顶点 V，设从 V 出发至少有两条边．如果 $V=V_0$，由于从 V 出发的一条边标号为 1，从而过该点各边的标号数的最大公因子为 1；如果 $V\ne V_0$，由以上标数的方法可知，过 V 必有两条边的标号数是相邻的两个自然数，从而过该点各条边的标号数的最大公因子也是 1．

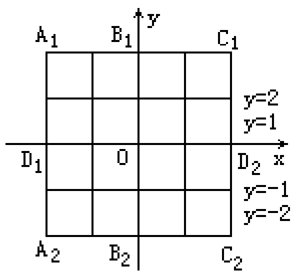
E1-045　在平面直角坐标系中，横坐标和纵坐标都是整数的点称为格点，任取 6 个格点 P_i（x_1，y_1）（i=1，2，…，6）满足

（1）$|x_i|\le 2$，$|y_i|\le 2$（i=1，2，…，6）；

（2）任何三点不在同一条直线上．

试证：在以 P_i（i=1，2，…，6）为顶点的所有三角形中，必有一个三角形，其面积≤2．

【题说】　1992 年全国联赛二试题 3．



【证】　用反证法．设所有三角形面积都＞2．

在 y=-1 与 y=-2 上最多只能有 2 个 P_i；因为如有 3 点，则它们所成三角形的面积≤$\frac{1}{2}\times1\times4=2$．同样，在$y=0$，$y=1$上也最多只有两点．

因此，在 y=2 上至少有两点，因为（2），这直线上恰有两个 P_i．

同理可推得在 y=-2、x=2、x=-2 上也各有两个 P_i，并且 y=1，y=-1，x=1，x=-1 上没有 P_i．若 y=2 上的两点为 A_1、B_1，则 x 轴上不能有 P_i，但其余 4 个 P_i 不能都在 y=-2 上，所以 y=2 上的两点不能为 A_1、B_1．同样也不能为 B_1、C_1．即只能为 A_1、C_1．类似地，在 y=-2，x=2，x=-2 上的点不能为 B_2、D_1、D_2．这样，P_i 只可能为 A_1、A_2、B_1、B_2 及 O 五个点，矛盾．因此本题结论成立．

E1-046　P_1，P_2…P_{1992} 是三维空间中的不同的点，使得每三个不同的点构成的三角形 $P_iP_jP_k$ 至少有一边的长度小于 1cm．证明：存在半径都为 1cm 的球 S_1，S_2，使得这 1992 个点都在 S_1 或 S_2 内．

【题说】　1992 年澳大利亚数学奥林匹克题 7．

【证】　不妨设$d=P_1P_2=\max\limits_{1\le i<j\le 1992}P_iP_j$，$S_1$、$S_2$分别是以$P_1$、$P_2$为球心，半径为 1cm 的球．若 d＜1，则这 1992 个点均在 S_1 内；若 d≥1，则在△$P_iP_1P_2$（3≤i≤1992）中，P_iP_1 与 P_iP_2 中至少有一个小于 1，即 P_i 在 S_1 或 S_2 内．

E1-047　设 P_1，P_2，…，$P_{1993}=P_0$ 为 xy 平面上不同的点，具有以下性质：

（1）P_i 的坐标均为整数，i=1，2，…，1993；

（2）在线段 P_iP_{i+1} 上没有其它的点，坐标均为整数，i=0，1，2，…，1992．

求证：对某个 i，0≤i≤1992，在线段 P_iP_{i+1} 上有一点 Q（q_x，q_y），使得 $2q_x$、$2q_y$ 均为奇整数．

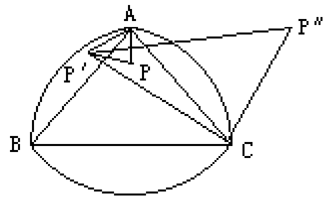
【题说】　1993 年亚太地区数学奥林匹克题 5．

【证】　假设这样的点 Q 不存在．设 P_i 坐标为（x_i，y_i），则 x_{i+1} 与 x_i 奇偶性相同，y_i+1 与 y_i 奇偶性也相同时，线段 P_iP_{i+1} 的中点 M 为整点，与已知（2）矛盾．x_{i+1} 与 x_i 奇偶性不同，y_{i+1} 与 y_i 奇偶性也不同时，中点 M 成为合乎要求的点 Q，与上面的假设矛盾．因此 x_{i+1} 与 x_i 的奇偶性相同时，y_{i+1} 与 y_i 的奇偶性不同；x_{i+1} 与 x_i 的奇偶性不同时，y_{i+1} 与

y_i 的奇偶性相同．即 x_i+y_i 与 $x_{i+1}+y_{i+1}$ 的奇偶性不同．所以 x_0+y_0，x_1+y_1，…，$x_{1993}+y_{1993}$ 中，奇偶交错，从而 x_0+y_0 与 $x_{1993}+y_{1993}$ 奇偶不同．但 $x_{1993}+y_{1993}$ 即 x_0+y_0．这矛盾表明本题结论成立．

E1-048　平面上有限点集 M 满足：对 M 中任意两点 A、B，必存在第三点 C，使△ABC 为正三角形，求 M 中元素个数的最大值．

【题说】　1993 年德国数学奥林匹克（第一轮）题 2．



【解】　不妨设 AB 为 M 中两点间的距离之最大者，且△ABC 为正三角形．于是 M 中的点均在如图所示的曲边三角形 ABC 中．若 M 中有异于 A，B，C 的点 P，则正三角形 APP′的顶点 P，P′不可能都在△ABC 内部．不妨设 P′在 AB 边与 $\overset{\frown}{AB}$ 构成的弓形内（或边界上），连 CP′，则正三角形 CP′P″的顶点 P″若与 A 在 CP′的同侧，则∠P″AC=∠P′BC＞60°，所以 P″在曲边三角形 ABC 外，矛盾．若 P″与 B 在 CP′的同侧，同样可推得矛盾．

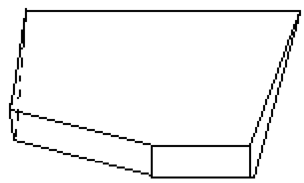
故 M 中元素个数的最大值为 3．

E1-049　一个正九边形各顶点分别染上红、绿两色，任意三顶点确定一个三角形．若三顶点同色，则称此三角形为同色三角形．求证：必存在两个同色三角形，颜色相同且全等．

【题说】　1993 年德国数学奥林匹克（第二轮）题 1．

【证】　9 个顶点中至少有 5 个顶点同色，不妨设为红色．这 5 个顶点构成 $C_5^3=10$ 个红色三角形．把这个正九边形绕其中心 O 旋转 $\frac{2k\pi}{9}$，k=0，1，2，…，8．经 9 次旋转后红色顶点共生成 9×10=90 个红色三角形．而 9 个顶点共形成 $C_3^5=84$ 个三角形．于是这 90 个红色三角形中一定有两个，它们与 84 个三角形中的某一个都全等，即这两个红色三角形全等．

E1-050　试找出一个多面体，它的任何三个面的边数都不全相同．



【题说】　第五十七届（1994 年）莫斯科数学奥林匹克十一年级题 27．

【解】　这样的多面体的例子如图所示，它共有六个面，其中两个面为三角形，两个面为四边形，两个面为五边形．

E1-051　将平面上每个点都以红、蓝二色之一染色．证明存在这样两个相似三角形，它们的相似比为 1995，而且每一个三角形的顶点同色．

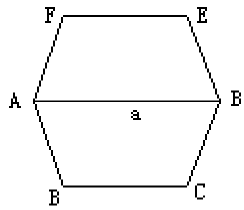
【题说】　1995 年全国联赛二试题 4．

【证】 先证：对任意正数 a，存在以 a 为斜边、一角为 60°的直角三角形顶点同色．事实上，以 a 为一边作正三角形，则其三个顶点中至少有两个同色．不妨设这两点为图中 A、D，它们同为红色．

再以 AD 为主对角线，作正六边形 ABCDEF．

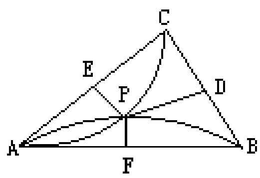
若 B、C、E、F 中有一点是红色，则它与 A、D 组成的三角形满足要求．若不然，则 Rt△BCE 符合要求．

取 $a_1=1$，$a_2=1995$，即得二顶点同色三角形，它们相似且相似比为 1995．



【别证】 以任一点 O 为圆心、分别以 1、1995 为半径作二同心圆．在小圆上至少有五点同色，设为 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，连结 OA_i，并延长交大圆于 B_i（i=1，2，3，4，5）．B_1～B_5 中至少有三点同色，不妨设为 B_1，B_2，B_3．则△$A_1A_2A_3$ 与△$B_1B_2B_3$ 合乎要求．

E1-052 证明：在锐角三角形内存在一点 P，使得 P 向各边所引垂线的垂足恰好是正三角形的三个顶点．



【题说】 1995 年城市数学联赛低年级较高水平题 1．

【证】 如图，在锐角△ABC 的边 AB、AC 上分别作弧$\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{AC}$，使弧所含的圆周角分别为

$$240°-\angle CAB-\angle ABC$$
$$240°-\angle CAB-\angle ACB$$

由于两个弧对应的圆周角的和=300°-∠CAB＞180°，所以，$\overset{\frown}{AB}$与$\overset{\frown}{AC}$的另一交点 P 在△ABC 内部．过 P 分别作△ABC 三边的垂线 PF、PD、PE．则 A、F、P、E 与 B、F、P、D 分别共圆，从而

$$\begin{aligned}\angle EFD&=\angle EFP+\angle PFD\\&=\angle EAP+\angle PBD\\&=\angle CAB-\angle PAB+\angle ABC-\angle PBA\\&=\angle CAB+\angle ABC-(180°-\angle APB)\\&=60°\end{aligned}$$

同理可知，∠DEF=60°，从而△EFD 为等边三角形．

E1-053 试确定所有整数 n＞3，使得在平面上存在 n 个点 A_1，A_2，…，A_n，并存在实数 r_1，r_2，…，r_n，满足以下条件：

（i）A_1，A_2，…，A_n 中任意三点都不在同一直线上；

（ii）对于每个三元组 i，j，k（1≤i＜j＜k≤n），三角形 $A_iA_jA_k$ 的面积等于 $r_i+r_j+r_k$．

【题说】 第三十六届（1995 年）国际数学奥林匹克题 3．

【解】 首先证明两个引理，并且在下面的讨论中，将△$A_iA_jA_k$ 的面积记为[ijk]．

引理 1 如果某个凸四边形的顶点为满足条件的四个点 A_i，A_j，A_k 和 A_l，那么相应的实数之间有以下关系

$$r_i+r_k=r_j+r_l$$

证 用两种方式将凸四边形 $A_iA_jA_kA_l$ 分成三角形，我们得到

$$[ijk]+[kli]=[jkl]+[lij]$$

因而

$$2r_i+r_j+2r_k+r_l=r_i+2r_j+r_k+2r_l$$

由此得：$r_i+r_k=r_j+r_l$．

引理 2 若有 5 个点 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5 适合条件，则相应的实数 r_1，r_2，r_3，r_4，r_5 中至少有两个相等．

证 这 5 个点凸包有三种可能情形．

（a）凸包是五边形．不妨设其顶点依次为 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5．于是 $A_1A_2A_3A_4$ 和 $A_1A_2A_3A_5$ 都是凸四边形．根据引理 1，

$$r_2+r_4=r_1+r_3=r_2+r_5$$

因而 $r_4=r_5$．

（b）凸包是四边形，其顶点依次为 A_1，A_2，A_3，A_4．不妨设另一点 A_5 在△$A_3A_4A_1$ 内．于是 $A_1A_2A_3A_4$ 和 $A_1A_2A_3A_5$ 都是凸四边形．同（a）中一样，我们得知 $r_4=r_5$．

（c）凸包是△$A_1A_2A_3$，另两点 A_4 和 A_5 在该三角形内，于是

$$[124]+[234]+[314]=[125]+[235]+[315]$$

由此得：$r_4=r_5$．

设 5 个点 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5 适合条件．由引理 2，可设 $r_4=r_5$．

如果 A_1，A_2，A_3 在直线 $_{A4}$A5 的同侧，那么由

$$[124]=[125]，[234]=[235]$$

得 A_1A_2∥A_4A_5，A_2A_3∥A_4A_5．

因而 A_1，A_2，A_3 这三点在同一条直线上，矛盾．

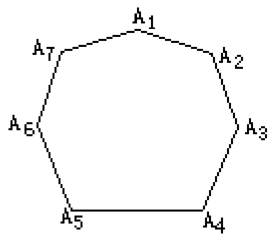
如果 A_1，A_2 在直线 A_4A_5 的同侧，而 A_3 在另一侧，那么由[124]=[125]可知 A_1A_2∥A_4A_5，因而[145]=[245]．由此得知 $r_1=r_2$．而此时 A_3，A_4，A_5 三点在直线 A_1A_2 的同一侧．仿照上面的讨论同样得出矛盾．

于是，n≤4．取 A_1，A_2，A_3，A_4 为单位正方形的四个顶点，并取

$$r_1=r_2=r_3=r_4=\frac{1}{6}$$

则（1），（2）均成立．所以 n=4．

E1-054　将平面上每个点都以红、蓝两色之一着色．证明：存在有两个内角分别为$\frac{2\pi}{7}$、$\frac{4\pi}{7}$，且夹边长为1996的三角形，其三个顶点同色．



【题说】　1996 年北京市中学生数学竞赛高一复试图 3．

【证】　任作一边长为 1996 的正七边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$．这七个顶点中必有四点同色，而在这同色四点中必有两点是相邻顶点，为确定起见，不妨设这两点就是 A_1，A_2，并且它们均为红色．

(1) A_4 或 A_6 中有一个是红色，比如 A_6 是红色，$\triangle A_1A_2A_6$ 即合要求．

(2) A_4 与 A_6 都是蓝色．若 A_7 是蓝色，$\triangle A_4A_6A_7$ 为所求；若 A_3 为蓝色，$\triangle A_3A_4A_6$ 为所求；若 A_3、A_7 皆为红色，则$\triangle A_1A_7A_3$ 为所求．

E1-055　某一天有若干读者去过图书馆．他们是单独去的，但是在任何三个读者中，至少有两个人这天在图书馆相遇．证明：一定可以找到这样两个时刻，使得在这一天到过图书馆的任何一个读者，至少在这两个时刻中的一个时刻是在图书馆的．

【题说】　1950 年匈牙利数学奥林匹克题 1．本题可以推广为：如果在任何 n 个读者中，至少有两个在图书馆相遇．那么，在这一天内有 n-1 个时刻，使得这天到过图书馆的读者，至少在其中某一个时刻是在图书馆的．

【证】　如果有一个读者，他最后一个入馆，第一个离馆，那么在他入馆和离馆的两个时刻，所有的入馆读者都在图书馆．如果 A 是第一个离馆者，B 是最后一个入馆者，A 不同于 B，那么 A 离馆的时刻和 B 入馆的时刻，正是我们欲求的两个时刻．事实上，如果 A、B 相遇，那么任一读者在上述时刻（及时刻之间）均在图书馆；如果 A，B 不相遇，那么任一读者 C 或与 A 相遇或与 B 相遇，即至少在一个时到，C 在图书馆．

E1-056　每一个参加循环赛的人和其余参加比赛的人都要比赛一次．已知任何一次比赛都没有出现平局．证明：可以找到这样的运动员，其他人或被他战胜，或被他胜过的人战胜．

【题说】　1954 年匈牙利数学奥林匹克题 3．

【证】　设赢的次数最多的是 A，那么 A 就是符合本题条件的运动员．因为除 A 本身外，其他的运动员要么被 A 所战胜，要么战胜了 A．战胜了 A 的运动员 B 至少被一个 A 的手下败将所战胜．不然的话，B 胜的次数多于 A，而这与 A 是赢的次数最多的运动员矛盾．

E1-057　在参观团的任意四个人中，有一个人认识其他三个人．证明：在任何四个团员中，总可以找到一个人，他认识所有的团员．

【题说】　1960 年匈牙利数学奥林匹克题 1．

【证】　依题意参观团的人数不少于 4．

参观团中必有两个人互不相识，否则结论显然．设 A 不认识 B．

在任意四个团员中必有两个不同于 A、B，设为 C、D．由已知 A、B、C、D 中有一人认识其它三个人，这个人当然不是 A 与 B．不妨设它为 C．C 认识 A、B、D．对 A、B、C、D 外的任一人 E，由于 A、B、C、E 中必有一个人认识其他三个人，因而 C、E 相识，即 C 认识所有团员．

E1-058　把 1600 颗花生，分给 100 只猴子．证明：不管怎么分．至少有 4 只猴子得到的花生一样多，并设计一种分法，使得没有 5 只猴子得到一样多的花生．

【题说】　1962 年北京市赛高二二试题 3．证题关键是从结论反面（没有四只猴子分得一样多的花生）下手．

【证】　如果没有 4 只猴子分得一样多的花生，花生颗数至少为

$$3\times(0+1+2+\cdots+32)+33=1617>1600$$

所以，至少有 4 只猴子分得的花生一样多．

使没有 5 只猴子分得一样多的花生的分法是很多的，例如：4 只得 0 颗，3 只得 1 颗，3 只得 2 颗，…，3 只得 31 颗，2 只得 32 颗，最后 1 只得 48 颗，花生总数恰好为

$$3\times(1+2+3+\cdots+32)-32+48=1600$$

E1-059　有 17 位科学家，其中每一人和其他所有人通信，他们通信中只讨论三个题目，且每两个科学家之间只讨论一个题目．求证：至少有三个科学家相互之间讨论同一个题目．

【题说】　第六届（1964 年）国际数学奥林匹克题 4．本题由匈牙利提供．

【证】　将科学家对应于点，两科学家之间讨论的题目对应两点连线的颜色，原题转化为：17 个点两两连边，边用红、蓝、白之一染色，每边一色．证明必存在同色三角形．

A_1 点引出的 16 条边，根据抽屉原则，其中至少有六条同色．不妨设六条边同为红色，另一端点分别为 A_2，A_3，…，A_4．再考虑这六个点两两连线的颜色，如果其中有一条为红色，则存在红色三角形；如果其中任一边都不是红色，那么只能是蓝、白两色．于是由 A_2 引出的 A_2A_3，…，A_2A_7、五条边至少有三条同色．不妨设 A_2A_3，A_2A_4，A_2A_5 同为蓝色，考虑 $\triangle A_3A_4A_5$ 的三边，若有一边为蓝，则存在蓝色三角形；若任一边都是白色，则 $\triangle A_3A_4A_5$ 为白色三角形，命题成立．

E1-060　大厅中聚会了 100 个客人，他们中每个都与其余客人中至少 67 人相识．证明：这些客人中一定可以找到 4 个客人，他们中任何两人都彼此相识．

【题说】　1966 年～1967 年波兰数学奥林匹克三试题 4．题中 100 与 67 可改为 n 与 $\left[\frac{2n}{3}\right]+1$．

【证】　客人 A 认识 67 名客人．设 B 为其中之一．B 不认识的人至多 99-67=32 人．所以在上述除去 B 的 66 名客人中，B 至少认识 66-32=34 人．设 C 为其中之一，则 C 至少认识除去 C 的 33 人中 33-32=1 人．设此人为 D，则 A、B、C、D 互相认识．

E1-061　为了统计到图书馆去的读者人数，挂了两块黑板．每一个读者必须在一块黑板上写上当他进入阅览室时他看见有多少读者，而在

另一块黑板上写上当他离开图书馆时，阅览室还剩下多少读者．证明：在一天之内，两块黑板上出现同样的数（可能次序不同）．

【题说】 1974 年匈牙利数学奥林匹克题 1．

【证】 设 A 是最后入馆的读者,A 进馆后第一个离馆的读者为 B.那么 A 在“进馆板”上写的数与 B 在“出馆板”上写的数相同．

如果B就是A,那么将A及他写的数取消对于结论是否成立毫无影响．

如果 B 不是 A，那么改为 A 离馆而 B 继续看书，直至原来 A 离馆时离馆．这对于两块板上写的数毫无影响，因而化为前一种情况．

于是，人数可以逐一减少，两块板上的数随之逐对抵消，直至只剩一个人时，结论显然成立．

E1-062 九位数学家在一次国际会议上相遇，其中任意三人中，至少有二人会说同一种语言．如果每位数学家最多只能说三种语言，试证明：至少有三位数学家能用同一种语言交谈．

【题说】 第七届（1978 年）美国数学奥林匹克题 5．

【证】 假设没有三人能讲同一种语言，即每种语言最多只两人能讲．用 A_1，A_2，…，A_9 表示这九人．因为 A_1 最多只能说三种语言，A_1 至多与三个人通话，即至少与五个人语言不通，设为 A_5，A_6，A_7，A_8，A_9．同理 A_5 至少与 A_6，A_7，A_8，A_9 中一人语言不通，设为 A_9 于是 A_1，A_5，A_9 彼此语言都不通．而这与已知矛盾．

E1-063 一个国际社团的成员来自六个国家，共有成员 1978 人．用 1，2，3，…，1977，1978 编号，请证明，该社团至少有一个成员的编号数，与他的两个同胞的编号数之和相等，或是一个同胞的编号数的二倍．

【题说】 第二十届（1978 年）国际数学奥林匹克题 6．本题由荷兰提供．

【证】 用反证法，若命题不成立，则有性质 S：同一国的两个成员的号码之差不是该国成员的号码．

由于$\frac{1978}{6}>329$，根据抽屉原则，必有一个国家A不少于330个成员．设 m_1 是 A 国成员的最大号码，用 m_1 减去其余 A 国成员的号码，得到不少于 329 个数，根据性质 S，它们都不是 A 国的号码，因而是其余五国的号码．由于$\frac{329}{5}>65$，由抽屉原则，必有一个国家B含有其中至少 66 个号码，记其中最大的为 m_2，用 m_2 减去其余 65 个号码，所得的 65 个号码都不是 B 的号码,也不是 A 的号码(对 a_1、$a_2\in A$，$(m_1-a_1)-(m_1-a_2)=a_1-a_2$ 不是 A 的号码）．

这 65 个号码必属于其余四国，其中必有一国 C 含有其中至少 17 个号码，等等．如此下去，最后会找到一个国家 F，其中有两个成员的号码之差不是任何一国成员的号码，这是不可能的，这个矛盾就说明题目的断言是正确的．

E1-064 任意一群人中，一定有两个人，他们在这群人中的朋友数一样多．

【题说】 1979 年安徽省集训题．

【解】 设这群人共有 n 个．如果每人至少有一位朋友，那么由于

每人最多有 n-1 位朋友，由抽屉原则，一定有两个人，他们有相同数目的朋友.如果恰有一人没有朋友，那么其它 n-1 个人的朋友数，最少是 1，最多是 n-2，同样可知有两个人的朋友一样多．如果有两个或更多个人没有朋友，则这几个人的朋友数都是 0．

E1-066　在 3×3×3 的立方体箱子中，用隔板分成 27 个 1×1×1 的单位立方体的小箱子，每一个小箱子中各放一个面包，现有一只老鼠从大箱子的一角开始吃起，然后咬通箱壁到相邻的未吃过的小箱子中吃面包（凡已吃过的小箱子就不再进去），试问它能够吃完所有小箱子中的面包、而在中心的一个小箱子中结束吗？

【题说】　1979 年安徽省集训题．

【解】　将小箱子染上黑白两色，使相邻两个小箱子的颜色不同，各个角都是黑色．黑色箱子 14 个，白色 13 个，并且中心的小箱子是白色．老鼠前进穿过的小箱子，黑色、白色相间，如果吃完 27 个，首尾都应当为黑色小箱子，所以最末一个不可能是中心的小箱子．

E1-066　某个团体有 n 个成员（n≥5），并且有 n+1 个三人委员会，其中没有两个委员会有完全相同的成员．证明：有两个委员会恰好有一个成员相同．

【题说】　第八届（1979 年）美国数学奥林匹克题 5．

【证】　用反证法．假设任两个（三人）委员会或者有两个成员相同，或者没有成员相同．

如果委员会 A 与 B 有公共成员，那么它们有两个公共成员 a、b．如果委员会 B 又与 C 有（两个）公共成员，那么 a、b 中至少有一个属于 C，从而 C 与 A 也有公共成员．因此可将有相同成员的委员会归为一组．这样同一组中每两个委员会有（两个）相同成员，不同组的委员会没有公共成员．

每一组中委员会的个数 k 必不超过这组中不同成员的人数 h．显然 h≥3．当 h=3 时，k=1．当 h≥4 时，k≥2．

设{x，y，a}、{x，y，b}} 是其中的两个委员会，则其它的委员会只能是{x，a，b}、{y，a，b}或{x，y，d}的形式，这里 d 至多有 h-4 种选择，所以 k≤4+（h-4）=h．

于是委员会的总数 n+1≤人数 n，矛盾．这表明，至少有两个委员会恰有一个成员相同．

E1-067　有一个十人的会，在他们当中任何三人至少有两人互不相识．证明在这会中有四人，他们没一人认识四人中的其他人．

【题说】　1980 年英国数学奥林匹克题 5．

【证】　将十个人表示为十个点，视对应的人相识或不相识而用红或蓝线段连结每对点．

已知所得的图中没有红色三角形，要证明图中有 4 个点，每两点之间的连线为蓝色．

第一种情况：至少有 4 条红线由 A 点引出．

设 AB、AC、AD、AE 为红线．由已知 B、C、D、E 中没有两点是用红线连结的，故 B、C、D、E 即为所求．

第二种情况：至多有 3 条红线由 A 点引出．

即 A 至少与 6 个点用蓝线相连，设为 B、C、D、E、F、G．若 B 用红

线连接 C、D、E、F、G 中 3 个点，不妨设为 C、D、E，则 A、C．D、E 即为所求．若 B 至多与 C、D、E、F、G 中 2 点用红线相连，则 B 至少与其中 3 点用蓝线相连，不妨设 BC、BD、BE 为蓝线．C、D、E 中至少一对用蓝线相连，例如 CD 是蓝线，则 A、B、C、D 即为所求．

E1-068　在由 18 个队参加的足球循环赛中，彼此之间已赛过 8 轮，即每个队都与 8 个不同的队进行过比赛．证明：一定能找出三个队彼此之间至今还没有进行过一次比赛．

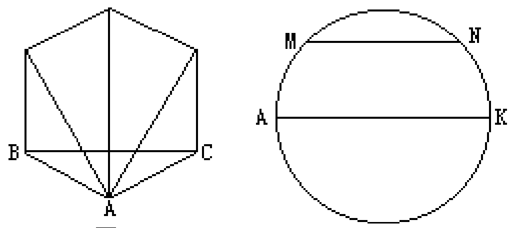
【题说】　第十五届（1981 年）全苏数学奥林匹克八年级题 7．

【证】　从某队 A 开始考虑，由已知在前八轮比赛中它与 8 个队比赛，与 9 个队未赛过．而在这未赛的 9 个队中一定有两个队彼此没有赛过．事实上，这 9 个队彼此间共有 $C_9^2=36$ 场比赛，而在每轮中他们之间的比赛最多只能安排 4 场（一个队轮空），故在前 8 轮中，最多只赛 32 场．所以一定有两队彼此没有赛过，设为 B、C．那么，A、B、C 三队在前 8 轮中彼此没有赛过一场．

E1-069　在正 n 边形中，要求其每条边及每条对角线都染上任一种颜色，使得这些线段中任意两条有公共点的染不同颜色．为此，至少要有几种颜色？

【题说】　第十九届（1985 年）全苏数学奥林匹克八年级题 4．

【解】　如图 a，考察正 n 边形的边 AB、AC，对角线 BC 以及由 A 引出的所有对角线，共有 n 条线段，其中每两条都有公共点．于是，它们必须染上不同的颜色，所以需要的颜色不少于 n 种．



图a　　图b

n=3 时，三种色显然足够．n＞3 时，作正 n 边形的外接圆 W，如图 b，设 MN 是另外一条边或对角线．若 MN∥BC，则将 MN 染上与 BC 相同的颜色，若 MN∦BC，过 A 引直线 t 平行于 MN，交圆 W 于点 K（t 不平行 BC，所以 t 不是切线），则 $\overset{\frown}{KN}=\overset{\frown}{AM}$，所以 K 也是正 n 边形的顶点，即 AK 是由 A 出发的边或对角线，将 MN 染上与 AK 相同的颜色．因此，n 种颜色足够．

E1-070　某足球邀请赛有十六个城市参加，每市派出甲、乙两个队．根据比赛规则，每两队之间至多赛一场，并且同一城市的两队之间不进行比赛．比赛若干天后进行统计，发现除 A 市甲队外，其它各队已比赛过的场数各不相同．问 A 市乙队已赛过多少场？请证明你的结论．

【题说】　1985 年全国联赛二试题 3．

【解】　32 个队参加比赛，根据规则，每队至多赛 30 场．除 A 市甲队外，31 个队比赛过的场数各不相同，因此这些队比赛场数分别为 0，1．2，…，30．

设赛过 k 场的队为 T（k）（k=0，1，2，…，30）．首先考察 T（30）．由于它已赛完 30 场，所以其它各市的每一个队都和它比赛过，只有 T（0）队未和 T（30）队比赛过．于是 T（30）队和 T（0）队必为同一城市的队．

再考察 T（29）队．除 T（0）队及 T（29）队同一城市的另一队外，T（29）队显然与其它各队都比赛过． T（1）队只和 T（30）队比赛过，所以 T（29）队和 T（1）队必为同一城市的队．

同理，T（28）队和 T（2）队，T（27）队和 T（3）队，…，T（16）队和 T（14）队各为同一城市的两队．所以 A 市乙队只能是 T（15）队．即：A 市乙队已赛过 15 场．

E1-071　n（＞3）名乒乓球选手单打比赛若干场后，任意两个选手已赛过的对手恰好都不完全相同，试证明，总可以从中去掉一名选手，而使在余下的选手中，任意两个选手已赛过的对手仍然都不完全相同．

【题说】　1987 年全国联赛二试题 3．

【证】　用英文字母表示选手，用 M_A 表示 A 的对手集，并假定 A 是赛过场次最多（若有并列的可任选一名）的选手．若命题不成立，则存在 B、C，使得去掉 A 后 B、C 的对手集相同．由于 $M_B \neq M_C$，所以 A 恰与 B、C 中一个赛过，不妨设 $B \in M_A$、$C \notin M_A$．

同样存在 D、E，$D \in M_C$、$E \notin M_C$，去掉 C 后，D、E 的对手集相同．因为 $A \notin M_C$，所以 D 不是 A；又 $D \in M_C$，所以 $D \in M_B$，即 $B \in M_D = M_E \cup \{C\}$，从而 $B \in M_E$．$C \notin M_E$，而去掉 A 后，B、C 的对手集相同，因此 E=A．

于是 $M_A = M_E = M_D \backslash \{C\}$，即 M_A 比 M_D 少一个元素 C，与 A 为赛过场次最多的假设矛盾．命题得证．

E1-072　一个俱乐部中有 3n+1 个人，每两个人可以玩网球、象棋或乒乓球，如果每个人都有 n 个人与他打网球，n 个人与他下棋，n 个人与他打乒乓球，证明俱乐部中有 3 个人，他们之间玩的游戏是三种俱全．

【题说】　1987 年匈牙利数学奥林匹克题 3．

【证】　将人看作平面上的点，得到一个有 3n+1 个点的图（假定任意三点都不在一直线上），当两个人玩网球或象棋或乒乓球时，我们就在相应的两点之间连一条红线或黄线或蓝线，需要证明的是，一定存在一个三条边的颜色互不相同的三角形．

自一点引出的 3n 条线段中，如果某两条线段的颜色不同，就称它们构成一个“异色角”．考虑异色角的个数．由于自每一点引出 n 条红线，n条蓝线，n条黄线，因此在每一点处有$C_3^2 n^2$个异色角，图中总共有$3n^2$（3n+1）个异色角．另一方面，图中共有C_{3n+1}^2个三角形．如果每个三角形都至多有两个异色角的话，那么异色角总共至多有$2C_{3n-1}^3$个．由于$3n^2$（3n+1）＞$2C_{3n+1}^2$，所以必有一个（至少一个）三角形中有 3 个异色角．这个三角形的三条边颜色互不相同，即相应的三个人之间玩的游戏是三种俱全．

E1-073　在一块平地上有 n 个人，对每个人，他到其他人的距离均不相同，每人都有一把水枪，当发出火警信号时，每人用枪击中距他最近的人，当 n 为奇数时，证明至少有一个人身上是干的．当 n 为偶数时，此结论是否正确？

【题说】　第十九届（1987 年）加拿大数学奥林匹克题 4．

【证】　设 n=2m-1，对 m 进行归纳，

m=1，结论显然正确．

假设 n=2k-1 时结论正确，对于 2k+1 个人，其中距离最近的两人设为 A、B．剩下的 2k-1 人中，依归纳假设，有一个人 C 身上是干的．因 AC＞AB，BC＞AB．故把 A、B 考虑进去时，C 身上仍是干的．

若 n 是偶数，则结论不成立．例如 n=2m 个人站成两排，同排两两相距均大于 1 米，前后两人相距 1 米．那么当火警信号发出后，前后两人互射，谁也免不了挨水枪．

E1-074　在星期天，有 7 个小孩他们每人都 3 次来到卖冰淇淋的售货亭．已知他们中每两人都在售货亭处相遇．证明：在某时刻，至少有 3 个小孩相遇在售货亭．

【题说】　第二十三届（1988 年）全苏数学奥林匹克八年级题 1．

【证】　用反证法．设每次相遇都不多于 2 个人，那么两两相遇应不少于$C_7^2=21$次．在第一次两人相遇时，有2人来到售货亭．以后每对相遇，至少有 1 人来到售货亭．因此，到售货亭来的，至少需 22 人次．但每个小孩只去售货亭 3 次，至多有 3×7=21 人次，矛盾．从而命题得证．

E1-075　在第一行中写有 19 个不超过 88 的自然数，第二行写有 88 个不超过 19 的自然数，我们将一行中的一个或数个相连的数称为一段．证明：可以从上述两行数中各选出一段来，使得这两段数的和相等．

【题说】　第二十二届（1988 年）全苏数学奥林匹克八年级题 4．

【证】　设 a_1，a_2，…，a_{19} 为第一行数；b_1，b_2，…，b_{88} 是第二行数．

记

$$A(i)=a_1+\cdots+a_i$$

$$B(i)=b_1+\cdots+b_i$$

假定

$$A(19)\geq B(88)$$

（对于 A（19）＜B（88）的情形可类似处理）对于每个 i，记

$$n_i=\min\{n;A(n)\geq B(i),1\leq n\leq 19\}$$

根据假设，这样的 n_i 是存在的．我们来考察 88 个差数 $A(n_i)-B(i)$．显然它们的值为整数，且都在 0 至 87 之间，这是因为

$$0\leq A(n_i)-B(i)=A(n_i-1)-B(i)+a_{n_i}<a_{n_i}\leq 88$$

如果这 88 个差数互不相同，则它们之中必有一个为 0，于是我们的命题获证．

否则，这 88 个差数中至少有某两个相等，不妨设

$$i_1=l,\ i_2=k,\ l<k$$

使得

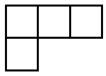
$$A(n_l)-B(l)=A(n_k)-B(k)$$

于是就有

$$A(n_l)-A(n_k)=B(l)-B(k)$$

这样$a_{n_{l+1}}$，…，a_{n_l}和b_{k+1}，…，b_l即为所求．

显然，题意中的 19、88 可以换成任意自然数．

E1-076　将 8×8 方格纸板的一角剪去一个 2×2 正方形，问余下的 60 个方格能否剪成 15 块形如  的小纸片？

【题说】 第四届（1989 年）东北三省数学邀请赛二试题 3．

【解】 如图 a，在余下的 60 个方格中填上 1 与-1，从左到右每列正负相间．显然任一块剪下的纸片中，四个数的和为 2 或-2．

若能剪成 15 块，设其中和为 2 的有 x 块，和为一 2 的有 y 块，则

$$\begin{cases} x+y=15 \\ 2x-2y=0 \end{cases}$$

这方程组的唯一解 x=y=15／2 不是整数，这就表明不可能剪成 15 块所述形状的纸片．

1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1		
1	-1	1	-1	1	-1		

图a

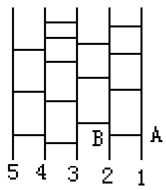
1		1		1		1	
-1		-1		-1		-1	
1		1		1		1	
-1		-1		-1		-1	
1		1		1		1	
-1		-1		-1		-1	
1		1		1			
-1		-1		-1			

图b

【别解】 若将小方格如图 b 填上 1 和-1，则任一块剪下的纸片中数字之和为 1 或-1．于是 15 块数字总和不为 0，但整个图 b 数字之和为 0．矛盾．

E1-077 有五只猴子和五个梯子．每个梯子的顶端各放一根香蕉．梯子之间有若干绳子相连．每条绳子连接两个梯子，任一梯子的同一级上没有两条绳子，开始时五只猴子位于不同梯子底端．它们沿梯子向上爬，遇到绳子就沿它爬到另一端，然后继续上爬．求证：无论有多少绳子，最后每只猴子都各拿到一根香蕉．

【题说】 第二十一届（1989 年）加拿大数学奥林匹克题 4．



【证】 甲数学归纳法．当绳子根数为 0 时，结论显然成立．设有 n 根绳子，其中一根绳子连结第一个梯子的 A 与第二个梯子的 B，而 A 以下不再有绳子．我们将第一个梯子从 A、第二个梯子从 B 锯下来，并将第一个梯子下段接于第二梯子上段，作为第一个梯子；第二个梯子下段接于第一个梯子上段，作为第二个梯子．这样便归结于（n-1）根绳子的情况．

E1-078 某地区网球俱乐部的 20 名成员举行 14 场单打比赛，每人至少上场一次．求证：必有 6 场比赛，其 12 个参赛者各不相同．

【题说】 第十八届（1989 年）美国数学奥林匹克题 2．

【证】 作一个图 G：20 个顶点 A_1，…A_{20}，表示 20 个选手，14 条边表示 14 场比赛，顶点 A_i 的次数（由它出发的边数）为 d_i（i=1，2，…，20）．则

$$d_i \geq 1,\ \sum_{i=1}^{20} d_i = 2 \times 14 = 28$$

从顶点 A_i 抹去（d_i-1）条边（同一条边可以同时被其二端点抹去），最多抹去

$$\sum_{i=1}^{20}(d_i-1)=\sum_{i=1}^{20}d_i-20=8$$

条边，所余子图 G′中至少还有 6 条边，而各顶点度皆≤1．这表明至少有 6 场比赛的参赛者各不相同．

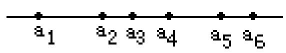
E1-079　100 个运动员参加赛跑,已知其中任意 12 个人中总有两个彼此熟悉的，证明：运动员的号码不论如何编排（未必是从 1 到 100），总可以找到两个彼此熟悉的运动员，他们的号码是以相同的数字开头的（即最高数位的数字相同）．

【题说】　第十六届（1990 年第三阶段）全俄数学奥林匹克十年级题 7．

【解】　用 N_i（i=1，2，…，9）表示以数字 i 开头的号码的数目．只须证明：对于某个 k，有 N_k≥12 即可．事实上，若对所有的 i=1，2，…，9，$N_i\le 11$，则 $\sum_{i=1}^{9}N_i\le 99$，这与有100个运动员矛盾．故命题得证．

E1-080　一条马路上有六个车站（如图），今有一辆汽车由 a_1 驶向 a_6，沿途各站可自由上下乘客，但此辆汽车在任何时候至多可载乘客 5 人，试证：在此六站中必有两对（四个不同的）车站 A_1、B_1；A_2、B2，使得没有乘客在 A_1 站上而且在 B_1 站下（A_1 在 B_1 之前），也没有乘客在 A_2 站上而且在 B_2 站下（A_2 在 B_2 之前）．

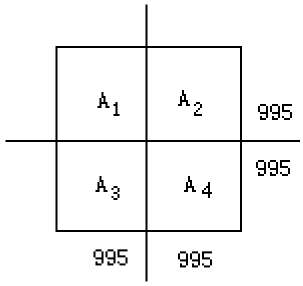
【题说】　1957 年北京市赛高三二试题 8．



【证】　设在站 a_i（i=1，2，3）上车、站 a_j（j=4，5，6）下车的人数为 b_{ij}．在车从 a_3 开往 a_4 的途中，这些人全在车上．由于车上至多载客 5 人，b_{ij}（i=1，2，3；j=4，5，6）中至少有 4 个为 0．其中有两个具有相同的 i，不失一般性，可以假定 $b_{14}=b_{15}=0$．在 b_{2j}，b_{3j}（j=4，5，6）中至少有一个为 0．不妨设 $b_{24}=0$，则站 a_1，a_5；a_2，a_4 即为所求的两对车站．

E1-081　能否将1990×1990 方格表的每个小方格涂成黑色或白色，使得关于表的中心对称的方格涂有不同的颜色，并且表的任意一行及任意一列中黑格和 白格都各占一半？

【题说】　第二十四届（1990 年）全苏数学奥林匹克十年级题 1．



【解】 假设能按要求涂色．将黑格记为+1，白格记为-1．将方格表分成四个 995×995 的正方形（如图）．因每个正方形含奇数个方格，故任一正方形各格上的数相加，和不为零．又因关于中心对称的方格涂有不同颜色．故正方形 A_1 与 A_4，A_2 与 A_3 各格的数相加的和均为零．因此，A_1 与 A_4，A_2 与 A_3 中各有一个，其中各数之和为正，不妨设 A_1、A_2 中各数的和为正．这时 $A_1 \cup A_2$ 中各数之和为正，但由已知，每行中黑格与白格各占一半．所以前 995 行各数之和为零，即 A_1 与 A_2 中各数之和为零．矛盾！所以，满足要求的涂色法不存在．

E1-082 设项链 A 有珠 14 颗，B 有珠 19 颗．对奇数 n≥1，用 n，n+1，n+2，…，n+32 给这 33 颗珠编号，使每个整数恰用一次，且相邻之珠编号互素，试证最少有 6 种可行方法．

【题说】 第三届（1993 年）澳门数学奥林匹克第二轮题 5．

【证】 A 的珠顺次编为 n+k，n+k+1，…，n+k+13．

B 的珠顺次编为 n+k+14，n+k+15，…，n+32，n，n+1，…，n+k-1，1≤k≤18．当且仅当

$$(n+k，n+k+13)=(n+32，n)=(n+k-1，n+k+14)=1$$

即 $(n+k，13)=(n，32)=(n+k-1，15)=1$ (*)

时，编号合乎要求．

因为 n 为奇数，（n，32）=1，显然成立．18 个连续值中至少 2 个 k 能使 13|n+k，恰有 6 个能使 3|n+k-1，至多 4 个能使 5|十 k-1，故使（*）不成立的至多 2+6+4=12 个值，即至多有 6 个值能使（*）成立．

注：因为连续 15 个数中有 8 个数与 15 互素，连续 3 个数中必有一个与 15 互素（3 的倍数与 5 的倍数至多各 1 个）．故 k 的 18 个连续值中至少有 9 个使 n+k-1 与 15 互素，故最小有 7 种可行的编号法，7 是最佳值．令 n=99，则恰好只有 m=3，6，8，9，11，14，15 这 7 个数能使（*）成立．

E1-083 设 N={1，2，3，…}．论证是否存在一个函数 f：N→N 使得

f（1）=2

f（f（n））=f（n）+n（对一切 n∈N 成立）

f（n）＜f（n+1）（对一切 n∈N 成立）

【题说】 第三十四届（1993 年）国际数学奥林匹克题 5．

解】 这样的函数存在．取$\alpha=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，$\beta=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，令f（n）=[an+β]，

n∈N．我们证明f（n）合乎条件．显然f：N→N并且

$$f(1)=[\alpha+\beta]=[\sqrt{5}]=2$$

$$f(n+1)=[(n+1)\alpha+\beta]=[an+\beta+\alpha]$$

$$\geq[\alpha n+\beta+1]=f(n)+1>f(n)$$

最后 $f(f(n))=[\alpha[\alpha n+\beta]+\beta]=[\alpha n+\beta]+[\beta[\alpha n+\beta]+\beta]$

$$=f(n)+[\beta[\alpha n+\beta]+\beta]$$

显然αn＋β不是整数，于是有

$$\beta[\alpha an+\beta]+\beta<\beta(\alpha n+\beta)+\beta+=n+\beta(\beta+1)=n+1$$

$$\beta[\alpha n+\beta]+\beta>\beta(\alpha n+\beta-1)+\beta=n+\beta 2>n$$

所以

$$[\beta[\alpha n+\beta]+\beta]=n$$

$$f(f(n))=f(n)+n$$

E1-084 集合A={0，1，2，3，4，5，6，7}，满足下列条件（1）、（2）的A到A上的映射f有几个？

（1）i，j∈A，i≠j则f（i）≠f（j）；

（2）i，j∈A，i+j=7，则 f（i）+f（j）=7．

【题说】 1994年日本数学奥林匹克预选赛题8．

【解】 记A_0={0，7}，A_1={1，6}，A_2={2，5}，A_3={3，4}．由条件（2）可知 A_i 中元素的像必在同一个 A_j．由（1），不同的 A_i，相应的 A_j 不同．于是 i 与 j（1≤i，j≤4）的有序对有 4！种配法，而各个 A_j 中的元素作为像可以互换，因而有 2^4 种．故所要求的映射共有

$$4\times 2^4=384（种）$$

E1-085 是否存在这样的实系数多项式P（x）：它具有负系数，而对于所有n>1，$P^n(x)$的系数全是正的．

【题说】 第五十七届（1994年）莫斯科数学奥林匹克十年级题26．

【解】 $P(x)=10(x^3+1)(x+1)-x^2$

$$=10x^4+10x^3-x^2+10x+10$$

具有负系数．但是

$$P^2(x)=x^4+100(x^3+1)^2(x+1)^2-20x^2(x^3+1)(x+1)$$

$$=x^4+20(x^3+1)[5(x^3+1)(x+1)^2-x^2(x+1)]$$

$$=x^4+20(x^3+1)(5x^5+10x^4+4x^3+4x^2+10x+5)$$

的系数全是正的．而且

$$P^3(x)=1000(x^3+1)^3(x+1)^3-300x^2(x^3+1)2(x+1)^2+30x^4(x^3+1)(x+1)-x^6$$

$$=100(x^3+1)^2(x+1)[10(x^3+1)(x+1)^2-3x^2(x+1)]-$$

$$x^6+30x^4(x^3+1)\cdot(x+1)$$

$$=100(x^3+1)^2(x+1)(10x^5+20x^4+7x^3+7x^2+20x+1)$$

$$-x^6+30x^4(x^3+1)\cdot(x+1)$$

$$=Q_1(x)-x^6+Q_2(x)$$

Q_1（x）中的 x^6 的系数不小于 1000，所以，P^3（x）的系数也全是正的．又当 k≥2 时，
有

$$P^{2k}(x)=(P^2(x))^k$$
$$P^{2k+1}(x)=(P^2(x))^{k-1}\cdot P^3(x)$$

所以，对一切 n＞1，P^n（x）的系数全是正的．

E1-086　一个社团内，每一对人不是友好就是敌对．设这个社团共有 n 个人和 q 个友好对子，并在任三人中至少有一对人是敌对的，证明：这个社团中至少有一个成员,他的敌人所组成的集合中友好对子不多于 q（$1-4q/n^2$）．

【题说】　第二十四届（1995 年）美国数学奥林匹克题 5．

【证】　将 n 个人用 n 个点表示．对友好对子，用边连结相应的两个点，并称它们为相邻的．点 w 引出的边数记为 degw．易知

$$\sum_{\text{所有}w}\deg v=2q \qquad (1)$$

因为

$$\sum_{\text{所有}w}\sum_{v\text{与}w\text{相邻}}\deg v=\sum_{\text{所有}v}\deg v\sum_{w\text{与}v\text{相邻}}1$$
$$=\sum_{\text{所有}v}(\deg v)^2\geq\left(\sum_{\text{所有}v}\deg v\right)^2\Big/\left(\sum_{\text{所有}v}1^2\right)=\frac{4q^2}{n}$$

所以必有一个 w_0 满足

$$\sum_{v\text{与}w_0\text{相邻}}\deg v\geq\frac{4q^2}{n^2} \qquad (2)$$

（2）式左边表示一类友好对子的个数，这类友好对子中总有一个人与 w_0 友好（由于每三个人中至少有一对人是敌对的，所以没有发生重复计算）．于是 $q-\sum_{v\text{与}w_0\text{相邻}}\deg v$ 表示另一类友好对子的个数，即 w_0 的敌人中，友好对子的个数．由（2），这类友好对子的个数 $\leq q\left(1-\frac{4q}{n^2}\right)$．

E1-087　能否在 9×9 的表格中写上 1 至 81 的自然数，使得每个 3×3 的正方形表格中各数之和都是相等的？

【题说】　第二十一届（1995 年）全俄数学奥林匹克九年级题 4．

0	1	2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	0	1	2
6	7	8	0	1	2	3	4	5
0	1	2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	0	1	2
6	7	8	0	1	2	3	4	5
0	1	2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	0	1	2
6	7	8	0	1	2	3	4	5

【解】　按照题目要求的填数方式可以做到．我们构造如右图的 9×9 表格 A，它具有如下的性质：任意一个 3×3 的正方形表格中各数之和都等于 36．

将表格 A 逆时针旋转 90°，得到表格